Introducción

En la unidad anterior analizamos el concepto de ángulo entre dos vectores; en el plano cartesiano R^2 es frecuente encontrar vectores cuyo ángulo es de 90°, estos vectores, se dice, son perpendiculares u ortogonales. En esta unidad vamos a generalizar el concepto de ortogonalidad a espacios vectoriales cualesquiera.

Se analizó también el concepto de vectores unitarios; al unir ambos conceptos obtendremos el concepto de vectores ortonormales. Ahora veremos las propiedades de estos vectores y las ventajas de trabajar con una base cuyos vectores son ortonormales, así como un procedimiento mediante el cual se pueden construir dichas bases.

6.1. Definición de conjunto de vectores ortogonales. Bases ortogonales

Conocemos a R^2 como el concepto de vectores cuyo ángulo es de 90°. Ahora generalizaremos este resultado con la definición 6.1.

Definición 6.1. Sea V un espacio vectorial con producto interno y **u**, **v** vectores de V. Se dice que **u** y **v** son **ortogonales** si su producto interno es cero, es decir

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

Comprobaremos que la definición anterior es equivalente en R^2 al tener un ángulo de 90° o de 270°. De ser comprobable la tomaremos como definición general y analizaremos su significado y las propiedades que tienen en otros espacios vectoriales.

Ejemplo 1

a) Consideremos los vectores $\mathbf{u} = (2, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 3)$ en R^2

Recordemos la definición de vectores ortogonales: son aquellos que tienen entre ellos un ángulo de 90° o de 270° ($\pi/2$ o $3\pi/2$). (Definición 5.8)

Vamos a encontrar el ángulo entre **u** y **v**.

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{(2,\ 0)\ (0,\ 3)}{\sqrt{2^2+0^2}\sqrt{0^2+3^2}} = \frac{0}{(2)(3)} = \frac{0}{6} = 0 \text{ por tanto } \varphi = \cos^{-1} 0 =$$
90° o 270°

Entonces **u** y **v** son ortogonales. Observemos que el producto interno de **u** y **v** es cero.

Podemos concluir que estas dos definiciones son equivalentes.

b)Consideremos ahora el espacio vectorial C[0, 2π].

Sean $f(t)$ = sen t y $g(t)$ = cos t en C[0, 2π].

Entonces $(f,\ g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\ t)^2 \Big|_0^{2\pi} = 0$ por lo tanto podemos asegurar que f y g son ortogonales.

c) Sea D_2 el espacio vectorial de las matrices diagonales de orden 2×2 con el producto interno definido como la suma de los productos de los elementos de la diagonal principal. $(A, B)=a_{11}b_{11}+a_{22}b_{22}$ (véase unidad 5, sección 5.3 ejemplo 10a).

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vamos a probar que son ortogonales:

(A, B) = (1)(–2) + (2)(1) = –2 + 2 = 0 y por tanto son ortogonales.

Basados en lo anterior, podemos tener un conjunto de vectores que sean ortogonales, pero, ¿tendrán propiedades especiales?

Consideremos la definición 6.2.

Definición 6.2. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores de V, entonces es un **conjunto ortogonal** si satisface que

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \text{ para } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$$

Es decir, cuando cada uno de los vectores del conjunto es ortogonal a los demás elementos.

Daremos algunos ejemplos de conjuntos ortogonales, especialmente en R^2 y R^3.

Ejemplo 2

a) Considera los vectores de R^3 $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.

A continuación probaremos que forman un conjunto ortogonal:

$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$

$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}) = (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) = 0$

$(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = (0)(0) + (1)(0) + (0)(1) = 0$

de donde forman un conjunto ortogonal.

Sea D_3 el espacio vectorial de las matrices diagonales de 3×3,

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Probaremos que forman un conjunto ortogonal en D_3.

$(A, B) = (1)(0) + (0)(5) + (0)(0) = 0$
$(A, C) = (1)(0) + (0)(0) + (0)(-3) = 0$
$(B, C) = (0)(0) + (5)(0) + (0)(-3) = 0$

Así concluimos que forman un conjunto ortogonal.

Considerando el espacio euclideano R^2, si dos vectores ortogonales tienen entre ellos un ángulo de 90° o de 270°, ¿serán linealmente independientes? Recordemos que en R^2 para que dos vectores fueran *linealmente dependientes*, uno tenía que ser múltiplo del otro, y por tanto el ángulo que formarían entre ellos sería de 0° o 180°. Esto nos lleva a enunciar que dos vectores en R^2 ortogonales, deben ser *linealmente independientes.* ¿Sucederá esto con cualquier espacio vectorial? Veamos el teorema 6.1.

Teorema 6.1. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ un conjunto finito de vectores ortogonales en V. Entonces S es un conjunto **linealmente independiente**.

Daremos un ejemplo de este teorema en un espacio vectorial diferente de R^2.

Ejemplo 3

Consideremos el espacio vectorial D_3 de las matrices diagonales de 3×3. Retomando las matrices A, B, C del ejemplo 2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya comprobamos en este ejemplo que el conjunto de las matrices $\{A, B, C\}$ es ortogonal, ahora vamos a probar que son linealmente independientes.

Tomemos una combinación lineal de ellas igual a cero:

$$c_1A + c_2B + c_3C = 0$$

$$c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

entonces $\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donde $c_1 = 0$; $5c_2 = 0$; $-3c_3 = 0$; por tanto, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ siendo el conjunto linealmente independiente.

Lo que nos lleva a considerar un conjunto como base ortogonal sólo con pedirle que genere al espacio vectorial.

Definición 6.3. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Sea B un conjunto ortogonal de vectores en V. Entonces B es una **base ortogonal** de V si V = gen B

Consideremos como ejemplo la base canónica de R^2.

Ejemplo 4

(Ver unidad 4, sección 4.3, ejemplo 2a.)

Sea $B = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$, con $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ la base canónica de R^2

Probaremos que es un conjunto ortogonal:

$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = (1)(0) + (0)(1) = 0$; entonces B es un conjunto ortogonal pero como B genera a R^2, entonces podemos asegurar que B es una base ortogonal para R^2.

Vamos ahora a unir el teorema 4.6 (cualesquiera n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión n forman una base para el espacio), con el teorema 6.1 para obtener un resultado que nos indica que cualquier espacio vectorial finito tiene una base ortogonal.

Teorema 6.2 Sea V un espacio vectorial finito de dimensión n. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ un conjunto ortogonal de n vectores, entonces B es una base ortogonal de V.

Este teorema nos da una condición para tener una base ortogonal de un espacio vectorial de dimensión finita. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5

Consideremos el espacio vectorial D_2 de las matrices diagonales de orden 2×2.

Vamos a probar que la dimensión de D_2 es 2. Sea A una matriz de D_2, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ entonces A se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

por tanto el conjunto formado por $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ genera a D_2, lo que nos indica que la dimensión de D_2 es 2.

En el ejemplo 1c) se probó que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son ortogonales, y como son dos forman una base ortogonal para D_2.

Ejercicio 1

1. Determina si los siguientes pares de vectores de R^3 son ortogonales o no:

a) $\mathbf{u} = (3, 2, -4)$, $\mathbf{v} = (2, -3, 4)$
b) $\mathbf{u} = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, -1)$
c) $\mathbf{u} = (-2/3, 1/2, 1)$, $\mathbf{v} = (1/2, 2/3, 0)$
d) $\mathbf{u} = (0, -5, 0)$, $\mathbf{v} = (4, 1, 0)$

2. Encuentra los vectores en R^2 que sean ortogonales a cada uno de los siguientes vectores:

a) $\mathbf{u} = (2, -3)$
b) $\mathbf{v} = (-3, 4)$
c) $\mathbf{w} = (2, 3)$

3. Determina si los siguientes conjuntos son ortogonales o no:

a) $\{(3, -1), (-1, -3), (1, 0)\}$
b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

4. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base ortogonal para R^3.
b) $\{(1, 1, 1), (2, 2, 2); (0, 0, 0)\}$ es una base ortogonal para R^3.
c) Todo conjunto linealmente independiente es ortogonal.
d) Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente.
e) Si V es un espacio vectorial de dimensión n, un conjunto ortogonal de m vectores es una base para V.

6.2. Definición de conjunto de vectores ortonormal. Bases ortonormales

En la sección anterior determinamos cómo obtener un conjunto ortogonal de vectores. En la unidad 5 analizamos vectores cuya norma era 1, es decir, vectores unitarios que tienen importantes propiedades además de un manejo más fácil.

En esta sección nos ocuparemos de las bases ortonormales, es decir, de conjuntos de vectores ortogonales con norma 1.

Consideremos la definición 6.4 (que es una ampliación de la definición 6.1).

Definición 6.4. Sea V un espacio vectorial con producto interno y **u**, **v** dos vectores de V, entonces, **u** y **v** son **vectores ortonormales** si son ortogonales y su norma es 1, es decir, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ y además $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 1$

Vamos a dar un ejemplo de esta definición en R^2 y en D_3.

Ejemplo 6

a) Consideremos en R^2 los vectores $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{j} = (0, 1)$, veremos si son ortonormales.

$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = (1)(0) + (0)(1) = 0$, por tanto son ortogonales;

$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ y $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, son unitarios

De ambos resultados decimos que $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ son ortonormales.

b) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en D_3; veremos si son ortonormales.

$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$ y son ortogonales;

$$\|A\| = \sqrt{(A, A)} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \quad \text{y} \quad \|B\| = \sqrt{(B, B)} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

de donde son unitarias.

Uniendo ambos resultados tenemos que *A* y *B* son ortonormales.

Del mismo modo que en la sección anterior, podemos tener un conjunto de vectores ortonormales. Consideremos la definición 6.5.

Definición 6.5. Sea *V* un espacio vectorial con producto interno y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores de *V*; entonces *S* es un **conjunto ortonormal** si es un conjunto ortogonal y todos los vectores de *S* son unitarios. Es decir, $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ si $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$ y además $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ para $\boldsymbol{i} = 1, 2, ...n$

Vamos a dar un ejemplo en R^3 en el cual se encuentra la definición 6.5 de un conjunto ortonormal.

Ejemplo 7

Consideremos en R^3 el conjunto de vectores $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$; $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$; $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.

Veamos si el conjunto $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$es ortonormal.

En el ejemplo 2a) probamos que el conjunto $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ es un conjunto ortogonal, por lo que nos faltaría probar que todos son vectores unitarios.
Consideremos las normas de cada uno de ellos:

$$\|\boldsymbol{i}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1, \; \|\boldsymbol{j}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1, \; \|\boldsymbol{k}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Todos son unitarios, por lo que el conjunto es ortonormal.

De igual manera podemos pensar en tener bases ortonormales (definición 6.6) que, como veremos más adelante, poseen propiedades muy especiales y son bastante más fáciles de manejar que cualquier otra base.

Definición 6.6. Sea V un espacio vectorial con producto interno y B una base para V.

Entonces B se llama **base ortonormal** de V si es una base y es un conjunto ortonormal.

En el ejemplo 7 tenemos un conjunto ortonormal para R^3, $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, y sabemos que este conjunto es la conocida base canónica, por tanto es una base ortonormal para R^3.

Las bases ortonormales nos permiten definir un tipo especial de matriz, lo cual haremos a continuación.

Definición 6.7. Sea A una matriz de $n \times n$, entonces A se llama **matriz ortogonal** si

$$A^{-1} = A^{T}$$

Daremos un ejemplo en $M_{3\times3}$

Ejemplo 8

Consideremos la matriz de $M_{3\times3}$ $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ veamos si es ortogonal:

$A^{T} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$A\,A^{T} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde $A^{-1} = A^{T}$ y por tanto A es ortogonal.

Teorema 6.3. Una matriz Q de orden $n \times n$ es ortogonal, si y sólo si, sus columnas forman una base ortonormal para R^n.

El teorema 6.3 nos brinda una manera de construir matrices ortogonales usando conjuntos de vectores ortonormales.

Ejemplo 9

Usando este teorema podemos afirmar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal pues sus columnas forman una base ortonormal para R^3.

Ejercicio 2

1. Determina si los siguientes vectores son ortonormales o no. Si no lo son, describe cuál es la propiedad que no se cumple en cada caso:

a) $\mathbf{u} = (1, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 3)$
b) $\mathbf{u} = (2/3, 1/3, 2/3)$ y $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$
c) $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$

2. Encuentra una base ortonormal para R^4(generaliza la base de R^3).

3. Determina si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ es ortogonal (utiliza el teorema 6.3).

6.3. Coordenadas de un vector relativas a una base ortogonal y a una base ortonormal

En esta sección manejaremos las coordenadas de un vector relativas a una *base ortogonal* y a una *base ortonormal*, veremos sus diferencias entre ellas y