Introducción

El estudio de vectores comenzó con el trabajo del gran matemático irlandés sir William Hamilton (1805–1865). Aunque en su época se consideró que los vectores no tenían ninguna utilidad, en la actualidad se usan cada vez más frecuentemente en física clásica y moderna y aun en las ciencias biológicas y sociales[1].

En la unidad 1 se manejó a los vectores como un conjunto ordenado o *n – ada* de números reales, y como matrices de orden $1\times n$, ejemplos de ellos son los puntos del plano cartesiano R^2 y del espacio R^3.

Para muchas aplicaciones físicas (incluyendo nociones de fuerza, velocidad, aceleración y momento) es importante pensar en el vector no como un punto sino como una entidad que tiene "longitud" y "dirección".. Es decir, vamos a representar los vectores (x,y) de R^2 como una flecha que parte del origen y que termina en el punto (x,y).

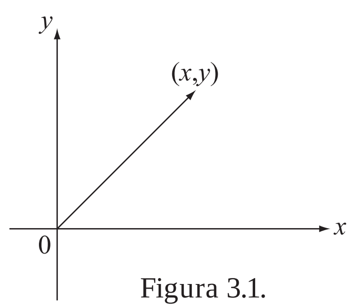

Figura 3.1.

A lo largo de esta unidad definiremos espacios vectoriales cuyos elementos no sean "flechas" sino objetos más abstractos; sin embargo, siempre regresaremos a R^2 como ejemplo con el fin de "visualizar" los conceptos, propiedades o resultados.

3.1. Definición de espacio vectorial

La notación de los vectores será con letras minúsculas en negritas y la de los escalares reales con letras minúsculas.

La siguiente definición nos permite tener una generalización de espacios vectoriales donde los objetos no necesariamente son n–eadas de puntos de R^n.

[1]Véase el libro de Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

Definición 3.1. Sea V un conjunto de objetos, junto con dos operaciones llamadas **suma** y **multiplicación por un escalar**. Entonces V se llama **espacio vectorial real** si se satisfacen los siguientes axiomas:

i) Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$ entonces la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$.
(Cerradura bajo la suma.)

ii) Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.
(Ley asociativa de la suma.)

iii) Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + 0 = 0 + \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
(El 0 se llama vector cero o idéntico aditivo.)

iv) Si $\mathbf{x} \in V$ existe un vector $-\mathbf{x}$ en V tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$
($-\mathbf{x}$ se llama inverso aditivo de $\mathbf{x}$.)

v) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
(Ley conmutativa de la suma de vectores.)

vi) Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\,\mathbf{x} \in V$.
(Cerradura bajo la multiplicación por un escalar.)

vii) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
(Primera ley distributiva.)

viii) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
(Segunda ley distributiva.)

ix) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\,\beta)\mathbf{x}$
(Ley asociativa de la multiplicación por escalares.)

x) Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

3.2. Ejemplos de espacios vectoriales

Vamos a considerar en este apartado diversas clases de ejemplos de conjuntos que son espacios vectoriales y otros que no lo son:

1. Consideremos los vectores en el plano cartesiano R^2. Vamos a probar que R^2 es un espacio vectorial:

Tomando los vectores $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, entonces definimos la suma de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in R^2$ y por lo tanto satisface *i*). Los puntos *ii*) hasta el *x*) se obtienen de la definición de suma de matrices, ya que los puntos de R^2 se consideran matrices de $1{\times}2$. Podemos generalizar este resultado a las *n–adas* reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de R^n.

2. Sea $V = \{0\}$. Es decir, V consiste sólo del número 0. Vamos a demostrar que V es un espacio vectorial que recibe el nombre de **espacio vectorial trivial**.

i) Como $0 + 0 = 0 \in V$
ii) $(0 + 0) + 0 = 0 = 0 + (0 + 0)$
iii) $0 + 0 = 0$
iv) $0 + (-0) = 0$
v) $0 + 0 = 0 + 0$
vi) $\alpha 0 = 0 \in V$
vii) $\alpha(0 + 0) = 0 = \alpha 0 + \alpha 0$
viii) $(\alpha + \beta)0 = 0 = \alpha 0 + \beta 0$
ix) $\alpha(\beta 0) = \alpha 0 = 0 = (\alpha\beta)0$
x) $1(0) = 0$

Por lo tanto, V es un espacio vectorial.

3. Sea $V = \{1\}$. Tal que los elementos de V pertenecen a los naturales.

Este *no* es un espacio vectorial ya que $1 + 1 = 2 \notin V$, es decir *no es cerrado bajo la suma*.

4. El conjunto de puntos de R^2 que están en una recta que pasa por el origen.

Sea $V = \{(x,y) \in R^2$, tales que $y = mx$, donde m es un número real fijo$\}$.

Sean $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ en V. Entonces $y_1 = mx_1$ y $y_2 = mx_2$ y podemos escribir a $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ como sigue: $\mathbf{x} = (x_1, mx_1)$ y $\mathbf{y} = (x_2, mx_2)$

i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, mx_1) + (x_2, mx_2) = (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2)$; si factorizamos el segundo término obtenemos $mx_1 + mx_2 = m(x_1 + x_2)$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + x_2, m[x_1 + x_2])$ que es un elemento de V.
iv) Supón que $\mathbf{x} = (x, y)$ está en V, entonces $y = mx$. Definimos $-\mathbf{x} = (-x, -y)$ de donde obtenemos que $-y = -(mx) = m(-x)$. Por lo tanto $-\mathbf{x}$ está en V.

De igual manera se prueban todas las demás propiedades ya que R^2 es un espacio vectorial.

5. El conjunto de puntos de R^2 que están en una recta que no pasa por el origen no es un espacio vectorial.

Sea $V = \{(x,y) \in R^2$, tales que $y = mx + b$, donde m y b son números reales fijos$\}$.

Si $\boldsymbol{x} = (x_1, y_1)$ y $\boldsymbol{y} = (x_2, y_2)$ en V, entonces $y_1 = mx_1 + b$ y $y_2 = mx_2 + b$, de donde $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, mx_1 + b) + (x_2, mx_2 + b) = (x_1 + x_2, mx_1 + b + mx_2 + b)$, pero $mx_1 + b + mx_2 + b = m(x_1 + x_2) + 2b$, y por lo tanto este elemento *no está en V, es decir V no es cerrado bajo la suma*.

6. Sea $M_{m\times n}$ el conjunto de matrices de $m\times n$ con entradas en R.

Por las propiedades de las matrices de suma y producto por un escalar es claro que el conjunto $M_{m\times n}$ es un espacio vectorial.

7. El conjunto P_n, formado por polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual a n.

Si $\boldsymbol{p} \in P_n$, entonces $\boldsymbol{p} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ donde todas las a_i son reales.

Si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q} \in P_n$, donde $\boldsymbol{q} = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ entonces, $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (a_n + b_n)x_n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, x^{n-1} + \ldots\, (a_{1\,+}\, b_1)\, x + (a_0 + b_0) \in P_n$.

Las propiedades *ii*) y *v*) a *x*) son consecuencia de la suma y producto de polinomios.

iii) Definimos el polinomio $0 = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0 \in P_n$
iv) Definimos el polinomio $-\boldsymbol{p} = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0 \in P_n$

Por lo que podemos concluir que P_n es un espacio vectorial.

8. Sea C [0,1] el conjunto de todas las funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo [0,1].

Si f y $g \in C$ [0,1] definimos $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$.
Como la suma de funciones continuas es continua, el axioma *i*) se cumple; los otros axiomas se cumplen si definimos las funciones cero como $0(x) = 0$; y $(-f)(x) = -[f(x)]$. Por lo que C [0,1] es un espacio vectorial.

9. Sea H el conjunto de las matrices de 2×2 de la forma $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde $\alpha \neq 0$.

Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos que $A, B \neq 0$ y sin embargo $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como la matriz cero $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no está en H, podemos asegurar que H no es un espacio vectorial.

10. Sea F el conjunto de matrices de $2{\times}2$ definida como $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y sean α y β escalares. Hagamos un primer caso, en el cual tenemos una matriz $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de la cual α=5 y sea β =2, tenemos que al efectuar el producto del escalar por la matriz se tiene que: $(2)\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, esta matriz es un espacio vectorial de F, ya que se define para cualquier matriz de 2×2.

Un segundo caso es que tenemos una matriz de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y β=6 un escalar, que al efectuar el producto del escalar por la matriz tenemos: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que es la matriz cero, que también es un espacio vectorial de F.

Un tercer caso es que se tiene la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y un escalar α=0, de igual manera al efectuar el producto de este escalar por la matriz tenemos $(0)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de lo que se observa que se obtiene la matriz cero, que es un espacio vectorial de F.

De los ejemplos anteriores se puede ver demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Sea V un espacio vectorial. Entonces:

i) $\alpha\, 0 = 0$ para todo escalar α
ii) $0\, \mathbf{x} = 0$ para todo $\mathbf{x}$ en V
iii) Si $\alpha\mathbf{x} = 0$, entonces $\alpha = 0$ o $\mathbf{x} = 0$ (o ambos)
iv) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ en V.

Ejercicio 1

Menciona si los siguientes conjuntos son o no espacios vectoriales. En caso de no serlo menciona cuál de las propiedades es la que no se cumple:

1. El conjunto de puntos de R^2 de la forma $\{(x,y) \in R^2$, tales que $y = -3x\}$

2. El conjunto de puntos de R^2 de la forma $\{(x,y) \in R^2$, tales que $y = -3x + 2\}$

3. Los puntos de R^2 que se encuentran en el primer cuadrante, es decir $\{(x,y) \in R^2$, tales que $x \geq 0$, $y \geq 0\}$.

4. El conjunto de matrices de orden 2×2 que tienen la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, a, b escalares.

5. R^2 con la suma definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$, y la multiplicación por escalar ordinaria.

6. El conjunto de vectores (x, y, z) en R^3 donde $2x - y - 12z = 0$.

3.3. Subespacios vectoriales

En la sección anterior se vio que tanto R^2 como un subconjunto de R^2 son espacios vectoriales, como ejemplo sea $V = \{(x, y)$ tales que $y = mx\}$; ve los ejemplos 1 y 4 sección 3.2. Es evidente que $V \in R^2$, y por lo tanto el espacio vectorial R^2 tiene un subconjunto que también es espacio vectorial.

Definición 3.2. Sea H un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V.

Entonces H se llama **subespacio vectorial** de V si H es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en V.

Se puede decir que un subespacio vectorial H hereda las operaciones del espacio vectorial V. De donde se desprende el siguiente teorema:

Teorema 3.2. Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio vectorial de V si se cumplen las propiedades de cerradura:

*i***)** Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.
*ii***)** Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para todo escalar α**.**

Notas:

1. Este teorema nos dice que basta probar que la suma de elementos de H y el producto por un escalar están en H para que H sea un subespacio vectorial.

2. Se encuentra contemplado en el resultado anterior que "Todo subespacio de un espacio vectorial contiene a 0".

Ejemplo 1

a) Para cualquier espacio vectorial V, el subconjunto $H = \{0\}$ es un subespacio vectorial llamado **subespacio trivial**.

i) $0 + 0 = 0 \quad H$
ii) $\alpha 0 = 0 \quad H$

Por lo tanto $H = \{0\}$ es subespacio vectorial de V.

b) Sea V cualquier espacio vectorial, entonces V es un subespacio de sí mismo.

c) Sea $H = \{(x, y, z) \in R^3$ tales que $x = at, y = bt, z = ct\}$, entonces H es un subconjunto de R^3.

i) Sean $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{y} = (x_2, y_2, z_2) \in H$, entonces

$x_1 = at_1, \quad y_1 = bt_1, \quad z_1 = ct_1 \quad$ y $\quad x_2 = at_2, y_2 = bt_2, z_2 = ct_2$

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, de donde tenemos que:

$x_1 + x_2 = at_1 + at_2 = a(t_1 + t_2)$

$y_1 + y_2 = bt_1 + bt_2 = b(t_1 + t_2)$

$z_1 + z_2 = ct_1 + ct_2 = c(t_1 + t_2)$ y por lo tanto $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$

ii) Sea $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1) \in H$ y α un escalar, entonces $x_1 = at_1, y_1 = bt_1, z_1 = ct_1$

$\alpha\mathbf{x} = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ de donde tenemos que:

$\alpha x_1 = \alpha(at_1) = a(\alpha t_1); \quad \alpha y_1 = \alpha(bt_1) = b(\alpha t_1); \quad \alpha z_1 = \alpha(ct_1) = c(\alpha t_1)$

y por tanto, $\alpha\mathbf{x} \in H$

iii) $0 = (0, 0, 0) \in H$ ya que $0 = 0t$.

Por lo tanto podemos asegurar que H es un subespacio vectorial de R^3.

d) Consideremos el espacio vectorial $M_{n\times n}$ y sea $H = \{A \in M_{n\times n}\ A$ es invertible$\}$.

(Recordemos que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero).

Consideremos la matriz cero de $M_{n\times n}$, como su determinante es cero no es invertible, por lo tanto la matriz cero no está en H y en consecuencia H no es subespacio vectorial de $M_{n\times n}$

e) Sea $H = \{(x, y, z) \in R^3$ tales que $z = 1\}$ es un subconjunto de R^3.

i) Sean $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{y} = (x_2, y_2, z_2) \in H$, entonces $z_1 = z_2 = 1$

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ de donde tenemos que:

$z_1 + z_2 = 1 + 1 = 2$ y por lo tanto, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \notin H$ y H no es subespacio vectorial.

El siguiente teorema nos dice que podemos intersectar espacios vectoriales para obtener otros subespacios vectoriales.

Teorema 3.3. Si H_1 y H_2 son subespacios vectoriales de V.

Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo 2

Sean $H_1 = \{(x, y) \in R^2$, tales que $2x - y = 0\}$ y

$H_2 = \{(x, y) \in R^2$, tales que $x + 2y = 0\}$ subespacios vectoriales de R^2

entonces, por el teorema anterior

$H_1 \cap H_2 = \{(x, y) \in R^2$, tales que $2x - y = 0$ y $x + 2y = 0\}$ es un subespacio vectorial de R^2, por lo tanto $H_1 \cap H_2 = \{(0,0)\}$ es subespacio vectorial.