Contenido

1. Trabajo

La razón principal para la aplicación de una fuerza es causar un desplazamiento. Siempre que una fuerza actúa a través de una distancia se descubrirá que se realiza *trabajo*, de tal manera que puede ser medido o predicho.

La capacidad para realizar trabajo será definida como *energía* y el ritmo al cual se lleva a cabo, será definido como *potencia*. Una comprensión firme de los tres conceptos de trabajo, energía y potencia es esencial.

1.1. Trabajo

El trabajo efectuado por una fuerza ***F*** provoca un desplazamiento ***s***.
Para que se realice *trabajo*, son necesarias tres cosas:

1. Debe haber una fuerza aplicada.
2. La fuerza debe actuar a lo largo de cierta distancia, llamada *desplazamiento*.
3. La fuerza debe tener una componente a lo largo del desplazamiento.

Si se dan las tres condiciones, estamos preparados para dar una definición formal de trabajo.
El ***trabajo*** es una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes del desplazamiento y de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

Trabajo = Componente de la fuerza x desplazamiento

$$Trabajo = F_x s$$

Donde:
$\boldsymbol{F_x}$ = Es la componente de $\boldsymbol{F}$ a lo largo del desplazamiento $\boldsymbol{s}$
$\boldsymbol{s}$ = desplazamiento

Su magnitud puede encontrarse por trigonometría, y el trabajo puede expresarse en términos del ángulo $\boldsymbol{\vartheta}$ entre $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{s}$.

$$\text{Trabajo} = (F \cos \theta)\ s$$

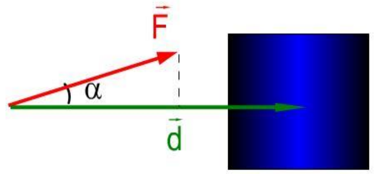
Con frecuencia, la fuerza que origina el trabajo está dirigida enteramente a lo largo del desplazamiento. En estos casos simples $\boldsymbol{F_x = F}$, y el trabajo es el producto simple de la fuerza y el desplazamiento:

$$\text{Trabajo} = F\ s$$

Otro caso especial ocurre cuando la fuerza aplicada es perpendicular a la dirección del desplazamiento ($\cos 90° = 0$). En este caso el trabajo siempre es igual a cero.

Ejemplo:
¿Qué trabajo es desempeñado por una fuerza de *60 N* al arrastrar el bloque a una distancia de *50 m*, cuando la fuerza es transmitida por una cuerda con un ángulo de *30°* con la horizontal?

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos\alpha$$



Se debe determinar la componente F_x de la fuerza *F* de *60 N*. Solo esta componente contribuye al trabajo. Gráficamente, esto se hace al dibujar el vector de *60 N* a escala con un ángulo de *30°*. Si se mide $\boldsymbol{F_x}$ y se convierte en néwtones da:

$$F_x = 52\ N$$

Con trigonometría, se podría realizar el mismo cálculo al usar la función coseno.

$$F_x = (60\ N)\ (\cos 30°) = 52\ N$$

Ahora al aplicar la ecuación de trabajo, se obtiene:

$$Trabajo = F_x \cdot s = (52\ N)\ (50\ m) = 2600\ N \cdot m$$

Nota que las unidades del trabajo son unidades de fuerza por distancia. Así, en el *SI* la unidad del trabajo es el *newton-metro* (N · m), que recibe el nombre de *joule* (J). En el SI, *1 J* es igual al trabajo realizado por una fuerza de *1 N* para mover un objeto la distancia de *1 m* paralela a la fuerza.

De manera similar, la unidad de trabajo en el *sbg* es la *libra-pie* (ft · lb). No existe algún nombre especial para esta unidad; 1 ft · lb es igual al trabajo realizado por una fuerza de 1 lb para mover un cuerpo en una distancia de 1 ft, paralela a la fuerza.

Los siguientes factores de conversión resultan muy útiles:

$$1\ J = 0.7376\ ft \cdot lb \quad \text{y} \quad 1\ ft \cdot lb = 1.356\ J$$

1.2. Trabajo resultante

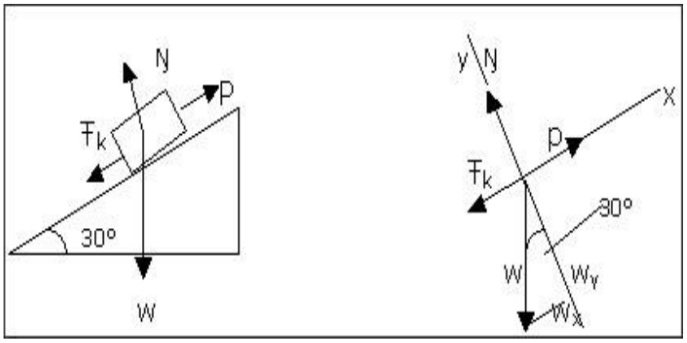
Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo en movimiento, el trabajo *resultante* (trabajo total) es la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas individuales. Esto será también igual al trabajo de la fuerza resultante.

Ejemplo:

Un empuje *P* de *200 lb* mueve un bloque de *100 lb* hacia arriba de un plano inclinado a *30°*. El coeficiente de fricción cinética es de *0.25* y el plano tiene una longitud de *20 ft*.

a) Calcúlese el trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque.

b) Demuéstrese que el trabajo neto realizado por estas fuerzas es el mismo que el trabajo de la fuerza resultante.



a) Hay cuatro fuerzas que actúan sobre el bloque: *N*, *P*, F_k y *W*. La fuerza normal *N* no realiza ningún trabajo puesto que no tiene ninguna componente en la dirección del des-plazamiento.

$$(Trabajo)_N = 0$$

El empuje *P* se encuentra totalmente en la dirección del desplazamiento. Así:

$$(Trabajo)_P = P_s = (200\ lb)\ (20\ ft) = 4000\ ft \cdot lb$$

La magnitud de la fricción F_k, se calcula como sigue:

$$F_k = \mu_k N = \mu_k W_{1y} = \mu_k W \cos 30°$$

$$F_k = (0.25)\ (100\ lb)\ (\cos 30°) = 21.6\ lb$$

Dado que esta fuerza se dirige hacia abajo del plano en una dirección opuesta al desplazamiento, reali-za trabajo negativo, que está dado por:

$$(Trabajo)_F = (-\ 21.6\ lb)\ (20\ ft) = -\ 432\ ft \cdot lb$$

El peso *W* del bloque también realiza trabajo negativo ya que su componente *W*, tiene una dirección opuesta al desplazamiento.

$$(Trabajo)_W = -\ W_x\ s = -\ (W \operatorname{sen} 30°)\ (20\ ft)$$

$$(Trabajo)_W = -\ (100\ lb)\ (\operatorname{sen} 30°)\ (20\ ft) = -\ 1000\ ft \cdot lb$$

b) El trabajo neto se obtiene al sumar los trabajos de cada una de las fuerzas.

$$Trabajo\ neto = (Trabajo)_N + (Trabajo)_P + (Trabajo)_{F} + (Trabajo)_W$$

$$Trabajo\ neto = 0 + 4000\ ft \cdot lb - 432\ ft \cdot lb - 1000\ ft \cdot lb = 2568\ ft \cdot lb$$

Para demostrar que éste también es el trabajo de la fuerza resultante, debemos primero calcular esta fuerza resultante. De acuerdo con los métodos que hemos estudiado en temas anteriores,

$$F_R = P - F_k - W_x$$

$$F_R = 200\ lb - 21.6\ lb - 50\ lb = 128.4\ lb$$

El trabajo de F_R es, por tanto:

$$(Trabajo)\ F_R = F_R\ s$$

$$(Trabajo)_{FR} = (128.4\ lb)\ (20\ ft) = 2568\ ft \cdot lb$$

Es importante distinguir entre *trabajo resultante* o *neto* y el trabajo de una fuerza individual. Si hablamos del trabajo requerido para mover un bloque a través de una distancia, el trabajo hecho por la fuerza de tracción no es necesariamente el trabajo resultante.

El trabajo puede ser hecho por una fuerza de fricción o por otras fuerzas. El trabajo resultante es simplemente el trabajo hecho por la fuerza resultante; si ésta es cero, entonces el trabajo resultante es cero aun cuando las fuerzas individuales pueden estar haciendo trabajo positivo o negativo.

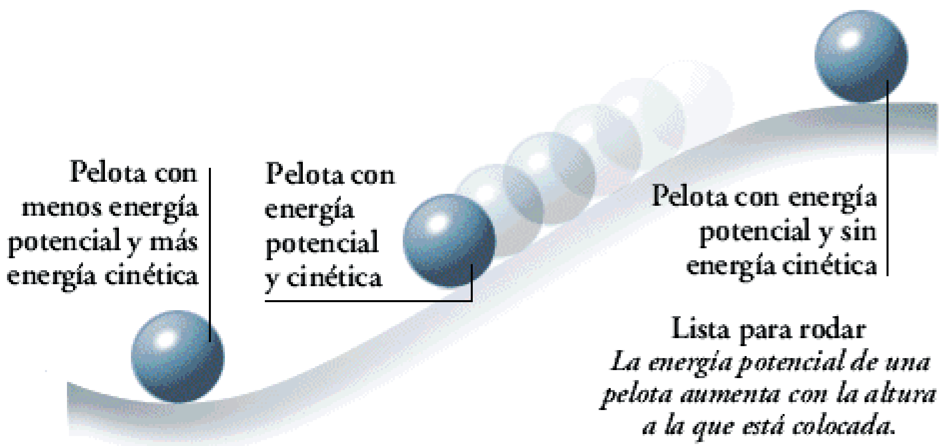
2. Energía

Se puede pensar que la energía es *cualquier cosa que pueda ser convertida en trabajo*. Las unidades de la energía son las mismas que las del trabajo: *el joule* y la *libra-pie*.

En mecánica, nos interesan dos clases de energía:

- ***Energía cinética***: E_k, es la energía que posee un cuerpo en virtud de su movimiento.
- ***Energía potencial***: E_P, es la energía que posee un cuerpo en virtud de su posición o condición.

Se pueden pensar fácilmente en mucho ejemplos de cada clase de energía. Por ejemplo:



2.1. Trabajo y energía cinética

El trabajo realizado por la fuerza ***F*** produce una modificación en la energía cinética de la masa ***m***.

Considérese un bloque que tiene una velocidad inicial $\boldsymbol{V_0}$ y que la fuerza ***F*** actúa a través de una distancia *s,* lo que provoca que la velocidad se incremente a un valor final $\boldsymbol{V_f}$. Si el cuerpo tiene una masa ***m***, la segunda ley de Newton dice que aumentará su velocidad, o acelerará, a un ritmo dado por:

$$a = F/m$$

Hasta que alcance una velocidad final V_f. Recordamos que:

$$2as = V^2{}_f - V^2{}_0$$

De la cual obtenemos:

$$a = \frac{V^2{}_f - V^2{}_0}{2s}$$

Al sustituir $a = F/m$ obtenemos:

$$\frac{F}{m} = \frac{V^2{}_f - V^2{}_0}{2s}$$

De la cual se puede despejar el producto *Fs* para tener: $Fs = ½\, mV^2{}_f - ½\, mV^2{}_0$

La cantidad en la primera parte de la ecuación es el trabajo realizado sobre la masa *m*, la cantidad en el segundo término debe ser el cambio de energía cinética que resulta de este trabajo, por lo tanto, podemos definir la energía cinética E_k como:

$$E_k = ½\ mV^2_0$$

Este importante resultado se puede enunciar como sigue:
El trabajo que realiza una fuerza resultante externa sobre un objeto es igual al cambio en la energía cinética del objetivo.

Ejemplos:

1. Calcula la energía cinética de un marro de *4 kg* en el instante en que su velocidad es de *24 m/s*.

Si se aplica la ecuación se obtiene:

$$E_k = ½\ mV^2 = ½\ (4\ kg)\ (24\ m/s)^2 = 1152\ N \cdot m = 1152\ J$$

2. Calcula la energía cinética de un automóvil de *3200 lb* que se mueven con una velocidad constante de *60 mi/h (88 ft/s)*.

Hacemos el mismo cálculo del ejemplo anterior, excepto que debemos calcular la masa a partir del peso.

$$E_k = ½\ mV^2 = ½\ (W/g)\ V^2$$

Al sustituir los valores dados para *W* y *V*, tenemos:

$$E_k = ½\ (3200\ lb/32\ ft/s^2)\ (88\ ft/s)^2 = 3.87 \times 10^5\ ft \cdot lb$$

3. ¿Qué fuerza media *F* se requiere para detener una bala de *16 g* que viaja a una velocidad de *260 m/s* y penetra una distancia de *12 cm* en un bloque de madera?

El trabajo total requerido para detener la bala deberá ser igual al cambio en la energía cinética. Dado que la bala es detenida, $V_f = 0$, por lo que la ecuación queda así:

$$Fs = -\ ½\ mV^2_0$$

Al sustituir obtenemos:

$$F\ (0.12\ m) = -\ ½\ (0.016\ kg)\ (260\ m/s)^2$$

Dividiendo entre *0.12 m* tenemos:

$$F = -\ (0.016\ kg)\ (260\ m/s)^2/(2)\ (0.12\ m) = -\ 4510\ N$$

El signo negativo del resultado nos indica que la fuerza tiene una dirección opuesta al desplazamiento. Nótese que esta fuerza resultó ser 30 000 veces más grande que el peso de la bala.

2.1. Energía potencial

La energía que un sistema posee en virtud de su posición o condiciones recibe el nombre de *energía potencial*. Ya que la energía se expresa a sí misma en términos de trabajo, la energía potencial implica que debe haber alguna capacidad para realizar el trabajo. La fuerza externa *F* requerida para levantar el cuerpo deberá ser cuando menos igual al peso *W*. Así, el trabajo que realiza sobre el sistema es dado por:

$$Trabajo = Wh = mg \cdot h$$

Solo fuerzas *externas* como *F* o la fricción pueden agregar energía o extraerla del sistema conformado por el cuerpo y la Tierra. La energía potencial gravitacional es la energía que posee un cuerpo en virtud de su posición o condición. Levantar una masa *m* hasta una altura *h* requiere el esfuerzo *mgh*.

El sistema cuerpo-tierra tiene una energía potencial $E_p = mgh$, y cuando la masa es liberada, ésta tiene capacidad para realizar el trabajo *mgh*. La E_p, resulta de la posición de un objeto con respecto a la Tie-rra. La energía potencial E_p tiene las mismas unidades que el trabajo y se encuentra de:

$$E_p = Wh \quad E_p = mgh$$

Donde *W* o *mg* es el peso del objeto y *h* es la altura sobre alguna posición de referencia.
Ejemplos:

1. Un carburo de *250 g* se mantiene a *200 mm* sobre un banco de trabajo que está a *1 m* del suelo. Calcúlese la energía potencial relativa a: *a*) La parte superior del banco y *b*) al piso.

a) La altura *h* del carburador sobre el banco es de *200 mm* (0.2 m), y la masa es de *250 g* (0.25 kg). En-tonces, la energía potencial relativa al banco es:

$$E_P = mgh = (0.25\ kg)\ (9.8\ m/s^2)\ (0.2\ m) = 0.49\ J$$

b) La energía potencial con respecto al piso es:

$$E_P = mgh = (0.25\ kg)\ (9.8\ m/s^2)\ (1.2\ m) = 2.94\ J$$

2. Una unidad de aire acondicionado comercial de *800 lb* es levantada por un montacargas hasta alcanzar *22 ft* por encima del piso. ¿Cuál es la energía potencial relativa al piso?

Si se aplica la ecuación: $E_p = Wh$, se obtiene:

$$E_P = Wh = (800\ lb)\ (22\ ft) = 17{,}600\ ft \cdot lb$$

2.2. Conservación de la energía

Muy a menudo, a velocidades bajas, tiene lugar un intercambio entre las energías cinética y potencial.

$$\text{Energía total} = E_P + E_K = \text{constante}$$

Decimos que la energía mecánica es *conservada*. Ahora, estamos preparados para invocar el principio de *conservación de la energía mecánica*.

Conservación de la energía mecánica: *en ausencia de resistencia del aire u otras fuerzas disipadoras, las sumas de las energías potenciales y cinéticas es una constante, siempre y cuando ninguna energía sea añadida al sistema*.

Bajo estas condiciones, la energía cinética final de una masa *m* que se deja caer desde una altura *h* es:

$$\tfrac{1}{2}\, mV_f^2 = mgh$$

Resolviendo esta relación para V_f se obtiene una ecuación útil para determinar la velocidad final a partir de la energía:

$$V_f = \sqrt{2gh}$$

Ejemplo:

1. Una esfera de *40 kg* es impulsada hasta que queda a *1.6 m* sobre su posición más baja. Sin tomar en cuenta la fricción, ¿cuál será su velocidad cuando regrese a través del punto más bajo?

La conservación de la energía mecánica requiere que la energía cinética final sea igual a la energía potencial inicial.

$$\frac{1}{2} mV_f^2 = mgh$$

Así, la ecuación se aplica y solamente se resuelve para V_f.

$$V_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8\ m/s^2)(1.6\ m)} = 5.60\ m/s$$

Consideremos ahora el caso más general en el que alguna energía mecánica se pierde en razón de alguna fuerza disipadora como el rozamiento. El cambio en la energía mecánica que resulta de tal fuerza será siempre igual al trabajo negativo realizado por la fuerza disipadora. Por el rozamiento debemos escribir este hecho como sigue:

|Energía cinética final| = |energía potencial inicial| – |esfuerzo contra rozamiento|

$$\frac{1}{2} mV_f^2 = mgh - Fs$$

Una mejor forma de escribir esta declaración sería expresarla en términos de la energía total disponible inicialmente.

$$mgh = \frac{1}{2} mV_f^2 + Fs$$

Esta ecuación es un enunciado matemático del principio de conservación de la energía, el cual puede ahora ser re-expresado como sigue:

Conservación de la energía: *la energía total de un sistema es siempre constante, aunque pueden ocurrir transformaciones de energía de una forma a otra dentro del sistema*.

Ejemplo:

1. Un bloque de *64 lb* cae sobre un plano inclinado de *300 ft* de longitud y *30°* de inclinación, si $\mu_k = 0.1$, encuéntrese la velocidad del bloque al pie del plano inclinado a partir de consideraciones energéticas.

Comencemos por calcular la energía potencial en la parte superior del plano inclinado.

$$E_P = Wh = (64\ lb)\ (300\ ft)\ (\text{sen } 30°) = 9600\ ft \cdot lb$$

Ésta es la energía total disponible inicialmente. Para determinar cuánta energía se perderá al realizar trabajo contra el rozamiento, debemos calcular la fuerza normal *N* ejercida por el plano contra el bloque.

$$N = W_y = (64\ lb)\ (\cos 30°) = 55.4\ lb$$

Por tanto la fuerza de rozamiento debe ser:

$$F_k = \mu_k N = (0.1)\ (55.4\ lb) = 5.54\ lb$$

El trabajo así realizado por la fuerza de rozamiento es:

$$F_k\, s = (5.54\ lb)\ (300\ lb) = 1660\ ft \cdot lb$$

De acuerdo con la ecuación $\frac{1}{2}\, mV^2_f = mgh - Fs$, la energía cinética final debe ser igual a la energía potencial inicial menos la pérdida de energía sufrida durante la realización del trabajo contra el rozamiento. Así:

$$\tfrac{1}{2}\, mV^2_f = 9600\ ft \cdot lb - 1660\ ft \cdot lb = 7940\ ft \cdot lb$$

Dado que la masa del bloque es:

$$m = W/g = 64\ lb/32\ ft/s^2 = 2\ slugs$$

Al sustituir obtenemos:

$$\tfrac{1}{2}\ (2\ slugs)\ V^2_f = 7940\ ft \cdot lb$$

De lo cual:

$$V^2_f = 7{,}940\ ft \cdot lb/\ slug = 7940\ ft^2/s^2$$

Obteniendo la raíz cuadrada de ambos miembros, podemos calcular la velocidad final.

$$V_f = 89\ ft/s$$

2.3. Potencia

Potencia es la rapidez con la que se realiza un trabajo.

$$P = trabajo\ /\ t$$

En las unidades de *Sbg*, la unidad de la potencia es la *libra-pie por segundo*. La unidad correspondiente en el *SI* tiene un nombre especial, el *watt* (*W*) y se define como:

$$1\ W = 1\ J/s$$

El *watt* y la *libra-pie por segundo* son unidades demasiado pequeñas para su uso conveniente en la mayor parte de las aplicaciones industriales. Por lo tanto, se han definido el *kilowatt* (k W) y el *caballo de fuerza* (hp) como sigue:

$$1\ k\ W = 1000\ W$$
$$1\ hp = 550\ ft \cdot lb/s$$

Se puede hablar con toda propiedad de un foco de *0.08 hp* o presumir de un motor de *238 000 W*. Los factores de conversión son:

$$1\ hp = 746\ W = 0.746\ k\ W$$
$$1\ k\ W = 1.34\ hp$$

Ya que generalmente el trabajo se realiza de una manera continua, es a veces útil usar otra fórmula para la potencia que incluya la velocidad. Así,

$$P = \frac{trabajo}{\cdot t} = \frac{Fs}{t}$$

De la cual:

$$P = F\,\frac{s}{t} = FV$$

Donde *V* es la velocidad del cuerpo sobre el que una fuerza paralela *F* es aplicada.
Ejemplos:

1. Se levanta una carga de *40 kg* a una altura de *25 m*. Si esta operación toma *1 min*, encuéntrese la potencia requerida. ¿Cuál es la potencia en caballos de fuerza?

El trabajo desarrollado para levantar la carga es:

$$Trabajo = Fs = mgh = (40\ kg)\ (9.8\ m/s^2)\ (25\ m) = 9800\ J$$

Por lo tanto, la potencia es:

$$P = trabajo/t = 9800\ J/60\ s = 163\ W$$

Dado que $1\ hp = 746\ W$, el caballaje desarrollado fue:

$$P = (163\ W)\ 1\ hp/746\ W = 0.219\ hp$$

2. Un motor de *60 hp* proporciona la potencia necesaria para mover el ascensor de un hotel. Si el peso del elevador es de *2000 lb*, ¿Cuánto tiempo se requiere para levantar el ascensor *120 ft*?

El trabajo realizado está dado por:

$$Trabajo = Fs = (2000\ lb)\ (120\ ft) = 2.4 \times 10^5\ ft \cdot lb$$

Dado que $1\ hp = 550\ ft \cdot lb/s\ /\ 1\ hp = 3.3 \times 10^4\ ft \cdot lb/s$

A partir de la ecuación:

$$P = Fs\ /\ t \therefore t = Fs/P$$

De manera que:

$$t = 2.4 \times 10^5\ ft \cdot lb\ /\ 3.3 \times 10^4\ ft \cdot lb/s = 7.27\ s$$

3. Impulso y momento

La energía y el trabajo son cantidades escalares que no nos dicen absolutamente nada acerca de la dirección. La ley de la conservación de la energía describe tan sólo la relación entre los estados inicial y final de un movimiento; pero no nos dice nada acerca de la distribución de las energías.

3.1 Impulso y movimiento

Cuando un palo de golf golpea la pelota, una fuerza *F* que actúa durante un intervalo de tiempo *Δt* provoca un cambio en su momento. Por la segunda ley de Newton tenemos que:

$$F = ma = m\,\frac{V_f - V_o}{\Delta t}$$

Al multiplicar por *Δt* queda:

$$F\,\Delta t = m\,(V_f - V_o),\ es\ decir,\ F\,\Delta t = mV_f - mV_o$$

El impulso *F Δt* es una cantidad vectorial igual en magnitud al producto de la fuerza por el intervalo de tiempo en que actúa. Su dirección es la misma que la fuerza.

El *momento P* de una partícula es una cantidad vectorial igual en magnitud al producto de su masa por su velocidad *V*.

$$P = mV$$

Por tanto, la ecuación puede ser enunciada verbalmente:

Impulso ($F\,\Delta t$) = cambio del momento ($mV_f - mV_o$)

La unidad del impulso en el *SI* es el *newton-segundo* (N · s). La unidad para la cantidad de momento es el *kilógramo-metro por segundo* (kg · m/s). Es conveniente distinguir entre estas unidades aunque realmente sean iguales:

$$N \cdot s = \frac{kg \cdot m}{s^2}\ x\ s = kg \cdot m/s$$

Las unidades correspondientes del *sbg* son la *libra-segundo* (lb-s) y el *slug-pie por segundo* (slug · ft/s).

Ejemplos:

1. Un marro de *3 kg* tiene una velocidad de *14 m/s* en el momento de golpear un perno de acero y es detenido en *0.02 s*. Determínese la fuerza media que actúa sobre el perno.

Dado que $V_f = 0$, tenemos:

$$F\,\Delta t = -\,mV_o$$

Si consideramos que el marro se mueve hacia abajo, sustituimos $Vo = -\,14\ m/s$, para tener:

$$F = \frac{-mV_o}{\Delta t} = \frac{-(3\ kg)(-14\frac{m}{s})}{0.02\ s} = 2100\ N$$

Esta fuerza, ejercida sobre el marro, es de la misma magnitud pero de dirección opuesta que la fuerza ejercida sobre el perno.

2. Una pelota de beisbol de *0.6 lb* se mueve hacia el bateador a una velocidad de *44 ft/s* y al ser golpeada sale en dirección contraria con una velocidad de *88 ft/s*. Encuéntrese el impulso y la fuerza media ejercida sobre la pelota si el bat estuvo en contacto con la pelota un lapso de *0.01 s*.

Consideremos la dirección final del movimiento como positiva. Aplicando la ecuación podemos encontrar el impulso como sigue:

$$F\,\Delta t = mV_f - mV_o = m\,(V_f - V_o)$$

Y dado que:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{0.6\ lb}{32\ ft/s} = 0.0188\ slug$$

$$F\,\Delta t = 0.0188\ slug\ [88\ ft/s - (-\,44\ ft/s)] = 0.0188\ slug\ (132\ ft/s) = 2.48\ lb \cdot s \ldots \textit{Impulso}$$

Para encontrar la fuerza promedio debemos sustituir $\Delta t = 0.01\ s$

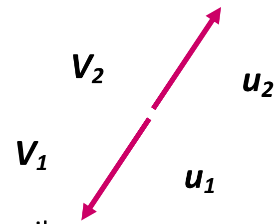
$$F\,(0.01\ s) = 2.48\ lb \cdot s$$

$$F = \frac{2.48\ lb \cdot s}{0.01\ s} = 248\ lb$$

3.2. La ley de la conservación del momento

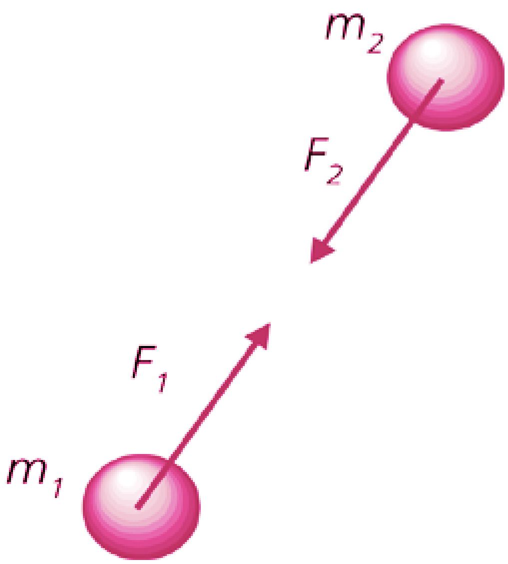
Consideremos la colisión de *frente* de las masas m_1 y m_2 que se ilustra en la siguiente figura. Representamos sus velocidades antes del impacto por los símbolos u_1 y u_2, y después del choque por V_1 y V_2. El impulso de la fuerza F_1 que actúa sobre la masa de abajo es:

$$F_1\,\Delta t = m_1V_1 - m_1u_1$$



De manera similar, el impulso de la fuerza F_2 sobre la masa de arriba es:

$$F_2\,\Delta t = m_2V_2 - m_2u_2$$



Durante el lapso Δt, $F_1 = -F_2$, de tal manera que:

$$F_1\,\Delta t = -F_2\,\Delta t$$

Es decir,

$$m_1V_1 - m_1u_1 = -(m_2V_2 - m_2u_2)$$

Y, después de ordenar términos, tenemos:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1V_1 + m_2V_2$$

La cantidad total de momento antes del impacto = cantidad total de momento después del impacto.

Se ha derivado así un enunciado de la ley de la conservación del momento:
Cuando dos grupos chocan, la cantidad total del momento antes del impacto es igual a la cantidad total del momento después del impacto.

Ejemplos:

1. Supón que m_1 y m_2 tienen masas de *8 y 6 kg*, respectivamente. La velocidad inicial de m_1 es de *4 m/s* a la derecha y choca con m_2 que tiene una velocidad de *5 m/s* a la izquierda. ¿Cuánta cantidad de momento hay antes y después del impacto?

Escogemos la dirección a la derecha como positiva y tenemos la preocupación de asignar los signos correctos a cada velocidad.

$$P_0 \text{ (antes del impacto)} = m_1u_1 + m_2u_2$$
$$P_0 = (8\text{ kg})(4\text{ m/s}) + (6\text{ kg})(-5\text{ m/s}) = 32\text{ kg}\cdot\text{m/s} - 30\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 2\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Debe existir la misma cantidad de momento después de la colisión, por lo que escribimos:

$$P_f = m_1V_1 + m_2V_2 = 2\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Si V_1 o V_2 se pueden medir después del choque, la otra puede ser calculada a partir de esta relación.

2. Un fusil que pesa *8 lb* dispara una bala de 0.02 *lb* con una velocidad de salida de *2800 ft/s*. Calcúlese la velocidad de retroceso del fusil si está suspendido libremente.

Dado que tanto el fusil m_1 como la bala m_2 están inicialmente en reposo, al momento total antes del disparo debe ser igual a cero. La cantidad de momento total no puede cambiar, por lo que debe ser también igual a cero después del disparo. Por lo tanto, la ecuación nos dice que:

$$0 = m_1V_1 + m_2V_2$$
$$m_1V_1 = -m_2V_2$$
$$V_1 = -m_2V_2 / m_1$$
$$V_1 = -(0.02\ lb/32\ ft/s^2)\ (2800\ ft/s) / (8\ lb/32\ ft/s^2) = -7\ ft/s$$

3.3 Choques elásticos e inelásticos

Durante el choque, todos los cuerpos sufren una pequeña deformación y por lo tanto se liberan pequeñas cantidades de calor. El vigor con que un cuerpo recobra su forma original después de sufrir una deformación viene a ser una medida de su *elasticidad* o restitución.

Si la energía cinética permanece constante en un choque (caso ideal), se dice que la colisión ha sido *perfectamente elástica*. Una bola de acero templado que se deja caer sobre una placa de mármol se aproxima mucho a un choque perfectamente elástico. Si los cuerpos que chocan se adhieren entre sí y se mueven como un solo cuerpo después del impacto, se dice que la colisión fue *perfectamente inelástica*. Una bala que se incrusta en un bloque de madera es un ejemplo de este tipo de impactos.

En una colisión perfectamente elástica entre dos masas m_1 y m_2, podemos decir que tanto la energía como el momento permanecen sin cambio. Por lo tanto, podemos usar dos ecuaciones:

Energía:

$$\tfrac{1}{2}\, m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2u_2^2 = \tfrac{1}{2}\, m_1V_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2V_2^2$$

Momento:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1V_1 + m_2V_2$$

Que puede simplificarse para obtener:

$$m_1\,(u_1^2 - V_1^2) = m_2\,(u_2^2 - V_2^2)$$

$$m_1\,(u_1 - V_1) = m_2\,(u_2 - V_2)$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, factorizamos los numeradores y dividimos para lograr:

$$u_1 + V_1 = u_2 + V_2$$

Es decir,

$$V_1 - V_2 = u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2)$$

Un medio de medir la elasticidad de un choque, se obtiene por la relación negativa de la velocidad relativa después del choque entre la velocidad relativa antes del mismo.

El ***Coeficiente de restitución*** *(e)* es la relación negativa de la velocidad relativa después del choque entre la velocidad relativa antes del mismo.

$$e = \frac{V_1 - V_2}{u_1 - u_2}$$

Si incorporamos el signo negativo en el numerador de esta ecuación tenemos:

$$e = \frac{V_2 - V_1}{u_1 - u_2}$$

Si la colisión es perfectamente elástica, $e = 1$. Si la es perfectamente inelástica, $e = 0$. En el caso inelástico, los dos cuerpos salen con la misma velocidad, es decir, $V_1 = V_2$. En general, el coeficiente de restitución siempre tiene un valor entre 0 y 1.

Un método simple para medir el coeficiente de restitución es el que se presenta en el siguiente ejemplo:

Una esfera del material que se va a medir se deja caer sobre una placa fija desde una altura h_1. Se mide entonces su altura de rebote h_2. En este caso, la masa de la placa es tan grande que V_2 tiende a ser igual a cero. Por tanto,

$$\boldsymbol{e = \frac{V_2 - V_1}{u_1 - u_2} = \frac{V_1}{V_2}}$$

La velocidad $\boldsymbol{u_1}$ es simplemente la velocidad final que adquiere la esfera al caer desde su altura $\boldsymbol{h_1}$, que se calcula así:

$$u_1^2 – u_0^2 = 2gh_1$$

Pero su velocidad inicial $u_0 = 0$, de tal manera que:

$$u_1^2 = 2gh_1$$

Es decir,

$$u_1 = \sqrt{2gh_1}$$

En este caso hemos considerado como positiva la dirección hacia abajo. Si la pelota rebota hasta una altura h_2, su velocidad de rebote V_1 debe ser igual a $-\sqrt{2gh_2}$ (el signo negativo indica el cambio de dirección). Así, el coeficiente de restitución se calcula:

$$e = \frac{V_1}{u_1} = -\frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}}$$

$$\boldsymbol{e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}}$$

El coeficiente resultante es una propiedad conjunta de la esfera y de la superficie de rebote.

Para una superficie muy elástica, *e* tiene un valor de 0.95 o más (acero o vidrio), mientras que para una superficie menos elástica *e* puede ser mucho menor. Es de gran interés notar que la altura del rebote es una función del vigor con el que se restablece la deformación causada por el impacto.

Ejemplos:

1. Una pelota de 2 kg que viaja hacia la izquierda a *24 m/s* choca de frente con otra pelota de *4 kg* que viaja hacia la derecha a *16 m/s*. *a)* encuéntrese la velocidad resultante si las dos pelotas se quedan pegadas después del choque. *b)* encuéntrese sus velocidades finales si el coeficiente de restitución es de *0.80*.

a) En este caso $V_2 = V_1$ y $e = 0$. Llamemos a la velocidad final V. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento nos dice que:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)\,V$$

Dado que $V_1 = V_2 = V$. Si elegimos la dirección hacia la derecha como positiva, sustituimos y obtenemos:

$$(2\ kg)\,(-\ 24\ m/s) + (4\ kg)\,(16\ m/s) = (2\ kg + 4kg)\,V$$
$$-\ 48\ kg \cdot m/s + 64\ kg \cdot m/s = (6\ kg)\,V$$
$$16\ kg \cdot m/s = (6\ kg)\,V$$

Despejamos V y nos queda:

$$V = 16/6\ m/s = 2.67\ m/s$$

El hecho de que esta velocidad resulte positiva indica que ambos cuerpos se mueven juntos hacia la derecha después del choque.

b) En este caso e no es cero, y las pelotas rebotan después del choque con velocidades diferentes. Por tanto, necesitamos más información de la que podemos obtener de la ecuación de momento por sí sola. Recurrimos al valor dado de $e = 0.80$ y a la ecuación para lograr esta información adicional.

$$e = 0.80 = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

Es decir,

$$V_2 - V_1 = (0.80)\,(u_1 - u_2)$$

Sustituimos los valores conocidos de u_1 y u_2:

$$V_2 - V_1 = (0.80)\,(-\ 24\ m/s - 16\ m/s) = (0.80)\,(-\ 40\ m/s) = -\ 32\ m/s$$

Podemos ahora usar la ecuación del momento para obtener una nueva relación entre V_2 y V_1, de tal manera que podamos resolver las dos ecuaciones simultáneamente.

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1V_1 + m_2V_2$$

El primer miembro de esta ecuación ya se valoró en la parte *a)* de este ejemplo y vale *16 kg · m/s*.
Por lo tanto, al sustituir los valores de m_1 y m_2 en la segunda parte de la ecuación, tenemos:

$$16\ kg \cdot m/s = (2\ kg)\,V_1 + (4\ kg)\,V_2$$

De la cual:

$$2V_1 + 4V_2 = 16\ m/s$$

Es decir,

$$V_1 + 2V_2 = 8\ m/s$$

Y así llegamos a nuestras 2 ecuaciones:

$$V_2 - V_1 = -32\ m/s \quad y \quad V_1 + 2V_2 = 8\ m/s$$

Que se resuelven para obtener: $V_1 = 24\ m/s$ y $V_2 = -8\ m/s$

Después de la colisión, ambas masas invierten su dirección, quedando m_1 moviéndose hacia la derecha con velocidad de *24 m/s* y m_2 hacia la izquierda con velocidad de *8 m/s*.

2. Una bala de *12 g* se dispara contra un bloque de madera de *2 kg* que cuelga de un hilo, el impacto de la bala hace que el bloque oscile hasta una altura de *10 kg* sobre su nivel original. Calcúlese la velocidad con la que la bala da en el bloque.

Podemos calcular la velocidad combinada de los cuerpos después del impacto a partir de consideraciones energéticas. La energía cinética del bloque y de la bala inmediatamente después del impacto se convierte en energía potencial a medida que se elevan hasta la altura *h*. Así, si *V* es la velocidad inicial del bloque y la bala, tenemos:

$$½ (m_1 + m_2) V^2 = (m_1 + m_2)\ gh$$

Al dividir entre $m_1 + m_2$ nos queda:

$$V^2 = 2gh$$

De la cual:

$$V = \sqrt{2gh}$$

Por lo tanto, la velocidad combinada justo después de la colisión de:

$$V = \sqrt{(2)\ (9.8\ m/s^2)\ (0.1\ m)} = 1.4\ m/s$$

La ecuación del momento queda entonces:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)\ V$$

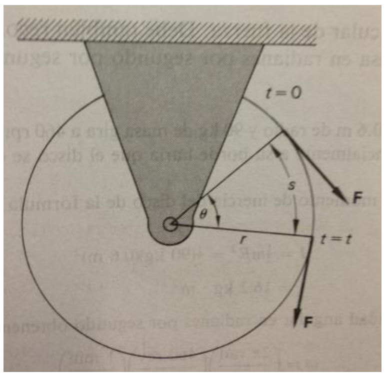
Y, dado que $u_2 = 0$

$$(0.012\ kg)\ u_1 = (0.012\ kg + 2\ kg)\ (1.4\ m/s)$$

$$0.012\ u_1 = (2.012\ kg)\ /1.4\ m/s)$$

$$u_1 = 2.82\ m/s\ /\ 0.012 = 235\ m/s$$

Los cuerpos del mundo natural suelen moverse a lo largo de trayectorias curvas, es difícil imaginar un fenómeno físico que no incluya cuando menos dos dimensiones.



3.4. Trabajo y potencia en el movimiento de rotación

Consideremos el trabajo realizado durante una rotación bajo la influencia de un momento de torsión resultante. Supongamos la fuerza ***F*** que actúa sobre el borde de la polea de radio *r*.

El efecto de dicha fuerza consiste en que la polea gira a través de un ángulo ϑ mientras que el punto de aplicación de la fuerza se mueve a una distancia *s*. El arco *s* se relaciona con el ángulo ϑ por la fórmula:

$$s = r\,\vartheta$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza ***F*** es, por definición.

$$Trabajo = F\,s = F\,r\,\vartheta$$

Pero *F r* es precisamente el momento de torsión de la fuerza, de tal manera que,

$$Trabajo = \tau\,\vartheta$$

El ángulo ϑ debe expresarse en radianes en cualquiera de los sistemas de unidades para que el trabajo resulte en joules o en pies-libras, respectivamente.

La energía mecánica se transmite por lo general en forma de trabajo rotacional, cuando hablamos de la potencia de salida que desarrollan las máquinas, lo que nos interesa es la rapidez con que se desarrolla el trabajo rotacional. Por tanto, la potencia rotacional se puede obtener dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior, entre el tiempo *t* requerida para que el momento de torsión τ lleve a cabo un desplazamiento ϑ.

$$Potencia = \frac{trabajo}{t} = \frac{\tau\,\vartheta}{t}$$

Dado que ϑ/t representa la velocidad angular media $\bar{\omega}$, podemos escribir:

$$\boxed{Potencia = \tau\,\bar{\omega}}$$

Ejemplo:

1. Una rueda de *2 ft* de radio tiene un momento de inercia de $8.2\ slug \cdot ft^2$. Una fuerza tangencial constante de *12 lb* se le aplica sobre el borde. *a)* Suponiendo que la rueda parte del reposo, ¿cuál será su aceleración angular después de *4 s*. *b)* ¿Qué caballaje medio se desarrollará?

a) Primero calcularemos el momento de torsión a partir del producto de la fuerza tangencial por el radio de la rueda.

$$\tau = F\,r = (12\ lb)\ (2\ ft) = 24\ lb \cdot ft$$

Al aplicar la segunda ley de Newton, encontramos que la aceleración angular es:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{24\ lb \cdot ft}{8.2\ slug \cdot ft^2} = 2.93\ rad/s^2$$

b) la rapidez a la que se realiza el trabajo depende del desplazamiento angular ϑ que describe la rueda en *4 s*. Este desplazamiento es:

$$\vartheta = \omega_0\,t + ½\,\alpha\,t^2$$
$$\vartheta = 0 + ½\,(2.93\ rad/s^2)\,(4\ s)^2 = 23.4\ rad$$

La potencia media es, por la ecuación:

$$Potencia = \frac{\tau\,\vartheta}{t}$$

$$P = \frac{(24\ lb \cdot ft)(23.4\ rad)}{4\ s} = \left(140\ ft - \frac{lb}{s}\right)\frac{1\ hp}{550\ ft \cdot \frac{lb}{s}} = 0.255\ hp$$

El mismo resultado puede ser obtenido determinando la velocidad angular $\bar{\omega}$ y después aplicando la ecuación:

$$Potencia = \tau\,\bar{\omega}$$

4. Sólidos y fluidos

Los líquidos y gases se denominan *fluidos* porque fluyen libremente y llenan los recipientes que los contienen. Los fluidos pueden ejercer fuerzas sobre las paredes de los recipientes que contienen estas fuerzas, al actuar sobre superficies de área definida crean una condición de *presión*.

Usos, por ejemplo:

- Una prensa hidráulica utiliza la presión del fluido para levantar cargas pesadas.
- La estructura de los depósitos de agua, las presas y los grandes tanques de petróleo se determina en gran medida por consideraciones de presión.
- El diseño de barcos, submarinos y globos meteorológicos debe tomar en cuenta la presión y densidad del fluido circundante.

4.1 Densidad

La cantidad que relaciona el peso de un cuerpo con su volumen se conoce como *peso específico. El peso específico D* de un cuerpo se define como la razón de su peso *W* a su volumen *V*. Las unidades son el *newton por metro cúbico* (N/m^3) y la *libra por pie cúbico* (lb/ft^3).

$$D = \frac{W}{V} \qquad W = DV$$

Donde:
D = peso específico
W = peso
V = volumen

Una relación más útil para la densidad toma en cuenta que la *masa* es una constante universal, independientemente de la gravedad.

La **densidad de masa ρ** de un cuerpo se define como la razón de su masa *m* a su volumen *V*.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad m = \rho V$$

Las unidades de densidad son la razón de una unidad de masa a una unidad de volumen, es decir, gramos por centímetro cúbico, kilogramos por metro cúbico o *slugs* por pie cúbico. La relación entre el peso específico y la densidad se encuentra al recordar que:

$$W = mg \qquad \text{o sea}$$

$$D = \frac{mg}{V} = \rho g$$

Tabla. Densidad y peso específico

Sustancia		ρ	
	D, lb/ft^3	g/cm^3	Kg/m^3
Sólido			
Aluminio	169	2.7	2 700
Latón	540	8.7	8 700
Cobre	555	8.89	8 890
Vidrio	162	2.6	2 600
Oro	1204	19.3	19 300
Hielo	57	0.92	920
Hierro	490	7.85	7 850
Plomo	705	11.3	11 300
Roble	51	0.81	810
Plata	654	10.5	10 500
Acero	487	7.8	7 800
Líquidos			
Alcohol	49	0.79	790
Benceno	54.7	0.88	880
Gasolina	42	0.68	680
Mercurio	850	13.6	13 600
Agua	62.4	1.0	1 000
Gases (0°C)			
Aire	0.0807	0.00129	1.29
Hidrógeno	0.0058	0.000090	0.090
Helio	0.0110	0.000178	0.178
Nitrógeno	0.0782	0.00126	1.25
Oxígeno	0.0892	0.00143	1.43

Ejemplo: un tanque cilíndrico de gasolina tiene una longitud de 3 m y un diámetro de 1.2 m, ¿cuántos kilogramos de gasolina pueden almacenarse en el tanque?

1) Encuentra el volumen: $V=\pi r^2 h = \pi (0.6m)^2 (3m) = 3.39m^3$
2) Sustituyendo el volumen y la densidad en la ecuación se obtiene:

$$m=\rho V = (680 kg/m^3)(3.39 m^3) = 2310 \text{ kg}$$

4.2 Presión

Se llama *presión* a la *fuerza normal (perpendicular) por unidad de área*. Simbólicamente, la presión *P* está dada por:

$$P = \frac{F}{A}$$

Donde:
A = área sobre la cual se aplica una fuerza perpendicular F.

La unidad de presión es la razón de cualquier unidad de fuerza a una unidad de área. Algunos ejemplos son: newtons por metro cuadrado y libras por pulgada cuadrada. En unidad de SI, a N/m^2 se le da el nombre de *pascal* (Pa). El kilopascal (KPa) es la medida más apropiada para la presión de un fluido.

$$1 \text{ kPa} = 1000 \text{ N/m}^2 = 0.145 \text{ lb/in}^2$$

Ejemplo: un zapato de golf tiene 10 tacos, cada uno con un área de 0.01 in^2 en contacto con el piso. Supón que al caminar, hay un instante en que los 10 tacos soportan el peso total de una persona de 180 lb. ¿Cuál es la presión que ejercen los tacos sobre el piso? Expresa la respuesta en unidades de SI: el área de contacto con el piso es de 0.1in^2 (10X0.01 in^2). Si se sustituye en la ecuación, se obtiene:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{180 lb}{0.1 in^2} = 1800 \text{ lb/in}^2$$

Convirtiendo al SI de unidades, se obtiene:

$$P = (1800 \text{ lb/in}^2)\left(\frac{1kPa}{0.145\ lb/in^2}\right) = 1.24 \times 10^4 \text{kPa}$$

A medida que el área del zapato en contacto con el piso disminuye, la presión aumentará. Es fácil ver por qué debe considerarse este factor al construir un piso.

4.3 Presión del fluido

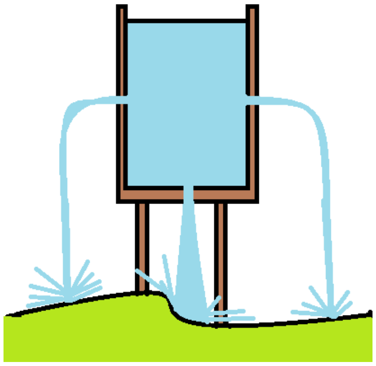


Fig. 1 Las fuerzas que un fluido ejerce sobre las paredes del recipiente que lo contiene son perpendiculares en cada punto.

La fuerza que ejerce un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene, siempre actúa perpendicularmente a dichas paredes. Los fluidos ejercen presión en todas las direcciones.

La figura 2 muestra un líquido bajo presión. Las fuerzas que actúan sobre la cara del pistón, las paredes del recipiente y sobre las superficies de un objeto suspendido en el fluido también se muestran en la figura 2. Al igual que los objetos sólidos de gran volumen ejercen grandes fuerzas sobre sus soportes, los fluidos también ejercen una presión mayor al aumentar la profundidad. El fluido que se encuentra en el fondo de un recipiente está siempre sometido a una presión mayor que en la superficie.

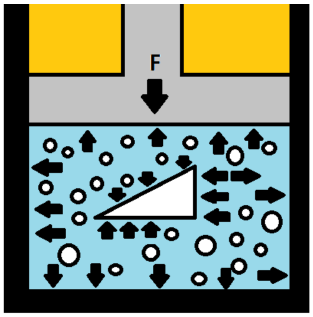


Fig. 2 Los fluidos ejercen presión en todas las direcciones y sentidos.

Esto se debe al peso del líquido que hay arriba. Debe señalarse que existe una diferencia entre la presión ejercida por los sólidos y la ejercida por los líquidos. Un objeto sólido puede ejercer solamente una fuerza *hacia abajo debido a su peso*. A cualquier profundidad en un fluido, la presión es la misma en todas las direcciones (figura 1). Si esto no fuera verdad, el fluido se derramaría bajo la influencia de una presión resultante hasta que se alcanzara la nueva condición de equilibrio.

Puesto que el peso que se encuentra por arriba es proporcional a su densidad, la presión a cualquier profundidad también corresponderá a la densidad del fluido. Esto puede observarse al considerar la columna rectangular de agua que se extiende desde la superficie hasta una profundidad *h*, como se muestra en la figura 3:

El peso de toda la columna actúa sobre el área de superficie *A* en el fondo de la columna. La ecuación para el peso de la columna es:

$$W = DV = DAh$$

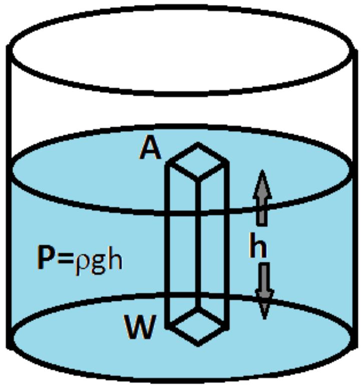


Fig. 3 La relación entre presión, densidad y profundidad.

Densidad ρ

Donde:
D = Densidad del peso del fluido
h = la presión (por unidad de área) a la profundidad será: $P = \frac{W}{A} = Dh$ o en términos de densidad de masa $P = Dh = \rho g h$

La presión de un fluido en cualquier punto es directamente proporcional a la densidad del fluido y a la profundidad por debajo de la superficie del mismo.

Ejemplo: El peso específico del agua es 62.4 lb/ft^3. La presión es 160 lb/in^2.

Para evitar una discordancia en las unidades, la presión se convierte en unidades de libras por pie cuadrado.

$$P = (160\ lb/in^2)\frac{144 in^2}{1 ft^2} = 23\ 040\ lb/ft^2$$

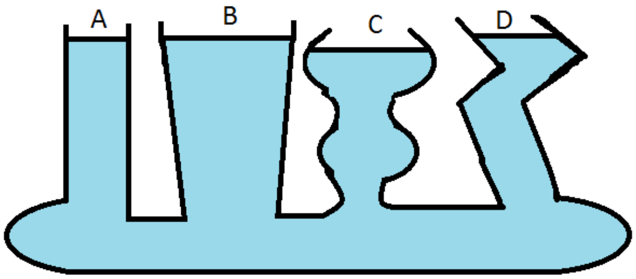


Fig. 4 El agua busca su propio nivel indicando que la presión es independiente del área o forma del recipiente que la contiene.

Considere una serie de recipientes interconectados de diferentes áreas y formas: Es de suponer que el mayor volumen de agua que hay en el recipiente B debe ejercer una presión mayor en el fondo que el líquido del recipiente *D*. El efecto de dicha diferencia en las presiones tendría que elevar el nivel en el recipiente *D*. Sin embargo, cuando se llenan los recipientes con líquido se observa que el nivel es el mismo en ambos.

Parte del problema para comprender esta paradoja se origina en la confusión de los términos *presión* y *fuerza total.* La presión se mide en términos de un área unitaria, no se considera el *área total* cuando se resuelven problemas que incluyen presión. Por ejemplo, en el recipiente *A*, el área del líquido en el fondo del mismo es mucho mayor que en el fondo del recipiente *D*. Esto significa que el líquido en el primer recipiente ejercerá una *fuerza total* mayor en el fondo que el líquido del recipiente *D.* Pero si una fuerza mayor es aplicada sobre un área más grande, la presión permanece constante en ambos recipientes.

Si los fondos de los recipientes *B, C* y *D* tienen la misma área, puede decirse que las fuerzas totales también son iguales en los fondos de estos recipientes (por supuesto que las presiones son iguales para cualquier profundidad). Puede resultar sorprendente cómo las fuerzas totales pueden ser iguales cuando los recipientes *A* y *B* contienen un volumen mayor de agua. En cada caso, el agua extra es soportada por componentes verticales de las fuerzas ejercidas por las paredes del recipiente del fluido. Cuando las paredes de un recipiente son verti-

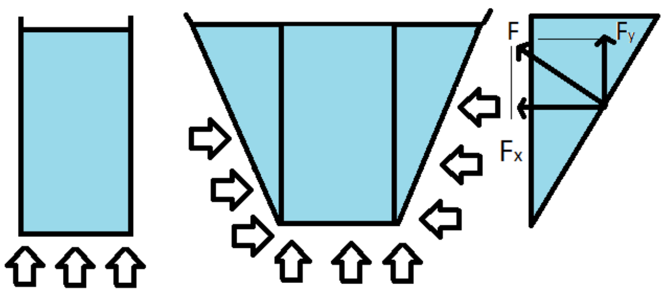


Fig. 5 La presión en el fondo de cada recipiente solo es función de la profundidad del líquido y es la misma en todas las direcciones. Ya que el área en el fondo es la misma para ambos recipientes, la fuerza total que se ejerce sobre el fondo de cada uno de ellos también es la misma.

cales, las fuerzas que actúan sobre los lados no tienen componentes hacia arriba. La fuerza total en el fondo de un recipiente es, por lo tanto, igual al peso de la columna recta de agua sobre el área de la base.

Ejemplo. Los recipientes de la figura 4 se llenan con alcohol hasta que nivel del fluido está 1 ft por arriba de la base de cada recipiente. Las áreas de las bases de los recipientes *A* y *B* son 20 y 10 in^2, respectivamente. Calcula la presión y fuerza total en la base de cada recipiente.

La presión es la misma en cualquiera de los dos recipientes y está dada por:

$$P = Dh = \left(\frac{42lb}{ft^3}\right)(a\ ft) = 42\ lb/ft^2$$

La fuerza total en cada caso es el producto de la presión por el área de la base ($F = PA$). De este modo:

$$F_A = \left(\frac{42lb}{ft^2}\right)(20in^2)\frac{1\ ft^2}{144\ in^2} = 5.83\ lb$$

$$F_B = \left(\frac{42lb}{ft^2}\right)(10in^2)\frac{1\ ft^2}{144\ in^2} = 2.92\ lb$$

Antes de considerar otras aplicaciones de la presión de los fluidos, se resumirán los principios estudiados en esta sección para fluidos en reposo:

1. Las fuerzas ejercidas por un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene son siempre perpendiculares a las mismas.
2. La presión del fluido es directamente proporcional a su profundidad y densidad.
3. A cualquier profundidad, la presión del fluido es la misma en todas las direcciones.
4. La presión del fluido es independiente de la forma o área del recipiente que lo contiene.

4.4 Medición de la presión

Cualquier líquido en un recipiente abierto, por ejemplo, es afectado por la presión atmosférica además de la presión originada por su propio peso. El líquido es relativamente incompresible, la presión externa de la atmósfera se transmite en igual medida a través de todo el volumen del líquido. Este hecho se llama *ley de Pascal:*

Una presión externa aplicada a un fluido confinado se transmite uniformemente a través del volumen del fluido.

La mayor parte de los dispositivos que miden la presión directamente, miden en realidad, la diferencia entre la *presión absoluta* y la *presión atmosférica*. El resultado se llama *presión manométrica.*

Presión absoluta = presión manométrica + presión atmosférica

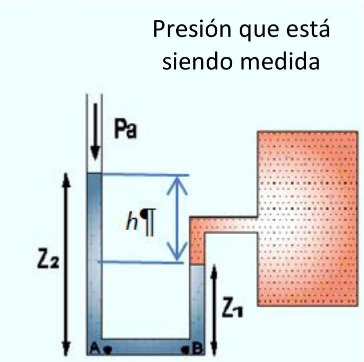


Fig. 6 Manómetro de tubo abierto. La presión se mide mediante la altura *h* de la columna de mercurio. Imagen recuperada de: http://www.unet.edu.ve/~fenomeno/F_DE_T-47.htm

Al nivel del mar, la presión atmosférica es 101.3 KPa, o 14.7 lb/in^2. Debido a que la presión atmosférica es utilizada en muchos cálculos, con frecuencia se usa la unidad de presión atmosférica (atm), definida como la presión media que la atmósfera ejerce a nivel del mar, o sea, 14.7 lb/in^2.

Un dispositivo común para medir la presión manométrica es el *manómetro* de tubo abierto (figura 6). El manómetro consiste en un tubo en U que contiene un líquido, por lo general, mercurio. Cuando ambos extremos del tubo están abiertos, el mercurio busca su propio nivel ya que en ambos extremos del tubo hay una presión de 1 atm.

Cuando uno de los extremos se conecta a una cámara presurizada, el mercurio se elevará en el extremo abierto hasta que las presiones se igualen. La diferencia entre los dos niveles de mercurio es una medida de la presión manométrica, es decir, la diferencia entre la presión absoluta en la cámara y la presión atmosférica en el extremo abierto. Es tan común el empleo del manómetro en trabajos de laboratorio, que las presiones atmosféricas se expresan en *centímetros de mercurio,* o bien en *pulgadas de mercurio.*

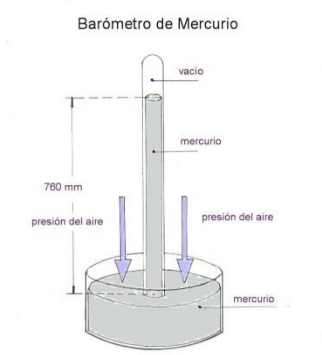


Fig. 7 Barómetro imagen recuperada de: http://www.urbipedia.org/index.php?title=Archivo:Bar%C3%B3metro_de_mercurio.jpg

Medidas equivalentes a la presión atmosférica:

1 atm =101.3 kPa =14.7 lb/in^2 =76 cm de mercurio = 30 in de mercurio =2116 lb/ft^2

Ejemplo. El manómetro de mercurio se utiliza para medir la presión de un gas dentro de un tanque (Figura 6). Si la diferencia entre los niveles de mercurio es de 36 cm, ¿cuál es la presión absoluta dentro del tanque?

La presión manométrica es de 36 cm de mercurio y la presión atmosférica de 76 cm de mercurio. En este caso, la presión absoluta se encuentra a partir de la ecuación: *Presión absoluta* = 36 cm + 76cm = 112 cm de mercurio.

La presión en el tanque es equivalente a la presión que debe ejercerse por una columna de mercurio de 112 cm de altura.

$$P = Dh = \rho g h$$
$$=(43\,600\ kg/m^3)(9.8\ m/s^2)(1.12\ m)$$
$$= 1.49 \times 10^5\ N/m^2 = 149\ kPa$$

Se debe verificar que esta presión absoluta es también 21.6 lb/in^2, o sea, 1.47 atm.

5. El principio de Arquímedes

Un objeto está completa o parcialmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza de abajo hacia arriba (empuje) igual al peso del fluido desalojado.

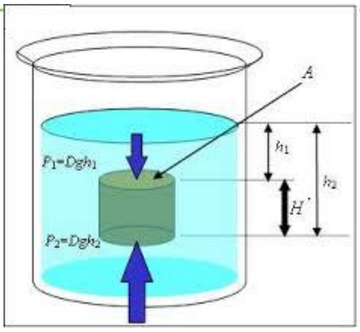


Fig. 8 El empuje que se ejerce sobre el disco es igual al peso del fluido que desaloja. Imagen recuperada de: http://www.educarchile.cl/UserFi-les/P0001/Image/Mod_3_conteni-

El principio de Arquímedes se puede demostrar al estudiar las fuerzas que un fluido ejerce sobre un objeto suspendido. Considérese un disco de área *A* y altura *H* el cual está completamente sumergido en un fluido. Recuérdese que la presión a cualquier profundidad *h* en un fluido está dada por:

$$P = \rho g h$$

Donde:
P = densidad de masa del fluido
g = aceleración de la gravedad

Si se desea representar la presión absoluta dentro del fluido, se debe sumar la presión externa ejercida por la atmósfera. La presión total hacia abajo P_1 en la cara superior del disco, por lo tanto:

$$P_1 = P_a + \rho g h_1 \text{ hacia abajo}$$

Donde:
P_a = presión atmosférica
h_1 = profundidad superior del disco

Análogamente la presión total hacia arriba P_2 sobre el fondo del disco:

$$P_2 = P_a + \rho g h_2 \text{ hacia arriba}$$

Donde:
h_2 = profundidad inferior del disco

Puesto que h_2 es mayor que h_1, la presión sobre la base del disco excederá la presión sobre la cara superior, y el resultado será una fuerza neta hacia arriba. Si la fuerza hacia abajo se representa por F_1 y la fuerza hacia arriba por F_2 puede escribirse:

$$F_1 = P_1 A \qquad F_2 = P_2 A$$

La fuerza hacia arriba ejercida por el fluido sobre el disco se llama *empuje* y se expresa mediante:

$$F_B = F_2 - F_1 = A(P_2 - P_1)$$

$$= A(P_a + \rho g h_2 - P_a - \rho g h_1)$$

$$= A\rho g(h_2 - h_1)A\rho g H$$

Donde:
$H = h_1 - h_2$ es la altura del disco

Finalmente, si se recuerda que el volumen del disco es $V = AH$ se obtiene el siguiente resultado importante:

$$F_B = V_{\rho g} = mg$$

Empuje = peso del fluido desalojado

El cual es el principio de Arquímedes.

Ejemplo. Un flotador de corcho tiene un volumen de 2 ft^3 y una densidad de 15 lb/ft^2

a) ¿Qué volumen del corcho está por debajo de la superficie cuando el corcho flota en el agua?
b) ¿Qué fuerza hacia abajo es necesaria para sumergir el corcho completamente?

Solución a) El corcho desalojará un volumen igual a su propio peso, el cual es:

$$W = DV = (15\ lb/ft^3)(2ft^3 = 30\ lb)$$

Puesto que el agua tien un peso específico de 62.4 lb/ft^3, el volumen del agua desalojado es:

$$V = \frac{W}{D} = \frac{30\ lb}{62.4\ lb/ft^3} = 0.481\ ft^3$$

Por tanto, el volumen del corcho debajo del nivel del agua es también $0.481\ ft^3$

Solución b) A fin de sumergir el corcho, debe aplicarse una fuerza *F* es, por lo tanto, W del corcho de tal manera que su suma sea igual F_B simbólicamente:

$$F + W = F_B$$

La fuerza necesaria *F* es, por lo tanto, igual a la diferencia entre el empuje y el peso del corcho.

$$F = F_B - W$$

En este caso, el empuje puede encontrarse al calcular el peso de 2 ft^3 de agua (la cantidad de agua desalojada cuando el corcho está completamente sumergido). Se obtiene así:

$$F_B = DV = (62.4\ lb/ft^3)(2ft^3) = 124.8\ lb$$

La fuerza *F* necesaria para sumergir el corcho es:

$$F = 124.8\ kv - 30\ lb = 94.8\ lb$$

6. Fluidos en movimiento

6.1 Ecuación de Bernoulli

En el estudio de los fluidos, se revisan cuatro conceptos: la presión *P,* la densidad ρ, la velocidad *v* y la altura *h* por arriba de algún nivel de referencia. La relación entre estas cantidades y su capacidad para describir el movimiento fue establecida por Bernoulli:

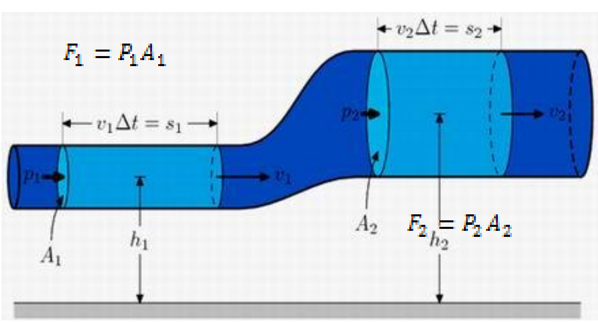


Fig. 9 Deducción de la ecuación de Bernoulli. Imagen recuperada de: http://alexmonrzg.files.wordpress.com/2010/02/le3.jpg

Como el fluido tiene masa, debe obedecer las mismas leyes de conservación establecidas para los sólidos. En consecuencia, el trabajo necesario para mover cierto volumen de fluido a través de un tubo debe ser igual al cambio total en energía cinética y potencial. Para mover un fluido de un punto *a* a uno *b* en la figura 9. El trabajo neto realizado por la fuerza de entrada F_1 y el trabajo negativo efectuado por la fuerza de resistencia F_2.

$$\text{Trabajo neto} = F_1s_1 - F_2s_2$$

Pero $F_1 = P_1A_1$ y $F_2 = P_2A_2$ así que:

Trabajo neto = $P_1A_1s_1 - P_2A_2s_2$

El producto del área por la distancia representa el volumen *V* del fluido movido a través del tubo. Puesto que este volumen es el mismo en la parte inferior y en la parte superior del tubo, puede sustituirse:

$$V = A_1s_1 = A_2s_2$$

Obteniéndose:

Trabajo neto = $P_1V - P_2V = (P_1 - P_2)V$

La energía cinética E_k de un fluido se define como $\frac{1}{2}mv^2$

Donde:
m = masa del fluido
V = velocidad

Ya que la masa permanece constante, un cambio en la energía cinética ΔE_k es el resultado solamente de la diferencia de la velocidad del fluido. En el ejemplo, el cambio en energía es cinético:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

La energía potencial del fluido a una altura *h* por arriba de un punto de referencia se define como mgh

Donde:
mg = peso del fluido
El volumen del fluido desplazado a lo largo del tubo es constante. De esta manera, el cambio en la energía potencial ΔE_p resulta del incremento en altura del fluido de h_1 a h_2.

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1$$

Ya se está en condiciones de aplicar el principio de la conservación de la energía. El trabajo neto realizado sobre el sistema debe ser igual a la suma de los incrementos de energía cinética y potencial. De modo que:

Trabajo neto $= \Delta E_k + \Delta E_p$

$$(P_1 - P_2)V = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + (mgh_2 - mgh_1)$$

Si la densidad del fluido es ρ, puede sustituirse por $V = m/\rho$ dando:

$$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_2 - mgh_1$$

Si se multiplica por ρ/m y se reordena, se obtiene la ecuación de Bernoulli.

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Puesto que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos cualesquiera, la ecuación de Bernoulli puede establecerse en forma más simple como:

$$P = \rho g h + \frac{1}{2} p v^2 = constante$$

La ecuación de Bernoulli tiene aplicación en casi cualquier aspecto relacionado con el flujo de fluidos. La presión *P* debe reconocerse como la presión *absoluta* y no como la presión *manométrica.* Recuérdese que ρ es la densidad *de masa* y no el peso específico del fluido.

Adviértase que las unidades de cada uno de los términos en la ecuación de Bernoulli son unidades de presión.