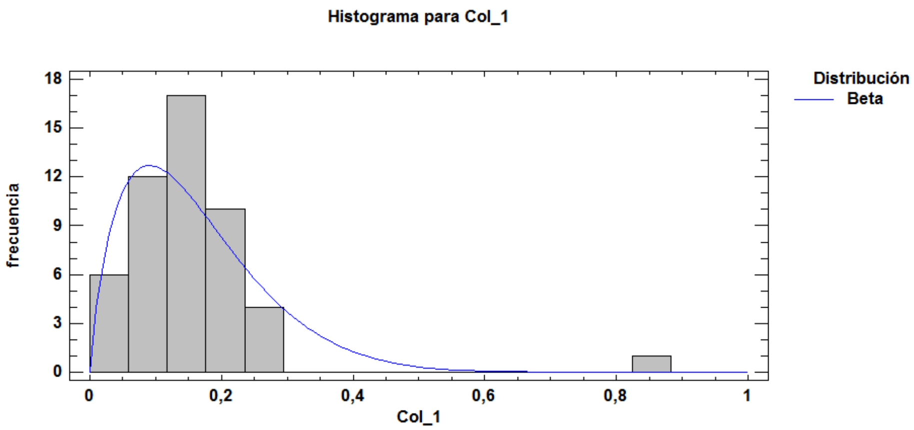
Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre

Vicerrectorado Barquisimeto

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA. APLICACIONES A LA INGENIERÍA



DEPOOL RIVERO, RAMÓN

MONASTERIO, DIÓSCORO

2013

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA. APLICACIONES A LA INGENIERÍA

Dr. DEPOOL RIVERO, RAMÓN

Profesor Titular de la Unexpo

Vicerrectorado Barquisimeto

Ing. MONASTERIO, DIÓSCORO

Profesor Titular de la Unexpo

Vicerrectorado Barquisimeto

Depósito Legal Número: **lfi 05120133102363**

Publicado de manera gratuita por la Unexpo en la página http://www.bqto.unexpo.edu.ve/

DEDICATORIA

A mi hija Mary Carlota.

Ramón Depool

A mi esposa Thais.

Dióscoro Monasterio

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente libro tiene como finalidad fundamental servir como soporte bibliográfico en un curso de Probabilidad y Estadística para estudiantes de Ingeniería, aunque puede ser utilizado por otros profesionales, debido a que la teoría se presenta de una manera sencilla y con muchas aplicaciones, que pueden adaptarse a otras disciplinas.

La Probabilidad y la Estadística son dos campos distintos aunque relacionados entre sí. Utilizando la **Probabilidad** se obtiene la frecuencia de un suceso determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones *suficientemente* estables. La teoría de la probabilidad se usa extensamente en áreas tales como: Física, Matemática, Economía, Ingeniería y Filosofía, para obtener conclusiones sobre la probabilidad de sucesos potenciales y la mecánica subyacente sistemas complejos. La **Estadística** es una ciencia formal que estudia la recolección, análisis e interpretación de datos de una muestra representativa, ya sea para ayudar en la toma de decisiones o para explicar condiciones regulares o irregulares de algún fenómeno o estudio aplicado. Sin embargo, la Estadística es más que eso, es decir, es el vehículo que permite llevar a cabo el proceso relacionado con la investigación científica. La Probabilidad y Estadística puede utilizarse para optimizar el uso del material y la fuerza de trabajo. Al investigar el desarrollo de nuevos productos, éstas permiten comprender los fenómenos sujetos a distintas variaciones y predecirlos, así como también controlarlos de manera eficiente.

En este libro se presentan los temas, iniciando de lo más elemental, con un breve resumen de Estadística General; luego se introduce la teoría básica de Probabilidad, para entrar en el estudio, un tanto profundo, de las Distribuciones de Probabilidad para variables continuas y discretas, con lo cual se logra tener una visión amplia del alcance, utilidad e importancia de los conocimientos tantos de Estadísticos como de las Probabilidades.

Al principio de cada capítulo se expone un pequeño comentario introductorio. Cada teoría es ilustrada con ejemplos prácticos; y se incluye una lista de problemas propuestos, al final de cada capítulo, con sus respectivas respuestas a los problemas impares.

Para dar soporte informático al estudio de la Probabilidad y Estadística, se hace necesario el manejo de algún software tanto Matemático como Estadístico, que permitan realizar los cálculos y elaborar representaciones gráficas adecuadas. Para tal finalidad se han escogido los software Matemático “Derive” y “GeoGebra”, el software Estadístico “Statgraphics Centurion XVI” (versión 16.1.15) y el programa Microsoft Office Excel.

La distribución de libro es de manera gratuita a través de la página virtual de la Universidad Politécnica Unexpo (http://www.bqto.unexpo.edu.ve/)

CAPÍTULO 1

NOCIONES BÁSICAS DE ESTADÍSTICA

La estadística, como toda ciencia, utiliza una terminología con la cual el lector debe estar familiarizado. En este capítulo enunciaremos una serie de definiciones básicas; así como también desarrollaremos procedimientos para la elaboración de tablas de datos y representaciones gráficas de información recolectadas de situaciones particulares.

DEFINICIONES BÁSICAS.

DEFINICIÓN 1.1. *Datos.*

El dato es una representación simbólica (numérica, alfabética, algorítmica, entre otros) de un atributo o característica de una entidad. Los datos describen hechos empíricos, sucesos y entidades. Los datos aisladamente pueden no contener información relevante. Sólo cuando un conjunto de datos se examina a través de un enfoque, hipótesis o teoría se puede apreciar la información contenida en dichos datos. Los datos pueden consistir en números, estadísticas o proposiciones descriptivas. Los datos convenientemente agrupados, estructurados e interpretados se consideran que son la base de la información relevante que se pueden utilizar en la toma decisiones, la reducción de la incertidumbre o la realización de cálculos. Es de empleo muy común en el ámbito informático y, en general, prácticamente en cualquier investigación científica.

En programación, un dato es la expresión general que describe las características de las entidades sobre las cuales opera un algoritmo.

En estructura de datos, es la parte mínima de la información.

Un dato por sí mismo no constituye información, es el procesamiento de los datos lo que nos proporciona información.

DEFINICIÓN 1.2. *Sujeto.*

Es el objeto de investigación; el cual puede ser animado o inanimado. Personas, objetos, medidas, etc., son ejemplos de sujetos.

DEFINICIÓN 1.3. *Población.*

Conjunto de sujetos que poseen una característica común observable. El investigador debe definir la población en estudio; la cual puede ser tan pequeña como se quiera.

Ejemplo 1.1. La población en una empresa puede estar definida por la producción de tornillos en un día determinado; por el personal de guardia en un turno de trabajo; por las órdenes de pedido de un artículo producido; por los productos defectuosos en una producción, etc.

DEFINICIÓN 1.4. *Muestra.*

Es un conjunto de sujetos tomados de una población. Ya que la muestra es parte de una población, se debe tener cuidado que sea representativo de la población, es decir que las características esenciales de la población estén reflejadas en la muestra.

Ejemplo 1.2. En relación con ejemplo 1.1, una muestra puede ser, los tornillos con un tipo de rosca, el personal que estaba de guardia en la entrada, los artículos de una cierta utilidad, los que tienen un tipo definido de defecto.

DEFINICIÓN 1.5. *Variable.*

Característica de los sujetos que puede tomar valores diferentes. Las variables a estudiar son las variables discretas y las continuas. Las discretas tienen como caracteriza la existencia de saltos o discontinuidades entre un valor y otro; además puede tomar sólo valores enteros finitos o contables. Las continuas pueden tomar todos los valores posibles dentro de un intervalo dado.

Ejemplo 1.3. El número de empleados en una fábrica, la producción de una determinada pieza para automóvil, son ejemplos de variables discretas. La longitud de una barra de metal, el tiempo, la velocidad, la temperatura, son ejemplos de variables continuas.

DEFINICIÓN 1.6. *Parámetro.*

Son valores constantes que definen una población. Los parámetros suelen notarse con letras griegas (μ,σ).

Ejemplo 1.4. Supóngase que se está estudiando la población, constituida por la producción semanal de una determinada pieza; un parámetro puede ser el promedio poblacional de producción semanal.

DEFINICIÓN 1.7. *Estadístico.*

Valores calculados de los datos de una muestra y estiman a los parámetros de una población.

Ejemplo 1.5. El promedio muestral de producción de una pieza determinada.

DEFINICIÓN 1.8. *Exactitud y Precisión.*

La exactitud expresa cuán cerca están las mediciones respecto al valor verdadero o real de la magnitud que se mide. La precisión se refiere al grado con el que las mediciones concuerdan entre sí.

DEFINICIÓN 1.9. *Estadística y Probabilidad.*

La Estadística es una ciencia cuyo método consiste en recopilar, presentar, analizar e interpretar datos numéricos extraídos de hechos reales e inferir de ellos, conclusiones lógicamente aceptables. Si el objetivo es el análisis de la información de una muestra o una población, sin que ello implique alguna relación con otras muestras o poblaciones, la estadística es descriptiva. Pero si se utiliza para inducir información referente a otra(s) muestra(s) o población(s), la estadística es inferencial. La Probabilidad estudia la frecuencia de un suceso determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones *suficientemente* estables.

DEFINICIÓN 1.10. *Estadística industrial*

La estadística industrial es la rama de la estadística que busca implementar los procedimientos probabilísticos y estadísticos de análisis e interpretación de datos o características de un conjunto de elementos al entorno industrial, a efectos de ayudar en la toma de decisiones y en el control de los procesos industriales y organizacionales.

Pueden distinguirse tres partes:

- El estudio de las series temporales y las técnicas de previsión, y la descripción de los pasos necesarios para el establecimiento de un sistema de previsión operativo y duradero en una empresa;
- El análisis multivariante, necesario para la extracción de información de grandes cantidades de datos, una de las necesidades más apremiantes;
- El control de calidad y la fiabilidad. Se pueden distinguir varios aspectos:
    - **Serie temporal** o **cronológica** es una secuencia de datos, observaciones o valores, medidos en determinados momentos del tiempo, ordenados cronológicamente y, normalmente, espaciados entre sí de manera uniforme. El **análisis de series temporales** comprende métodos que ayudan a interpretar este tipo de datos, extrayendo información representativa, tanto referente a los orígenes o relaciones subyacentes como a la posibilidad de extrapolar y predecir

su comportamiento futuro. De hecho, uno de los usos más habituales de las series de datos temporales es su análisis para predicción y pronóstico. Por ejemplo, los datos climáticos, las acciones de bolsa, o las series pluviométricas. Resulta difícil imaginar una rama de las ciencias en la que no aparezcan datos que puedan ser considerados como series temporales. Son estudiadas en estadística, procesamiento de señales, econometría y muchas otras áreas.

- **Control de calidad** son todos los mecanismos, acciones, herramientas que se realizan para detectar la presencia de errores. La función del control de calidad existe primordialmente como una organización de servicio, para conocer las especificaciones establecidas por la ingeniería del producto y proporcionar asistencia al departamento de fabricación, para que la producción alcance estas especificaciones. Como tal, la función consiste en la recolección y análisis de grandes cantidades de datos que después se presentan a diferentes departamentos para iniciar una acción correctiva adecuada. Todo producto que no cumpla las características mínimas para decir que es correcto, será eliminado, sin poderse corregir los posibles defectos de fabricación que podrían evitar esos costos añadidos y desperdicios de material. Para controlar la calidad de un producto se realizan inspecciones o pruebas de muestreo para verificar que las características del mismo sean óptimas. El único inconveniente de estas pruebas es el gasto que conlleva el control de cada producto fabricado, ya que se eliminan los defectuosos, sin posibilidad de ser reutilizable. La función principal es asegurar que los productos o servicios cumplan con los requisitos mínimos de calidad.

- El término **fiabilidad** es descrito en el diccionario de la Real Academia Española (RAE) como "probabilidad de buen funcionamiento de algo". Por tanto, extendiendo el significado a sistemas, se dice que la fiabilidad de un sistema es la probabilidad de que ese sistema funcione o desarrolle una cierta función, bajo condiciones fijadas y durante un período determinado. Por ejemplo, condiciones de presión, temperatura, fricción, velocidad, tensión o forma de una onda eléctrica, nivel de vibraciones. Consideramos dos aspectos: la fiabilidad de sistemas y la fiabilidad humana. Un **sistema** es una colección de componentes/subsistemas dispuestos de acuerdo a un diseño dado con el propósito de lograr el cumplimiento de unas determinadas funciones con una adecuación y fiabilidad aceptables. El tipo de componentes, su cantidad y el modo en que están dispuestas tiene un efecto directo en la fiabilidad del sistema. Se considera que el componente humano es de una complejidad mucho mayor que cualquier otro componente y, por tanto, las técnicas aplicables al estudio de la fiabilidad humana o, complementariamente, del error humano son específicos e integran aspectos psicológicos y organizacionales a las habituales técnicas matemáticas.

ESCALAS DE MEDICIÓN.

Las escalas de medición son utilizadas para diferenciar elementos en un proceso. Se clasifican en nominal, ordinal, intervalo y de razón. En diversos estudios, la escala a utilizar, depende de la naturaleza del elemento o del interés del investigador.

La Escala Nominal, se utiliza cuando un objeto o evento se diferencia de otro solamente por la nominación con que se conoce. Se pueden utilizar numerales, letras o cualquier otra nominación sin que ello represente orden o continuidad; solo se pretende clasificar. El personal de una empresa puede ser clasificado, utilizando una escala de letras como A-B-C.

La Escala Ordinal, se utiliza de manera nominal pero para jerarquizar datos. La producción se puede clasificar con la escala alta, mediana y baja.

La Escala de Intervalo, esta escala posee todas las características de una escala ordinal. Además se conoce la distancia entre dos números cualesquiera, y el valor cero no representa ausencia de una característica. La escala utilizada en los termómetros, es de tipo por intervalo ordinal y el valor cero representa punto de congelación, pero por debajo de cero existen otros valores.

La Escala de Razón. Esta escala es similar a la anterior, excepto en que el cero sí representa ausencia de una característica. La escala utilizada para el tiempo es de tipo razón, ya que debajo de cero unidades de tiempo no hay valores.

ELABORACIÓN DE TABLAS DE DATOS.

DEFINICIÓN 1.11. *Distribución de frecuencias*

Una distribución de frecuencias es una tabla en la cual se agrupan en clases los valores posibles para una variable y se registra el número de valores observados que corresponde a cada clase.

DEFINICIÓN 1.12. *Clase* (x_i)

La información recolectada puede ser presentada utilizando para ello, valores; es decir clases.

Ejemplo 1.6. Supóngase que se desea elaborar una tabla con el número de horas trabajadas por 5 empleados de una empresa manufacturera. La clase se puede establecer con una escala nominal como Trabajador 1-2-3-4-5.

DEFINICIÓN 1.13. *Frecuencia* (f_i).

Representa el número de veces que un dato se repite.

Ejemplo 1.7. En el ejemplo 1.6, supóngase que los empleados trabajaron 8, 11, 5, 7, 9 horas respectivamente; esta serie representa la frecuencia de horas trabajadas.

DEFINICIÓN 1.14. *Total de datos (n).*

Es la sumatoria de todos los datos.

Ejemplo 1.8. De acuerdo al ejemplo 1.7, éste sería $n = 40$.

DEFINICIÓN 1.15. *Frecuencia Relativa (fr) y Frecuencia Relativa Porcentual (fr%).*

La frecuencia relativa representa el cociente entre cada frecuencia y total de datos. En tanto que la porcentual, se obtiene convirtiendo la frecuencia relativa en porcentaje.

$$fr\% = \frac{fr}{n} \times 100$$

Ejemplo.1.9. De acuerdo a los ejemplos 1.6 y 1.7, se tiene que las frecuencias relativas son: 0,2; 0,27; 0,13; 0,17; 0,23. Las frecuencias relativas porcentuales son: 20%; 27%; 13%; 17%; 23%.

DEFINICIÓN 1.16. *Frecuencia Acumulada.* *(fa_i) y Frecuencia Acumulada Porcentual (fa_i %).*

La frecuencia acumulada representa el número de datos que se acumulan al pasar de una clase a otra. En tanto que la porcentual, se obtiene convirtiendo la frecuencia acumulada en porcentaje.

$$fa_i\% = \frac{fa_i}{n} \times 100$$

Ejemplo 1.10. De acuerdo al ejemplo 1.7, las frecuencias acumuladas son: 8, 19, 24, 31, 40. Las frecuencias relativas porcentuales son 20%; 47,5%; 60%; 77,5%; 100%.

La información anterior se puede representar por la siguiente tabla.

HORAS TRABAJADAS POR UN GRUPO DE EMPLEADOS DE UNA EMPRESA MANUFACTURERA

Trabajador	N º de Horas	Porcentaje de horas trabajadas	N º de horas acumuladas	Porcentaje de horas acumuladas
1	8	20	8	20
2	11	27	19	48
3	5	13	24	60
4	7	17	31	78
5	9	23	40	100

Fig. 1.1 Tabla de frecuencia

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS PARA DATOS AGRUPADOS EN INTERVALOS DE CLASE.

Cuando se tienen datos muy numerosos es conveniente utilizar intervalos en los cuales se agrupen clases, de tal manera de establecer una tabla más reducida. A estos intervalos se le denominan intervalos de clase. Por razones de cálculo, generalmente es deseable que todos los intervalos de clase, en una distribución de frecuencia, sean de igual amplitud. Para datos distribuidos de manera irregular, como los datos anuales de salario para diversas ocupaciones, pueden ser convenientes los intervalos desiguales de clase; en este caso, se utilizan intervalos de clase de mayor amplitud para los rangos de valores en que hay relativamente pocas observaciones.

Por lo general se recomienda que el número de intervalos esté entre 5 y 15. Aunque existe una fórmula para el cálculo del número de intervalos, hay que hacer notar que en algunos casos puede dar valores errados, esto sucede cuando el número de datos ***n*** es muy grande; esta fórmula es:

$$Número\ de\ intevalos = 1 + 3{,}3\ logn\ (fórmula\ de\ Sturges).$$

El procedimiento para conformar los intervalos es el siguiente:

- Calcular la amplitud de los intervalos de frecuencia para datos no agrupados (*DNA*), utilizando la fórmula:

$$Amplitud = \frac{Valor\ mayor\ en\ los\ DNA - valor\ menor\ en\ los\ DNA}{N^{o}\ de\ intervalos\ deseados}$$

- El primer intervalo tiene como extremo izquierdo el menor valor de los datos recolectados. El extremo derecho de este intervalo se obtiene, sumando al menor valor la amplitud menos una unidad.
- El extremo izquierdo del segundo intervalo es el número entero siguiente al extremo derecho del primer intervalo. El extremo derecho se obtiene sumándole al izquierdo la amplitud menos una unidad. Utilizando este mecanismo, se establecen todos los restantes intervalos.
- Puede suceder que al establecer los intervalos, el último número sea inferior o superior al valor mayor, una manera de resolver esta dificultad, es jugar con el número de intervalos, o si es posible, agregar un intervalo.
- Si los datos originales están en decimales es conveniente llevarlos a números enteros; y una vez elaborada la tabla, restaurar la coma que tenían los datos originales.

Ejemplo 1.11. La producción de Bandas (por pares) para frenos, en 34 días, en una pequeña empresa (BANFRE) está dada por:

56	24	67	98	70	78	99	67	58
98	78	69	38	67	60	56	56	57
98	56	87	34	23	38	68	36	
78	45	56	48	56	100	40	87	

Elaborar una tabla de distribución de frecuencias.

Solución:

Para elaborar la tabla, primero hay que seleccionar el número de intervalos deseado y luego calcular la amplitud.

Sea $\boldsymbol{n}$ = 6 el número de intervalos. De la tabla se tiene que el valor mayor es 100, y el valor menor es 23. Utilizando la fórmula para el cálculo de la amplitud, se tiene que:

$$Amplitud = \frac{100-23}{6} = 12{,}83 \approx 13$$

(Se recomienda tomar un valor de amplitud impar).

El extremo derecho del primer intervalo es $23 + (13-1) = 35$. El primer intervalo va de 23 hasta 35.

El extremo izquierdo del segundo intervalo es $35 + 1 = 36$. El extremo derecho es $36 + (13-1) = 48$. El segundo intervalo va de 36 hasta 48.

El resto de los intervalos son: de 49 hasta 61, de 62 hasta 74, de 75 hasta 87, y de 88 hasta 100.

DEFINICIÓN 1.17. *Límite Inferior* (Li) *y superior* (Ls) *de un Intervalo.*

El límite inferior en un intervalo de clases de frecuencias lo representa el extremo izquierdo de cada intervalo. En tanto que el superior lo representa el extremo derecho de cada uno.

Ejemplo 1.12. En el ejemplo 1.11, en el intervalo que va desde 23 hasta 35; $Li = 23$; Ls =35.

DEFINICIÓN 1.18. *Marca de Clase.* (x_i).

Es el punto medio de cada intervalo. Hay que hacer notar que si se toma la amplitud como un número impar, las marcas de clase darán números similares a los usados en los límites de los intervalos.

Ejemplo 1.13. En el intervalo del ejemplo 1.12, la marca de clase $x_i = 29$.

DEFINICIÓN 1.19. *Límite Real Inferior* (Lri). *Límite Real Superior* (Lrs).

El límite real inferior, en cada intervalo, se obtiene restando cinco décimas al límite inferior de éste $Lri = Li - 0{,}5$. En tanto que el superior se obtiene, sumando cinco décimas al límite superior del intervalo $Lrs = Ls + 0{,}5$.

Ejemplo 1.14. En el intervalo del ejemplo 1.12; $Lri = 23 - 0{,}5 = 22{,}5$; $Lrs = 41 + 0{,}5 = 41{,}5$.

DEFINICIÓN 1.20. *Total de datos (n).*

Es la sumatoria de las frecuencias.

$$n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

Ejemplo 1.15. En el ejemplo 1.11, el total de datos es:

$$n = \sum_{i=1}^{6} f_i = 34$$

DEFINICIÓN 1.21 *Frecuencia Acumulada* (fa_i) *y Frecuencia Acumulada Porcentual* $(fa_i\%)$.

La frecuencia acumulada, representa la suma de la frecuencia en cada intervalo, con las anteriores. En tanto que la porcentual, se obtiene convirtiendo la frecuencia acumulada en porcentaje.

$$fa_i\% = \frac{fa_i}{n} \times 100$$

Ejemplo 1.16. De acuerdo al ejemplo 1.11, las frecuencias acumuladas son: 3, 9, 19, 24, 29, 34; respectivamente en cada intervalo. Las frecuencias acumuladas porcentuales son: 8,8%; 26,5%; 55,9%; 71%; 85%; 100%.

FÁBRICA DE BANDAS DE FRENO (BANFRE)

N° de Bandas	N° de días, en el cual se fabricaron	Promedio de bandas fabricadas.	Acumulación de días.	Porcentaje acumulado de días
23----35	3	29	3	8,8
36----48	6	42	9	26,5
49----61	10	55	19	55,9
62----74	5	68	24	71
75----87	5	81	29	85
88---100	5	94	34	100

Tabla 1.2. Tabla de Frecuencia.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE DATOS.

Uno de los recursos más útiles en el momento de diagramar la información que se tiene en tablas, es usar gráficos. Existe una gama de éstos; en este capítulo se tratarán los más usuales y sencillos. En capítulos posteriores se diseñarán los que se ajusten a la teoría que se trate. Los diagramas que ilustraremos fueron diseñados con software para computadoras.

DIAGRAMA PASTEL.

Destaca la información como porciones de un pastel; los datos se tienen que transformar en frecuencias relativas porcentuales. Esto representa una ventaja; ya que se le da un carácter de totalidad a lo que se quiere expresar.

Ejemplo 1.17. A continuación se presenta una tabla que establece la relación del personal ocupado en una Empresa.

PERSONAL OCUPADO EN UNA EMPRESA

Mes	N° de Técnicos	Porcentaje de Técnicos
Enero	14	24
Febrero	10	17
Marzo	8	14
Abril	26	45

Tabla 1.3. Tabla de frecuencias

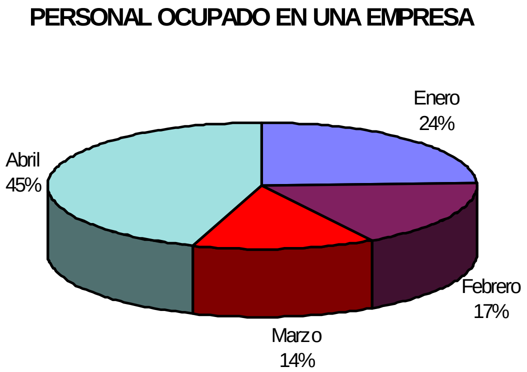


Gráfico 1.1. Diagrama Pastel

DIAGRAMA DE LÍNEA.

Se utiliza para representar los datos relacionados con sus respectivas frecuencias, utilizando una línea continua. En la línea horizontal se ubican las distintas clases y en la línea vertical sus frecuencias.

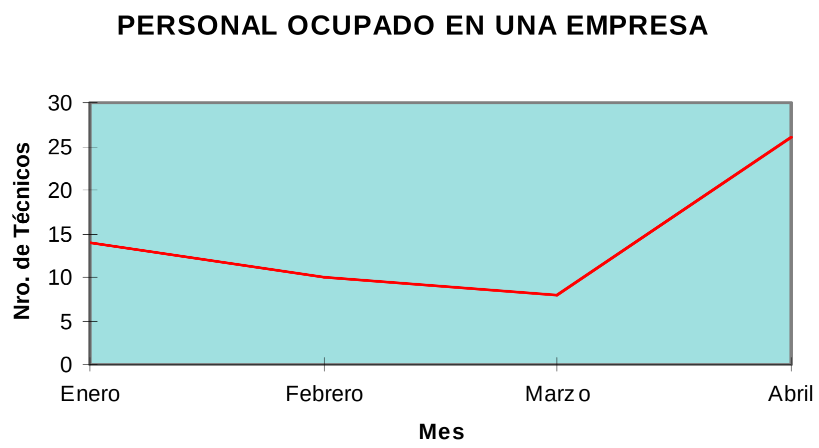


Gráfico 1.2 Diagrama de Línea.

DIAGRAMA DE BARRAS.

El uso es similar al de línea, con la diferencia de que se utilizan barras separadas. Las barras pueden ser dibujadas en dos o tres dimensiones.

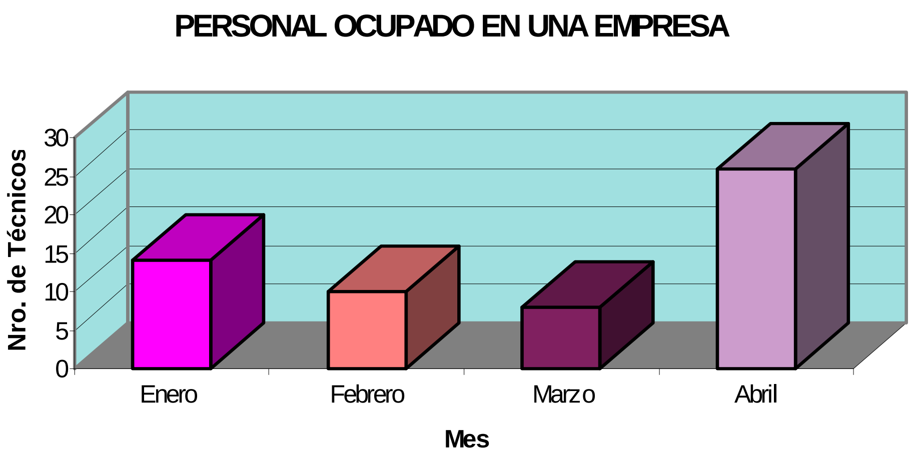


Gráfico 1.3. Diagrama de Barras

DIAGRAMAS DE ÁRBOL.

Estos diagramas son utilizados con frecuencia cuando en un proceso, la escogencia de algún elemento produce nuevas alternativas. Se construye, uniendo, a través de segmentos, elementos que se relacionan.

Ejemplo 1.18. El ejemplo siguiente se relaciona con el proceso de escogencia, en varios pasos, de artículos defectuosos (D) y no defectuosos (N).

SELECCIÓN DE ARTÍCULOS EN UN PROCESO

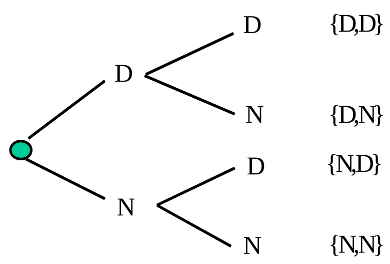


Gráfico 1.4. Diagrama de Árbol

HISTOGRAMA.

Este tipo de diagrama es similar al de barras, pero difiere de éste, en que las barras están unidas y se utiliza para representar información tabulada en tablas de distribución de frecuencias. En la línea horizontal se ubica cada marca de clase, en el punto medio de la base de su respectivo rectángulo; y en la línea vertical la frecuencia.

Ejemplo 1.19. El Promedio de lesiones ocurridas en 50 empresas esta dado por:

PROMEDIO DE LESIONES OCURRIDAS EN UNA EMPRESA

N° Promedio. de Lesiones por millar de Horas – Hombre	N°. de Empresas	Promedio en cada intervalo
1,5---------1,7	20	1,6
1,8--------2,0	13	1,9
2,1--------2,3	10	2,2
2,4--------2,6	40	2,5

Tabla 1.4. Tabla de Frecuencia

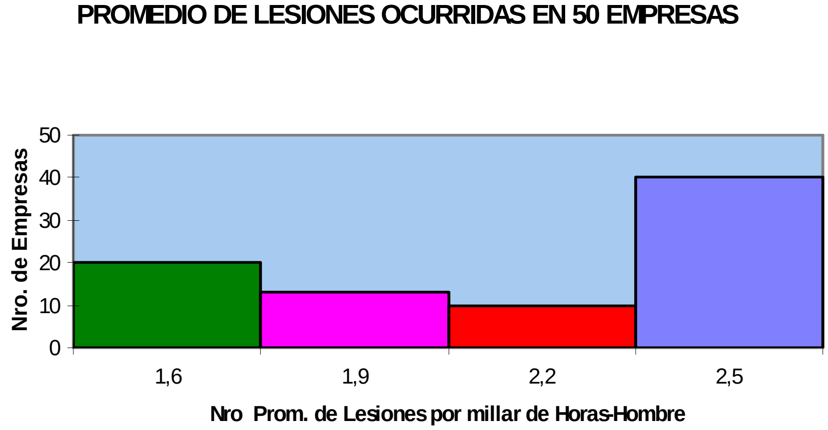


Gráfico 1.5. Histograma

POLÍGONO DE FRECUENCIA.

Este diagrama tiene el mismo uso que el histograma, con la diferencia que se utilizan líneas continuas para unir los puntos, estos puntos son la intersección de las marcas de clase con las respectivas frecuencias.

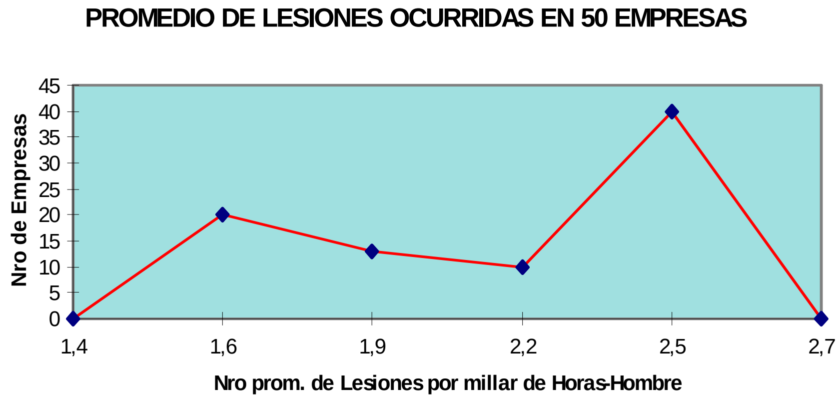


Gráfico.1.6. Polígono de Frecuencia

DIAGRAMAS DE PUNTOS.

El diagrama de puntos tiene semejanza con el polígono de frecuencia, en cuanto a correlacionar variables. El punto representa la intersección de un valor particular, de una de las variables, relacionado con el valor de la otra variable.

Ejemplo 1.20. Al fabricar cierto tipo de recipiente donde se relaciona la variación de presión de aire, con la resistencia de las paredes de éste, se obtuvieron los siguientes resultados.

RELACIÓN ENTRE PRESIÓN DE AIRE Y LA RESISTENCIA DE LAS PAREDES DE UN RECIPIENTE.

Presión del aire (kg/cm^2)	Ancho de la pared (mm)
8,1	4,61
8,4	4,42
8,9	3,24
9,2	2,10
9,6	1,64

Tabla 1.5. Tabla de Frecuencia

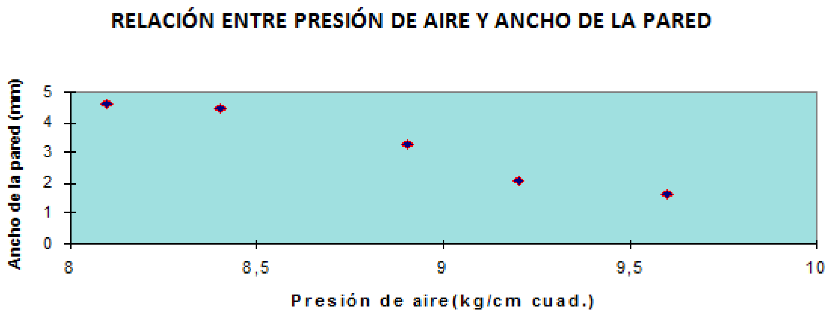


Gráfico 1.7. Diagrama de puntos

DIAGRAMAS DE PARETO.

Los problemas que se presentan en un proceso, por lo general, dependen de la combinación de *pocos elementos principales y muchos secundarios*. Si se pueden controlar estos elementos principales, se puede reducir la frecuencia en que ocurren. El diagrama de Pareto**,** puede representar ordenadamente cada tipo de falla o defecto que se produce en un proceso, de acuerdo con su frecuencia; lo cual ayuda al Ingeniero a detectar defectos y las causas que lo produzca.

Ejemplo 1.21. Representemos el problema siguiente a través de un diagrama de Pareto. Las piezas elaboradas por un Torno controlado por una computadora, está saliendo fuera de especificaciones, los operarios registraron las causas y sus frecuencias:

Controlador inestable	24
Error del operador	15
Fluctuación de corriente	7
Herramientas gastadas no cambiadas	6
Otros	3

El diagrama de Pareto se representa a continuación las causas de un defecto de fabricación con la frecuencia en que ocurren.

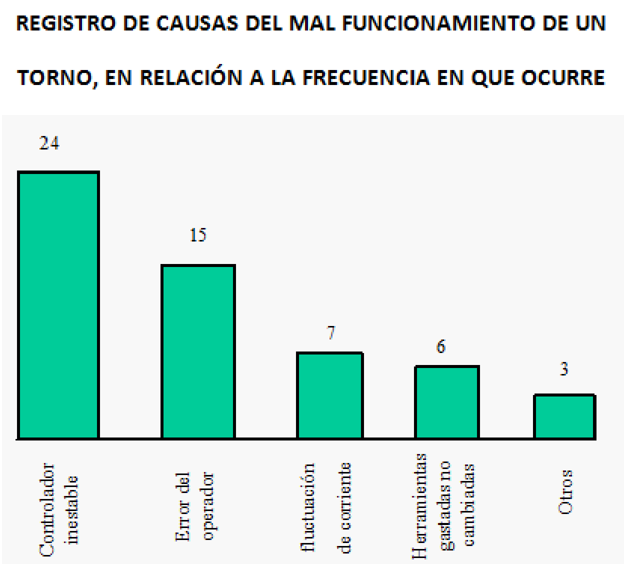


Gráfico 1.8 Diagrama de Pareto.

Ejemplo 1.22. Una vez que se ha obtenido la información anterior, se calculó la desviación de la velocidad de corte con respecto al valor deseado, ajustado por el controlador. Dando los resultados: 4, 8, -3, 5, 7, 6, 4. Estos valores se representan en el siguiente diagrama de puntos.

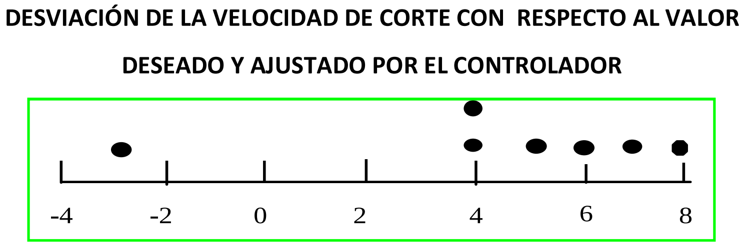


Gráfico 1.9. Diagrama de puntos.

Observación 1.1.

En este último ejemplo se observa que el diagrama de Pareto puede ser complementado con otros diagramas, como el de puntos, para visualizar la información que se tiene.

Sugerencias para la elaboración de un diagrama de Pareto.

- Establezca el problema a investigar. Ejemplo: Objeto defectuoso.
- Qué datos necesita y cómo clasificarlos. Ejemplo: tipo de defecto.
- Establezca el método de recolección de los datos. Diseñe una tabla de representación de datos. En esta tabla liste los totales individuales, los totales acumulados y los porcentajes acumulados. Organice los datos por orden de cantidad.
- El ítems “otros” debe ubicarse en el último renglón. No es conveniente que “otros” represente un porcentaje de los más altos. Si esto ocurre debe reclasificar.

Ejemplo 1.23. En un proceso se recolectaron los datos referentes a los defectos en cuanto a: Fractura, Rayado, Mancha, Tensión, Rajadura, Burbuja y otros.

DESCRIPCIÓN DE DEFECTOS EN LA FABRICACIÓN DE UN ARTÍCULO.

Tipo de Defecto	N ° de Defecto	Total Acumulado	Porcentaje Acumulado
Tensión	104	104	52
Rayado	40	144	72
Burbuja	20	164	82
Fractura	15	179	89
Mancha	12	191	96
Otros	9	200	100

Tabla 1.6. Tabla de Frecuencia.

DESCRIPCIÓN DE DEFECTOS EN LA FABRICACIÓN DE UN ARTÍCULO

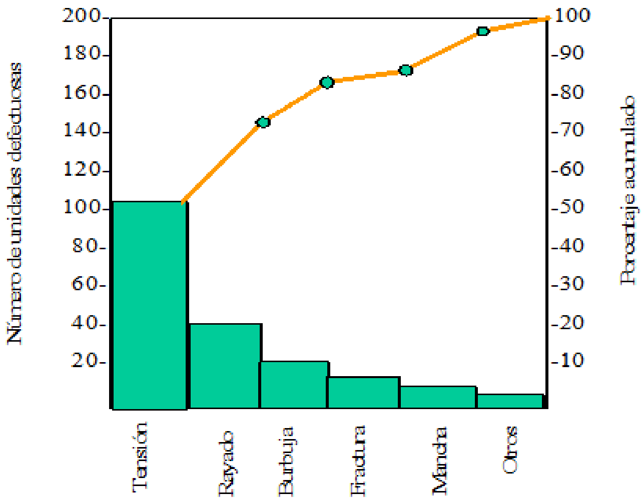


Gráfico 1.10 Diagrama de Pareto.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Elaborar una tabla de distribución de Frecuencia. Los Datos representan las mediciones de la resistencia a la ruptura (en Onzas) de una muestra de hilos de cáñamo.

43,6	36,8	15,2	25,0	37,5	33,5	34,6	65,1	38,6	54,9	25,9
45,8	34,7	23,5	44,7	56,8	45,7	56,8	34,8	23,6	56,9	23,5
23,6	26,9	45,8	34,9	54,9	23,7	35,8	56,8	37,9	56,8	45,8
34,9	34,7	59,9	61,0	42,4	57,8	60,8	28,0	26,0	50,8	34,8

2. Elaborar una tabla de distribución de Frecuencia. En un estudio de tres semanas sobre la productividad de los trabajadores, se recolectó la siguiente información sobre el número de piezas aceptables que produjeron un grupo de empleados.

56	67	89	23	78	55	56	78	34	89	23
56	34	56	78	98	23	56	78	54	45	78
56	34	58	78	98	89	67	60	20	45	26
45	78	89	45	67	89	78	90	34	67	34
45	90	56	70	56	23	78	56	79	57	24
45	76	98	45	28	44	45	56	87		

3. Los datos de la siguiente tabla representan el rendimiento de gasolina en 30 viajes de los automóviles de una compañía de transporte.

RENDIMIENTO DE 30 VIAJES DE LOS AUTOMÓVILES DE UNA COMPAÑÍA DE TRANSPORTE.

Kilómetros por Litro	N° de Viajes
10,0------12,0	6
12,1------14,1	7
14,2------16,2	12
16,3------18,3	4
18,4------20,4	2
20,5------22,5	3

Elaborar un histograma y un polígono de frecuencia.

4. En una prueba de la elasticidad de 40 vigas formadas por láminas con adhesivo, se obtuvieron los siguientes valores de su constante elástica (en MN/m), los cuales se representan en la siguiente tabla:

ELASTICIDAD DE 40 VIGAS FORMADAS POR LÁMINAS ADHESIVAS.

Valores de la constante elástica	N° de vigas
6,61-------6,65	9
6,66-------6,70	10
6,71-------6,75	6
6,76-------6,80	12
6,81-------6,85	3

Elaborar un histograma y un polígono de frecuencia.

5. Los datos siguientes representan la fabricación de varios tipos de tubos plásticos en una compañía.

FABRICACIÓN DE TUBOS PLÁSTICOS SEGÚN SU TIPO.

Tipo de Tubo	Cantidad Producida
A	28
B	34
C	12
D	3

Elaborar un diagrama Pastel, uno de Barras y uno de Línea.

6. Los empleados de una empresa manufacturera fueron clasificados según la cantidad de sujetos, con lo cual se elaboró la siguiente tabla.

CLASIFICACIÓN DE LOS EMPLEADOS EN UNA EMPRESA MANUFACTURERA

Tipo de Empleado	Cantidad
Gerente	2
Administrativos	8
Obreros	20
Mensajeros	1
Vigilantes	4

Elaborar un diagrama Pastel, uno de Barras y uno de Línea.

7. Con las mediciones de los puntos de ebullición de un compuesto de silicio(en grados Celsius), que se presentan a continuación, elabórese un diagrama de puntos

135 150 158 171

135 178 146

8. Los recipientes que contienen las reacciones en algunas plantas nucleares, consisten en dos componentes soldados entre sí. El cobre en las soldaduras podría hacer que se

volvieran frágiles después de años de servicio. Las muestras del material de soldadura de una colada que se usó en una planta, tuvo contenidos de cobre de:

0,27 0,34

0,36

Las muestras de la siguiente colada tuvieron valores de:

0,24 0,10 0,30

0,26 0,22 0,27

Elabórese un diagrama de puntos, que muestre las diferencias posibles en las dos corrientes de producción del material de soldadura.

9. Los accidentes en una empresa, que se dedica a la fabricación de Correas para Damas, se clasificaron de acuerdo con la zona del daño en:

Dedos	16
0jos	6
Brazos	3
Piernas	1

Elaborar un diagrama de Pareto.

10. Los daños en una fábrica del papel, (en miles de Bolívares), debidos a la ruptura de la hoja se pueden dividir de acuerdo con el producto:

Papel higiénico	123
Toallas	76
Servilletas	34
Otros productos	

Elaborar un diagrama de Pareto.

11. En el diagrama del ejercicio 9, incluir la frecuencia porcentual acumulada.

12. En diagrama del ejercicio 10, incluir la frecuencia porcentual acumulada.

CAPÍTULO 2

MEDIDAS DESCRIPTIVAS

Las medidas de tendencia central, de dispersión y de posición, son de relevante importancia en el momento de realizar estudios estadísticos. Las medidas de tendencia central son utilizadas para localizar el centro de un grupo de datos. La dispersión evalúa la separación o apartamiento de las medidas de los datos, respecto al centro. Las medidas de posición ubican un elemento en un grupo de datos respecto a otro. En este capítulo se estudiarán estas medidas para datos agrupados y no agrupados en intervalo de frecuencia.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.

Cada medida de tendencia central proporciona un valor numérico, el cual es el más representativo de los datos, es decir, el estudio de la tendencia generalizada de que los datos se agrupen en su mayoría alrededor de un valor calculado. Entre las medidas de tendencia central están la media aritmética, la mediana y la moda. Se debe hacer notar que el valor de la medida de tendencia central calculado, no necesariamente coincide con uno de los valores de los datos que se tienen. En este capítulo se estudiará la media aritmética y la mediana.

DEFINICIÓN 2.1. *Media Aritmética.*

Si los datos no están agrupados en intervalos de frecuencia, la media aritmética se define como la suma de las medidas de los datos entre el número de datos. En el caso de que los datos estén agrupados en intervalos de frecuencia, la media aritmética se define como el producto de cada frecuencia por su respectiva marca de clase, entre la suma de las frecuencias. Si la media aritmética es un parámetro se denota por la letra griega μ, y si es un estadístico por la letra $\bar{x}$.

Caso 1: *Media aritmética para datos no agrupados en intervalos de frecuencia.*

El procedimiento que se debe utilizar es el siguiente:

- Se establece la cantidad de datos (n para muestra y $\boldsymbol{N}$ para población) con los cuales se va a calcular la media o promedio.
- Se suman los valores numéricos de los datos.
- Se divide la suma entre la cantidad de datos; obteniendo así la media o promedio aritmético.

Si la media es un parámetro μ*, dado el conjunto* $\boldsymbol{N}$ *de datos* $x_1, x_2, \ldots, x_N$*, entonces:*

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Si la media es un estadístico $\bar{x}$*, dado el conjunto* n *de datos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, entonces:*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Ejemplo 2.1. La producción de Bandas (por pares) para frenos, en 34 días, en una pequeña empresa (BANFRE) está dada por:

56	24	67	98	70	78	99	67	58
98	78	69	38	67	60	56	56	57
98	56	87	34	23	38	68	36	
78	45	56	48	56	100	40	87	

Calcular la media aritmética de la producción de bandas para frenos. Exprese los resultados como parámetro y como estadístico.

Solución:

En el caso que la media fuese un parámetro.

$$N = 34$$

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2146$$

$$\mu = \frac{2146}{34} = 63{,}12$$

En el caso que la media fuese un estadístico.

$$n = 34$$

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2146$$

$$\bar{x} = \frac{2146}{34} = 63{,}12$$

Este resultado se puede interpretar como que el promedio o media de la producción es de 63,12 pares de bandas. Es de resaltar que el resultado no es entero, como los datos iniciales; ya que la media es un valor central y no necesariamente debe ser un valor de los que se tienen en los datos.

Caso 2: Media aritmética para datos agrupados en intervalos de frecuencias:

El procedimiento que se debe utilizar es el siguiente:

- Se suman las frecuencias.
- Se multiplica cada marca clase con sus respectivas frecuencias, y se halla la suma total. Luego se divide esta suma entre la suma de las frecuencias; obteniendo así la media o promedio aritmético.

Si la media es un parámetro μ, donde $N = \sum_{i=1}^{k} f_i$ la suma de las frecuencias y x_i para i=1, 2,..., k; las i-ésimas marcas de clase, entonces:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{N}$$

Si la media es un estadístico $\bar{x}$, donde $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$ la suma de las frecuencias y x_i para i=1, 2,..., k; las i-ésimas marcas de clase. Entonces:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}$$

Ejemplo 2.2. La producción de Bandas (por pares) para frenos, en 34 días, en una pequeña empresa (BANFRE) está dada por la siguiente tabla de distribución de frecuencias.

Nº de Bandas	f_i
23-----35	3
36-----48	6
49-----61	10
62-----74	5
75-----87	5
88----100	5

Calcular la media aritmética de la producción de bandas para frenos. Exprese los resultados como parámetro y como estadístico.

Solución:

Se calcula la suma de las frecuencias y la suma de los productos de las frecuencias por las marcas de clase.

Nº de Bandas	f_i	x_i	$f_i.x_i$
23-------35	3	29	87
36-------48	6	42	252
49-------61	10	55	550
62-------74	5	68	340
75-------87	5	81	405
88-----100	5	94	470
Suma	34		2104

En el caso que la media fuese un parámetro.

$$N = 34$$

$$\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 2104$$

$$\mu = \frac{2104}{34} = 61{,}88$$

En el caso que la media fuese un estadístico.

$$n = 34$$

$$\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 2104$$

$$\bar{x} = \frac{2104}{34} = 61{,}88$$

Observación 2.1.

Este resultado difiere del calculado en el ejemplo 2.1, ya que aquí se utilizan las marcas de clases y no los valores originales.

DEFINICIÓN 2.2. *Mediana.*

Se define como el valor que se encuentra en el punto medio o centro de un grupo de datos ordenados de una manera creciente.

Observación 2.2

La mediana así como la media aritmética, proporciona un valor de tendencia central, el cual puede coincidir o no con el de la media aritmética. En la práctica es preferible trabajar con la media aritmética.

Caso 1*: Mediana para datos no agrupados en intervalos de frecuencia.*

Para calcular la mediana se procede de la siguiente manera:

- Se ordenan los números de forma creciente.
- La mediana es el valor medio o el promedio de los valores medios.

Ejemplo 2.3. Calcule la mediana de los datos del ejemplo 2.1.

Solución:

Ordenando los datos de manera creciente, se tiene:

23	24	34	36	38	38	40	45	48
56	56	56	56	56	56	57	58	60
67	67	67	68	69	70	78	78	78
87	87	98	98	98	99	100		

Ya que hay 34 datos, la mediana está entre la posición 17 y 18; es decir el valor medio entre 58 y 60. Por lo tanto, la mediana es el promedio de estos valores:

$$Med = \frac{58+60}{2} = 59$$

Caso 2: *Mediana para datos agrupados en intervalos de clase.*

Para calcular la mediana se procede de la siguiente manera:

- Se identifica la clase mediana (esta clase contiene la mediana), la cual es la primera cuya frecuencia acumulada iguala o excede la mitad del total de datos. Para ubicar la clase mediana se puede utilizar la siguiente fórmula

$$Número\ de\ dato = \frac{n}{2}$$

- Para calcular la mediana se usa la fórmula.

$$Med = Lri + \left[\frac{\frac{n}{2} - faA}{fc}\right] i$$

c: clase mediana.

Lri: Límite real inferior de la clase mediana.

n: Total de datos en caso de que sea una muestra y *N:* en caso de población

faA: Frecuencia acumulada de la clase que precede a la clase que contiene la mediana.

fc: Frecuencia en la clase mediana.

i: Tamaño del intervalo de clase.

Ejemplo 2.4. Calcular la mediana, utilizando la información del problema 2.2.

Solución

Para identificar la clase mediana calculemos

$$Número\ de\ dato = \frac{34}{2} = 17$$

Observando la columna de la frecuencia acumulada, el intervalo (49----61) contiene los datos del 10 al 19. Por lo tanto la clase mediana se ubica en esta línea

Nº de Bandas	f_i	fa
23-----35	3	3
36-----48	6	9
49-----61	10	19
62-----74	5	24
75-----87	5	29
88----100	5	34

Sustituyendo los siguientes valores en la fórmula se tiene:

$$Lri = 48{,}5 \qquad n = 34 \qquad faA = 3 + 6 = 9 \qquad fc = 10 \qquad i = 13$$

$$Med = 48{,}5 + \left[\frac{\frac{34}{2} - 9}{10}\right] 13 = 58{,}9$$

Observación 2.3. En los ejemplos anteriores se observa que la media aritmética difiere de la mediana. Esto es importante, ya que pueden ocurrir tres situaciones:

- Si la mediana es mayor que la media, hay mayor cantidad de datos superiores a la media que inferiores a ella.

- Si la mediana es menor que la media, hay mayor cantidad de datos inferiores a la media que superiores a ella.
- Si la mediana coincide con la media, los datos están distribuidos equitativamente a ambos lados de la media.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN.

Las medidas de tendencia central sirven para ubicar el centro de un grupo de datos; pero no dicen cómo se reparten o dispersan los datos a uno y otro lado del centro. Esta última característica se denomina dispersión.

Si la dispersión es poca, indica gran uniformidad entre los valores; una gran dispersión indica poca uniformidad; y una ausencia de dispersión es señal de uniformidad completa, lo cual quiere decir que los datos tienen el mismo valor.

Entre las medidas de dispersión se encuentran: el rango, la desviación media, la varianza y la desviación estándar. En este libro, se estudiarán las dos últimas.

DEFINICIÓN 2.3. *Varianza y Desviación Estándar*.

Se definen como los valores que determinan la dispersión o separación de las medidas de los datos, respecto a un valor central. Si la varianza y la desviación estándar son parámetros se denotaran por las letras griegas σ^2 *y* σ respectivamente; y si son estadísticos por las letras s^2 y s respectivamente.

Caso 1 Varianza y desviación estándar para datos no agrupados en intervalos de frecuencia.

Para calcular la varianza y la desviación estándar se procede de la siguiente manera:

- Se calcula la media aritmética.
- Se eleva al cuadrado cada valor numérico y se calcula la suma total.
- Se usa una de las fórmulas siguientes, de acuerdo al caso.

Si se trata de un parámetro, entonces:

$$Varianza\ \sigma^2 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - N\mu^2}{N}$$

$$Desviación\ estándar\ \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Si se trata de un estadístico, entonces:

$$Varianza\ s^2 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - n\mu^2}{n-1}$$

$$Desviación\ estándar\ s = \sqrt{s^2}$$

Ejemplo 2.5. Utilizando la información del ejemplo 2.1, calcular la varianza y la desviación estándar, en los casos que sean parámetros o estadísticos.

Solución:

Del ejemplo 2.1 la media aritmética es $\mu = \bar{x} = 63{,}12$. El total de datos N=n=34.

La suma de los valores al cuadrado está dada por.

$$\sum x^2 = (56)^2 + (24)^2 + \cdots + (87)^2 = 151158$$

En el caso de parámetros

$$Varianza\ \sigma^2 = \frac{(151158) - 34(63{,}12)^2}{34} = 461{,}82$$

$$Desviación\ estándar\ \sigma = \sqrt{461{,}82} = 21{,}49$$

Si se trata de un estadístico, entonces:

$$Varianza\ s^2 = \frac{(151158) - 34(63{,}12)^2}{34-1} = 476{,}11$$

$$Desviación\ estándar\ s = \sqrt{476{,}11} = 21{,}82$$

Observación 2.4.

La Media Aritmética, la Varianza y la Desviación Estándar, para datos no agrupados por intervalos, se pueden calcular usando una calculadora de bolsillo; con lo cual se puede ahorrar tiempo y esfuerzo.

Caso 2. Varianza y Desviación Estándar para datos agrupados en intervalos de clase.

Para calcular la Varianza y la Desviación Estándar se procede de la siguiente manera:

- Se calcula la Media Aritmética.
- Se eleva al cuadrado cada marca de clase y se multiplica por la respectiva frecuencia, y se calcula la suma total.
- Se usa de las fórmulas siguientes, de acuerdo al caso.

Si se trata de un parámetro.

$$Varianza\ \sigma^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2\right) - N\mu^2}{N}$$

$$Desviación\ estándar\ \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Si se trata de un estadístico, entonces:

$$Varianza\ s^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2\right) - n\mu^2}{n-1}$$

$$Desviación\ estándar\ s = \sqrt{s^2}$$

.

Observación 2.4. Puede existen diferencia entre el valor de la varianza y la desviación estándar, cuando se trata de un parámetro o un estadístico; a medida que se aumente el número de datos esta diferencia se minimiza.

Ejemplo 2.3. Utilizando la información del ejemplo 2.2, calcular la varianza y la desviación estándar, en los casos que sean parámetros o estadísticos.

Solución:

Nº de Bandas	f_i	X_i	$f_i.X_i^2$
23-----35	3	29	2523
36-----48	6	42	10584
49-----61	10	55	30250
62---- 74	5	68	23120
75-----87	5	81	32805
88----100	5	94	44180
Suma	34		143462

Si se trata de un parámetro, entonces:

$$Varianza\ \ \sigma^2 = \frac{143462 - 34(61{,}88)^2}{34} = 390{,}34$$

$$Desviación\ estándar\ \sigma = \sqrt{390{,}34} = 19{,}76$$

Si se trata de un estadístico, entonces:

$$Varianza\ \ s^2 = \frac{143462 - 34(61{,}88)^2}{34 - 1} = 402{,}16$$

$$Desviación\ estándar\ s = \sqrt{402{,}16} = 20{,}05$$

MEDIDAS DE POSICIÓN.

Estas medidas determinan la posición que ocupa un dato, al ser comparado con el resto. Esto permite determinar qué porcentaje de datos se encuentran por debajo y por encima, de uno en particular. Entre las medidas de posición se tienen los deciles, cuartiles, percentiles y rango percentil. En este libro se estudiarán los dos últimos, para datos agrupados en intervalos de frecuencia.

DEFINICIÓN 2.4. *Percentiles.*

El percentil P_x es un valor tal que *p%* de las medidas son menores que ese valor calculado, y *(100-p)%* son mayores.

Observación 2.5.

Si los datos están representados en una tabla de distribución de frecuencias. Los percentiles dividen en 100 partes iguales la distribución de frecuencia. Los percentiles son 99 y se denotan por $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$. El Percentil 25, o equivalentemente P_{25}, establece que el 25% de las observaciones están por debajo de un dato. **El percentil 50 es la mediana.**

El percentil para datos agrupados en intervalos de clase.

Se calcula con el siguiente procedimiento.

- Se identifica la clase del percentil. Para ubicar esta clase, se puede utilizar la fórmula

$$Número\ de\ dato = \frac{nx}{100}$$

- Para calcular el percentil se usa la fórmula.

$$P_x = Lri + \left[\frac{\frac{nx}{100} - faA}{fc}\right] i$$

c: clase mediana.

Lri: Límite real inferior de la clase del percentil.

n: Total de datos en caso de que sea una muestra y *N:* en caso de población.

faA: Frecuencia acumulada de la clase que precede a la clase que contiene el percentil.

fc: Frecuencia en la clase del percentil.

i: Tamaño del intervalo de clase.

Ejemplo 2.4. Utilizando la información del ejemplo 2.2, calcule el percentil 50 y el percentil 45.

Solución:

Percentil 50.

Para determinar la clase del percentil 50, sabiendo que n=34 y x=50, se tiene que:

$$Número\ de\ dato = \frac{34{,}50}{100} = 17$$

La clase mediana está ubicada en el intervalo (49----61), que contiene los datos del 10 al 19.

Nº de Bandas	f_i	Fa
23----35	3	3
36----48	6	9
49----61	10	19
62----74	5	24
75----87	5	29
88---100	5	34

Los elementos necesarios para aplicar la fórmula son:

$$Lri = 48{,}5 \qquad n = 34 \quad faA = 3 + 6 = 9 \quad fc = 10 \quad i = 13$$

Sustituyendo

$$P_{50} = 48{,}5 + \left[\frac{\frac{(34)(50)}{100} - 9}{10}\right] 13 = 58{,}9$$

El percentil 50 igual a 58,9, significa que el 50% de los datos se encuentran por debajo de 58,9. Esto equivale a que el 50% de las bandas producidas están por debajo de 58,9 pares de bandas.

Percentil 45.

Para determinar la clase del percentil 45, sabiendo que n=34 y x=45, se tiene que:

$$Número\ de\ dato = \frac{34{,}45}{100} = 15{,}3 \approx 15$$

La clase mediana está ubicada en el intervalo (49----61), que contiene los datos del 10 al 19.

Para determinar la clase del percentil, sabiendo que x=45 y n=34, de tal manera que esta clase se ubica en el dato 15,3 = (34.45/100). Este está en el intervalo (49---61), que contiene los datos del 10 al 19. Los elementos necesarios para aplicar la fórmula son:

$$Lri = 48{,}5 \qquad n = 34 \qquad faA = 3 + 6 = 9 \qquad fc = 10 \qquad i = 13$$

$$P_{45} = 48{,}5 + \left[\frac{\frac{(34)(45)}{100} - 9}{10}\right] 13 = 56{,}69$$

El percentil 45 igual a 56,69, significa que el 45% de bandas producidas se encuentran por debajo de 56,69 pares de bandas.

DEFINICIÓN 2.5. *Rango Percentil.*

El Rango percentil $\boldsymbol{Rp_x}$ es el porcentaje de las medidas que son menores que un valor dado.

Observación 2.6.

Esta medida de posición proporciona una interpretación similar al del percentil; con la diferencia que se calcula es el porcentaje de observaciones que hay por debajo de un dato dado.

El rango percentil, se calcula con el siguiente procedimiento:

- Ya que el objetivo es calcular el porcentaje de valores que están por debajo de uno en particular, se ubica este valor en el respectivo intervalo; obteniendo así los elementos necesarios para aplicar la fórmula respectiva.

- Para calcular el rango percentil se usa la fórmula

$$Rp_x = \left[\frac{\left(\frac{x - Lri}{i}\right) fc + faA}{n}\right] 100$$

Ejemplo 2.5. Utilizando la información del ejemplo 2.4, calcular el rango percentil correspondiente al número 58,9, o equivalentemente $Rp_{58,9}$.

Solución:

Ubiquemos el valor 58,9 en los intervalos de frecuencia, que se encuentran en la tabla, éste está en el intervalo (49----61). Los elementos para el uso de fórmula del cálculo del rango percentil son:

$$Lri = 48,5 \qquad n = 34 \qquad faA = 3 + 6 = 9 \qquad fc = 10 \qquad i = 13$$

$$Rp_{58,9} = \left[\frac{\left(\frac{58,9 - 48,5}{13}\right) 10 + 9}{34}\right] 100 = 50\%$$

El rango percentil del número 58,9 igual al 50%, esto significa que se produce el 50% de bandas por debajo de 58,9 pares de bandas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Los datos representan las mediciones de la resistencia a la ruptura (en Onzas) de una muestra de hilos de cáñamo:

43,6	36,8	15,2	25,0	37,5	33,5	34,6	65,1	38,6	54,9	25,9
45,8	34,7	23,5	44,7	56,8	45,7	56,8	34,8	23,6	56,9	23,5
23,6	26,9	45,8	34,9	54,9	23,7	35,8	56,8	37,9	56,8	45,8
34,9	34,7	59,9	61,0	42,4	57,8	60,8	28,0	26,0	50,8	34,8

Halle:

a. La media aritmética
b. La mediana.
c. La varianza y la desviación estándar, si se consideran los datos como medidas de una población.
d. La varianza y la desviación estándar, si se consideran los datos como medidas de una muestra.

2. En un estudio de tres semanas sobre la productividad de los trabajadores, se recolectó la siguiente información sobre el número de piezas aceptables que produjeron un grupo de empleados.

56	34	58	45	55	56	60	34	23	90	78
56	34	89	78	23	67	90	89	78	56	56
56	78	23	98	89	78	34	45	26	70	79
45	89	78	98	89	78	54	45	34	56	57
67	56	78	67	56	78	20	67	45	23	24
45	76	98	45	28	44	45	56	87		

Halle:

a La media aritmética
b La mediana.
c La varianza y la desviación estándar, si se consideran los datos como medidas de una población.
d La varianza y la desviación estándar, si se consideran los datos como medidas de una muestra.

4. Los datos de la siguiente tabla representan el rendimiento de gasolina en 30 viajes de los automóviles de una compañía de transporte.

RENDIMIENTO DE 30 VIAJES DE LOS AUTOMÓVILES DE UNA COMPAÑÍA DE TRANSPORTE.

Kilómetros por Litro	N° de Viajes
10,0-----12,0	6
12,1-----14,1	7
14,2-----16,2	12
16,3-----18,3	4
18,4-----20,4	2

Halle:

a La media aritmética

b La mediana.

c La varianza y la desviación estándar, si se consideran los datos como medidas de una población.

d La varianza y la desviación estándar, si se consideran los datos como medidas de una muestra.

e Los percentiles P_{50}, P_{30}, P_{75}.

f El rango percentil $Rp_{13,8}$.

5. En una prueba de la elasticidad de 40 vigas formadas por láminas con adhesivo, se obtuvieron los siguientes valores de su constante elástica (en MN/m), los cuales se representan en la siguiente tabla:

ELASTICIDAD DE 40 VIGAS FORMADAS POR LÁMINAS ADHESIVAS.

Valores de la constante elástica	N° de vigas
6,61-----6,65	9
6,66-----6,70	10
6,71-----6,75	6
6,76-----6,80	12
6,81-----6,85	3

Halle:

a La media aritmética

b La mediana.

c La varianza y la desviación estándar, si se consideran los datos como medidas de una población.

d La varianza y la desviación estándar, si se consideran los datos como medidas de una muestra.

e P_{50} , P_{40} , P_{61}

f $Rp_{7,2}$

CAPÍTULO 3

PROBABILIDADES

Es común que las personas se refieran a las probabilidades para indicar la posibilidad de ocurrencia de un evento futuro. Esta interpretación puede considerarse aceptable, pero no clarifica de forma explícita de cómo se mide y de qué manera se utilizan las probabilidades para hacer inferencias. Las probabilidades son de gran utilidad cuando se opera con problemas físicos que generan observaciones, las cuales no son factibles predecir con exactitud. Por ejemplo, el número de artículos defectuosos en un proceso de la fabricación de tubos plásticos. Los eventos que poseen estas propiedades se denominan eventos aleatorios.

En este capítulo se hará un enfoque de estas dos alternativas, así como también la teoría básica de las probabilidades.

DEFINICIONES BÁSICAS.

DEFINICIÓN 3.1. *Experimento.*

Es el proceso a través del cual se obtienen observaciones.

Ejemplo 3.1. Considere el experimento siguiente: en una empresa existe una grúa que tiene un sistema de guayas, las cuales requieren ser reemplazadas cada cierto tiempo de uso. Para probar si se debe cambiar, se somete el sistema a una tensión exagerada, si se rompen 2 o más hilos, se dice que la guaya no sobrevive y por lo tanto debe ser reemplazada. Se sabe por experiencia, que en cada tensión exagerada, se rompe a lo más un hilo y que la probabilidad de que se rompan más de uno es despreciable

DEFINICIÓN 3.2. *Espacio Muestral.*

Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento estadístico. El espacio muestral suele denotarse por la letra **S.** Los elementos del espacio muestral, se denominan puntos muestrales.

DEFINICIÓN 3.3. *Espacio Muestral Discreto.*

Es un espacio muestral que contiene un número finito o numerablemente infinito de puntos muestrales.

Ejemplo 3.2. En el ejemplo 3.1, el espacio muestral es discreto finito. Para definir este espacio muestral elaboraremos un diagrama de árbol. Codifiquemos como cero (0) si no se rompe algún hilo y uno (1) si se rompe un hilo (ver gráfico 3.1).

S={{0,0,0},{0,0,1},{0,1,0},{0,1,1},{1,0,0},{1,0,1},{1,1,0},{1,1,1}}.

Como puede observarse existen 8 puntos muestrales en este experimento.

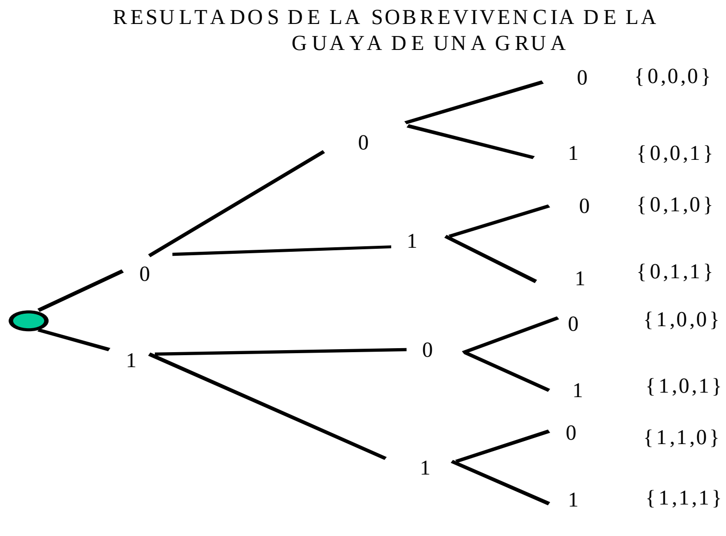


Gráfico 3.1.Espacio muestral.

Ejemplo 3.3. Supóngase el experimento que consiste en el registro del número de automóviles que le suministran gasolina de un cierto octanaje, en una estación de servicio. El espacio muestral es discreto (numerablemente infinito). El espacio muestral se puede definir así:

S= {0, 1, 2, 3, 4, 5,6,...}.

DEFINICIÓN 3.4. *Espacio Muestral Continuo*.

Es un espacio muestral que contiene un número infinito de posibilidades iguales al número de puntos que existen en un segmento de línea.

Ejemplo 3.4. Supóngase el experimento que consiste en investigar la distancia que recorrerá un automóvil en un trayecto de prueba prescrito con 8 litros de gasolina.

DEFINICIÓN 3.5. *Evento.*

Es un subconjunto de un espacio muestral. Debido a esto, un evento puede estar formado por todo el espacio muestral, parte de éste o por el conjunto vacío $\emptyset$, el cual no contiene puntos muestrales.

Ejemplo 3.5. En el ejemplo 3.1, un evento puede estar definido por los puntos muestrales en los cuales se rompan dos o más hilos. Este evento se puede denotar por:

A={{0,1,1},{1,1,0},{1,0,1},{1,1,1}}.

DEFINICIÓN* 3.6.Complemento de un Evento.*

Es el conjunto de puntos muestrales, del espacio muestral, que no están en el evento. Si el evento lo denotamos por **A**, el complemento esta denotado por **A'**.

Ejemplo 3.6. En el ejemplo 3.5, el complemento de este evento sería definido por los puntos muestrales en los cuales se rompan menos de dos hilos. Este evento se puede denotar por:

A'={{0,0,0},{0,0,1},{0,1,0},{1,0,0}}.

DEFINICIÓN 3.7. *Intersección de dos Eventos.*

Es el evento que contiene los puntos muestrales comunes de los dos eventos. Si denotamos por **A** y por **B** los dos eventos, entonces la intersección se denota por $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$**.**

Ejemplo 3.7. Sea el evento **A** definido en el ejemplo 3.5 y sea el evento **C** definido por los puntos muestrales de que se rompan dos hilos. Este evento se denota por:

C= {{0,1,1}, {1,0,1}, {1,1,0}}.

La intersección de estos dos eventos sería: $\mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \mathbf{C}$**.**

Ejemplo 3.8. La intersección de los eventos de los ejemplos 3.5 y 3.6 sería vacía; ya que no tienen puntos en común. Esto se denota por $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}' = \emptyset$**.**

DEFINICIÓN 3.8. *Eventos Mutuamente Excluyentes.*

Se dice que dos o más eventos son mutuamente excluyentes si no ocurren al mismo tiempo, y además la ocurrencia de uno de ellos impide la ocurrencia del otro. La intersección de estos eventos es vacía.

Ejemplo 3.9. En una sala están reunidos 4 personas, que pertenecen respectivamente al departamento de ventas, al departamento de compras, al departamento de producción y al departamento de personal de una empresa que fabrica neumáticos para camiones. Pertenecer a ventas, producción o personal, excluye pertenecer a compras.

DEFINICIÓN 3.9. *Eventos Independientes.*

Se dice que dos eventos son independientes, si la ocurrencia de uno de ellos, no excluye la ocurrencia del otro.

Ejemplo 3.10. De los artículos producidos por una fábrica, 40% provienen de la línea 1 y el 60% de la línea 2. La escogencia al azar de artículos de cada línea, para determinar si tienen defectos, son eventos independientes.

DEFINICIÓN 3.10. *Unión de dos Eventos.*

Es el evento formado por todos los puntos muestrales que pertenecen a uno, al otro, o a ambos eventos. Si denotamos por **A** y **B,** dos eventos, la unión de ellos se denota por **A$\cup$B.**

Ejemplo 3.11. Sean los eventos **A** y **C** definidos en los ejemplos 3.5 y 3.7; la unión de estos eventos es el evento **A.** Se denotan de la siguiente manera **A$\cup$C= A.**

Observación 3.1. *Diagramas de Venn.*

Estos diagramas se utilizan para verificar relaciones que se pueden establecer entre conjuntos. El espacio muestral está representado por un rectángulo y los eventos a través de cualquier figura geométrica, que se dibujan dentro del rectángulo. A continuación se ilustra un diagrama de Venn.

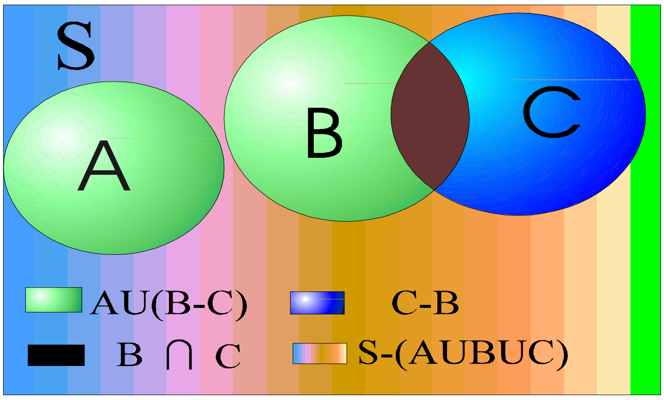


Gráfico 3.2. Diagramas de Venn.

Ejemplo 3.12. Veintidós automóviles se sacan de una línea de ensamblaje y se examinan para ver si tienen defectos. Doce de los automóviles no tienen defectos, nueve tienen defectos de acabado exterior, y cuatro tienen defectos en su ensamblaje. Sea ***A,*** el evento formado por el conjunto de automóviles que tienen defectos de ensamblaje y sea

B el evento formado por el conjunto de automóviles que tienen defectos en el acabado exterior. Elabore un diagrama de Venn para simbolizar:

a) El evento formado por los automóviles que tienen los dos tipos de defectos.
b) El evento formado por los automóviles que tienen por lo menos un tipo de defectos.
c) El evento formado por los automóviles que no tienen defectos.
d) El evento formado por los automóviles que tienen exactamente un tipo de defecto.

Solución:

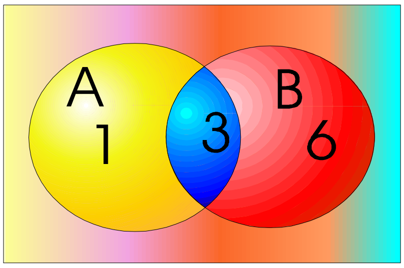


Gráfico 3.3. Diagrama de Venn.

a Los automóviles con ambos tipos de defectos deben estar en A y en B; por lo tanto, este evento se puede representar con $A \cap B$ Como sólo 10 de los automóviles tienen defectos; y A contiene 4 con defectos y B contiene 9 con defectos, entonces 3 automóviles están en la intersección, es decir tienen los dos tipos de defectos.

b Los automóviles que tienen por lo menos un tipo de defecto deben tener un defecto de ensamblaje o un defecto de acabado. Este evento está representado por $A \cup B$; Por lo tanto existen 10 automóviles que tienen por lo menos un tipo de defecto.

c El evento representado por los automóviles que no tienen defectos es el complemento del evento de los que tienen defectos; es decir, $(A \cup B)^c$, por lo tanto existen 12 automóviles que no tienen defectos.

d El evento representado por los automóviles que tienen exactamente un tipo de defecto es $(A \cup B) - (A \cap B)$, por lo tanto existen 7 automóviles con un sólo tipo de defecto.

CONTEO DE PUNTOS MUESTRALES.

Teorema 3.1. *Regla de la Multiplicación.*

Si una operación puede realizarse en n_1 maneras y si para cada una de éstas se puede efectuar una segunda operación en n_2 maneras, y para cada una de las dos primeras se puede efectuar una tercera operación en n_3 formas, y así sucesivamente; entonces la secuencia de k operaciones puede llevarse a cabo en $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$ maneras.

Ejemplo 3.13. En un estudio sobre economía de combustible, se prueba cada uno de 5 automóviles, utilizando 3 tipos de gasolina en relación con su octanaje, en 7 lugares geográficos del país. Si se utilizan 3 conductores en el estudio y las corridas de prueba se llevan a cabo una vez bajo cada uno de los diferentes conjuntos de condiciones ¿Cuántas corridas de prueba se necesitan?

Solución:

Sean las siguientes designaciones:

n_1=5 Automóviles	n_2=3 tipos de Gasolina
n_3= 7 lugares	n_4=3 Conductores

Lo anterior expresa la manera en las cuales se pueden efectuar cada operación, por lo tanto las corridas de prueba que se necesitan son: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 = 31$

DEFINICIÓN 3.11. *Permutación.*

Es el número de arreglos diferentes en un orden específico.

DEFINICIÓN 3.12.

El número de permutaciones de n objetos distintos es

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1$$

Teorema 3.2.

El número de permutaciones de *n* objetos diferentes, tomados *r* a la vez es:

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad Si\ n = r, entonces\ P_{n,r} = n!$$

Ejemplo 3.14. Un mecanismo de control electrónico necesita 6 circuitos idénticos de memoria ¿De cuántas maneras se puede armar este mecanismo, usando los seis circuitos?

Solución:

Sea n=6 (número de circuitos); ya que son tomados los seis circuitos a la vez, se trata de una permutación, donde n= r. Por tanto, la cantidad de maneras en que puede armarse el mecanismo es:

$$P_{6,6} = 6! = 720$$

Ejemplo 3.15. En relación con ejemplo 3.14. Supóngase que los circuitos son tomados dos a la vez ¿De cuántas maneras puede ser armado el mecanismo?

$$P_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$$

Teorema 3.3.

El número de permutaciones diferentes de n objetos, de los cuales n_1 son de una clase, n_2 de una segunda clase, ... , n_k de una k- ésima clase, es:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_k!}$$

Ejemplo 3.16. Se necesitan instalar 5 bombillos de 45 vatios, 8 bombillos de 60 vatios y 4 bombillos de 100 vatios ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una instalación en serie?

Solución:

El total de objetos es n=17 bombillos discriminados en:

n_1=5 bombillos de 45 vatios.

n_2=8 bombillos de 60 vatios.

n_2=4 bombillos de 100 vatios.

El número total de arreglos distintos es:

$$\frac{17!}{5! \cdot 8! \cdot 4!} = 3063060$$

DEFINICIÓN 3.13. *Combinación.*

Es el número de arreglos distintos en el cual no se especifica el orden o colocación de los elementos.

Teorema 3.4.

El número de combinaciones de n objetos distintos tomados r a la vez es:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Ejemplo 3.17. En una empresa se necesita elegir 5 obreros de un grupo de 24 obreros ¿De cuántas maneras diferentes se puede elegir el grupo de obreros?

Solución:

Este ejemplo representa una combinación, ya que los grupos formados por los mismos obreros, no importando el orden en que se escogieron, representan el mismo grupo.

Se tiene *n*=24 obreros; de los cuales se van a tomar *r*=5.

El total de maneras diferentes es:

$$\binom{24}{5} = \frac{24!}{5!\,(24-5)!} = 42504$$

PROBABILIDAD DE UN EVENTO.

DEFINICIÓN 3.14.

Supóngase que un espacio muestral ***S*** está asociado con un experimento. A cada evento ***A*** definido en ***S***, se le asigna un número, ***P(A)***, denominado probabilidad de ***A***, de tal manera que se cumplen los axiomas siguientes:

$$Axioma\ 1:\quad 0 \le P(A) \le 1$$

$$Axioma\ 2:\quad P(\emptyset) = 0$$

$$Axioma\ 3:\quad P(S) = 1$$

DEFINICIÓN 3.15.

Si un experimento puede dar como resultado cualquiera de ***N*** resultados diferentes igualmente probables, y si exactamente ***n*** de estos resultados corresponde al evento ***A***, entonces la probabilidad del evento ***A*** es:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Observación 3.2.

Aunque el valor calculado de una probabilidad se encuentra en el intervalo [0,1], también suele interpretarse como una proporción (frecuencia relativa). Por ejemplo, si la probabilidad es de 0,23, esto equivale al 23%.

Ejemplo 3.18: Un empresario desea saber la probabilidad de escoger un artículo defectuoso en la producción de vasos plásticos; para ello tomo una muestra de 500 vasos, mediante un proceso de muestreo, y encuentra que 17 vasos tienen defectos. Con estos datos calculó la probabilidad, quedando así:

A: El evento formado por los vasos plásticos que tienen defectos.

n=17 vasos (resultados en el evento A).

N=500 vasos (Total de resultados posibles).

$$P(A) = \frac{17}{500} = 0{,}034$$

.

En conclusión, la probabilidad de escoger un artículo defectuoso en la producción de vasos plásticos es 0,034. Equivalentemente, en porcentaje, la probabilidad es del 3,4%.

Teorema 3.6. *Reglas Aditivas***.**

Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Corolario 1.

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Corolario 2.

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Ejemplo 3.19. Un sistema contiene dos componentes C_1 y C_2 y se conecta de tal manera que éste funciona si cualesquiera de los componentes funcionan. Se sabe que la probabilidad de que el sistema funcione con sólo el componente C_1 es 0,8 y la probabilidad de que funcione con sólo el componente C_2 es 0,7; y la probabilidad de que funcione con ambos componentes es 0,71. Calcular la probabilidad de que el sistema funcione.

Solución:

Sea *A:* el evento de que el sistema funcione con sólo el componente C_1.

Sea *B*: el evento de que el sistema funcione con sólo el componente C_2.

Sea $A \cap B$: el evento de que el sistema funcione con ambos componentes.

$$P(A) = 0{,}8 \qquad P(B) = 0{,}7 \qquad P(A \cap B) = 0{,}71$$

Entonces:

$$P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}71 = 0{,}79$$

Ejemplo 3.20. Se tienen 8 tarjetas de computadora de la marca T_1 , 5 tarjetas de la marca T_2 y 4 tarjetas de la marca T_3 ¿Cuál es la probabilidad de que se escoja una tarjeta de la marca T_1 o una de la marca T_2?

Solución:

Sea *A*: el evento de seleccionar la tarjeta de la marca T_1.

Sea *B:* el evento de seleccionar la tarjeta de la marca T_2.

La probabilidad de escogencia de una tarjeta de la marca T_1 es

$$P(A) = \frac{8}{17} = 0{,}47$$

.

La probabilidad de escogencia de una tarjeta de la marca T_2 es

$$P(B) = \frac{5}{17} = 0{,}29$$

Los dos eventos son mutuamente excluyentes, ya que, al tomar una tarjeta de una marca elimina la posibilidad de escogencia de la otra.

La probabilidad de escogencia de una tarjeta de una de estas dos marcas es:

$$P(A \cup B) = 0{,}47 + 0{,}29 = 0{,}76$$

Teorema 3.7.

Si ***A*** y ***A'*** son eventos complementarios, entonces:

$$P(A) + P(A') = 1$$

Ejemplo 3.21. Las probabilidades de que en una estación de servicio sirvan gasolina a 0, 1, 2, 3, 4, 5 o más automóviles durante un período de 30 minutos, son de: 0,03; 0,18; 0,24; 0,28; 0,10; 0,17 respectivamente. Encuentre la probabilidad de que, en un período de 30 minutos, 4 o más automóviles reciban gasolina.

Solución:

A: es el evento de que 4 o más automóviles reciban gasolina.

A': es el complemento del evento ***A***.

$$P(A')= 0{,}03+0{,}18+0{,}24+0{,}28=0{,}73.$$

$$P(A)=1-P(A')= 1-0{,}73=0{,}27.$$

***DEFINICIÓN* 3.16.**

La probabilidad condicional de un evento ***A***, dado que el evento ***B*** ha ocurrido, es igual a:

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Siempre que ***P(A)>0***. El símbolo ***P(A\ B)*** se lee "la probabilidad de ***A*** dada la ocurrencia de ***B***.

Ejemplo 3.22. Una compañía de transporte cuenta con un grupo de camiones movidos por gasolina o por gasoil, lleva registros anuales de las reparaciones generales de los motores. En la tabla siguiente se representan la cantidad de kilómetros recorridos por un camión antes de tener que ser sometido a la revisión necesaria para cada tipo de vehículo.

KILÓMETROS RECORRIDOS POR UN VEHÍCULO ANTES DE SU REVISIÓN

Kilómetros recorridos	Vehículos con		Total
	Motor de Gasolina	Motor de Gasoil	
0------20.000	36	11	47
20.001-------40.000	58	55	113
40.001 o más	12	23	35
Total	106	89	195

Tabla 3.1.Distribución de frecuencias.

¿De qué manera influye el tipo de motor en la probabilidad?

Solución:

Se trata de una probabilidad condicional, ya que se desea saber la probabilidad de que un vehículo haya tenido un recorrido mayor a 40.000 km, antes de ser reparado, de acuerdo al tipo de motor (a gasolina o a gasoil).

Sea *A*: el evento de que el vehículo funcione con gasolina.

Sea *B*: el evento de que el vehículo funcione con gasoil.

Sea *C*: el evento de que el vehículo que rebase 40.000 km, necesite reparación.

La probabilidad de que un vehículo funcione con gasolina es:

$$P(A) = \frac{106}{195} = 0{,}54$$

$P(A \cap C)$: Probabilidad de que el vehículo sea de gasolina y necesite ser reparado porque rebasó los 40.000 km es:

$$P(A \cap C) = \frac{12}{195} = 0{,}06$$

P(C| A): Probabilidad de que el vehículo sea reparado, dado que es de gasolina es:

$$P(C\backslash A) = \frac{0{,}06}{0{,}54} = 0{,}11$$

La probabilidad de que un vehículo funcione con gasoil es:

$$P(B) = \frac{89}{195} = 0{,}46$$

$P(B \cap C)$: Probabilidad de que el vehículo sea de gasoil y necesite ser reparado porque rebasó los 40.000 km. es:

$$P(B \cap C) = \frac{23}{195} = 0{,}12$$

P(C |B): probabilidad de que el vehículo sea reparado, dado que es de gasoil

$$P(C\backslash B) = \frac{0{,}12}{0{,}46} = 0{,}26$$

Como se puede observar, la probabilidad se ve afectada por el hecho de que los motores usan distinto tipo de combustible.

Observación 3.3. *Muestreo con reposición*

La probabilidad de un evento donde se extraen dos o más artículos, no se ve afectada cuando se extrae el primero y se repone al sistema de donde se extrajo.

Observación 3.4. *Muestreo sin reposición*

Al hacer un muestreo sin reposición, el resultado de la primero extracción influye en los resultados posibles de la segunda. En este caso, se dice que los sucesos no son independientes. Otro hecho importante en este tipo de muestreo es que después de haber obtenido un resultado en la primera extracción, es mayor la probabilidad de cada uno de los resultados restantes que serán seleccionados en la segunda extracción. Debe tenerse en cuenta que la diferencia entre el muestreo con reposición y sin reposición, es despreciable cuando la población es grande respecto a la muestra.

Ejemplo 3.23. En una caja se tienen 8 bujías para automóviles. Es evidente que cada bujía tiene la misma probabilidad de ser seleccionada; es decir, 1/8. Supóngase que se extrae una de ellas y luego se repone a la caja, la segunda bujía que se extrae tiene la misma probabilidad que la primera; es decir 1/8. No obstante, si no se repone a la caja, la probabilidad de la segunda bujía es diferente a la de la primera; es decir, 1/7. Aquí se evidencia que al reponer o no un artículo, puede alterarse las probabilidades.

Teorema 3.8. *Reglas multiplicativas.*

Si ***A*** y ***B*** son eventos en un espacio muestral ***S***, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \backslash A) \quad Si \quad P(A) \neq 0$$
$$P(A \cap B) = P(B)P(A \backslash B) \quad Si \quad P(B) \neq 0$$

Corolario 1.

Si ***A*** y ***B*** son eventos independientes, entonces:

$$P(A \backslash B) = P(A)$$
$$P(B \backslash A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Corolario 2.

Si en un experimento pueden ocurrir eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 A_3 \cap \dots \cap A_k)$$
$$= P(A_1)P(A_2 \backslash A_1)P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k \backslash A_1 \cap A_2 A_3 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

Si los eventos son independientes:

$$P(A_1 \cap A_2 A_3 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_k)$$

Ejemplo 3.24. Si elegimos al azar en sucesión dos tarjetas de vídeo para computadora de un cargamento de 250, de los cuales, 17 están defectuosos ¿Cuál es la probabilidad de que ambas estarán defectuosos?

Solución:

Sea A: el evento de que la primera unidad esté defectuosa.

B: el evento de que la segunda esté defectuosa.

$B\backslash A$: el evento de que la segunda unidad esté defectuosa, dado que la primera lo está.

$A \cap B$: El evento de que la primera y segunda unidad esté defectuosa.

$$P(A) = \frac{17}{250} = 0{,}07$$

$$P(B\backslash A) = \frac{16}{249} = 0{,}6$$

$$P(A \cap B) = (0{,}07)(0{,}06) = 0{,}004$$

Observación 3.5.

En el ejercicio 3.24 se observa que el objeto es tomado sin reposición en el lote, esto influye en el cálculo de la probabilidad de la selección del segundo objeto.

Ejemplo 3.25. En una fábrica existen dos trenes de producción. Se sabe en el primero 12 de 34 piezas son defectuosas; y en el otro tren, 9 de 40 piezas son defectuosas ¿Cuál es la probabilidad de escoger una pieza de cada tren que tenga defectos?

Solución:

Los eventos son independientes, ya que se trata de trenes diferentes.

Sea A: el evento de seleccionar una pieza del primer tren.

Sea B: el evento de seleccionar una pieza del segundo tren.

Sea $A \cap B$: el evento de seleccionar una pieza de cada tren.

$$P(A) = \frac{12}{34} = 0,35$$

$$P(B) = \frac{9}{40} = 0,23$$

$$P(A \cap B) = (0,35)(0,23) = 0,08$$

Ejemplo 3.26. Una caja de fusibles contiene 25 piezas, de las cuales 8 están defectuosas. Si se seleccionan al azar tres de los fusibles y se sacan de la caja en sucesión sin reemplazo ¿Cuál es la probabilidad de que los tres fusibles estén defectuosos?

Solución:

Sea A*:* el evento de que el primer fusible esté defectuoso.

Sea B: el evento de que el segundo fusible esté defectuoso.

Sea C: el evento de que el tercer fusible esté defectuoso.

Sea $B| A$*:* el evento de que el segundo fusible, dado que el primero lo está.

Sea $C\backslash A \cap B$*:* el evento de que el tercero esté defectuoso, dado que los dos anteriores lo están. Entonces:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B\backslash A)P(C\backslash A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{8}{25} = 0,32 \qquad P(B\backslash A) = \frac{7}{24} = 0,29 \qquad P(C\backslash A \cap B) = \frac{6}{23} = 0,26$$

$$P(A \cap B \cap C) = (0,32)(0,29)(0,26) = 0,02$$

DEFINICIÓN 3.17. *Partición de un espacio muestral.*

Los eventos B_1, B_2, B_3,..., B_k determinan una partición del espacio muestral si se cumplen con las dos condiciones siguientes:

$$S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_k$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \qquad para \;\; i \neq j$$

Teorema 3.9. *Regla de eliminación.*

Si los eventos B_1, $B2$, $B3$,..., Bk constituyen una partición del espacio muestral S tal que $P(B_i) \neq 0$ para i=1, 2,3,..., k, entonces, para cualquier evento A de S,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \backslash B_i)$$

Observación 3.6.

El teorema anterior es útil en los casos donde la fase intermedia admite K alternativas, cuya incidencia se denota por $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$.

La relación se puede representar a través de un diagrama de árbol.

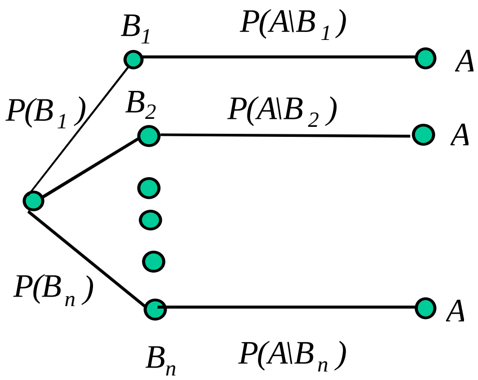


Gráfico 3.4 Diagrama de árbol

Ejemplo 3.27. Una planta de ensamblado recibe sus reguladores de corriente de tres diferentes distribuidores: 45% del distribuidor B_1 , 35% del distribuidor B_2, y 20% del distribuidor B_3. Si el 85% de los reguladores del distribuidor B_1, el 76% de los reguladores del distribuidor B_2, y el 60% de los reguladores del distribuidor B_3, tienen un rendimiento de acuerdo con las especificaciones. Calcule la probabilidad de que cualquier regulador de voltaje recibido por la planta dé un rendimiento según las especificaciones.

Solución:

B_1: el evento de recibir reguladores del distribuidor B_1.

B_2: el evento de recibir reguladores del distribuidor B_2.

B_3: el evento de recibir reguladores del distribuidor B_3.

A: el evento de que el regulador de voltaje recibido por la planta dé un rendimiento según especificaciones.

$A\backslash B_1$: el evento de que el regulador de voltaje recibido esté bajo especificaciones, dado que fue enviado por el distribuidor B_1.

$A\backslash B_2$: el evento de que el regulador de voltaje recibido esté bajo especificaciones, dado que fue enviado por el distribuidor B_2.

$A\backslash B_3$: el evento de que el regulador de voltaje recibido esté bajo especificaciones, dado que fue enviado por el distribuidor B_3.

El diagrama de árbol que establece las relaciones anteriores es:

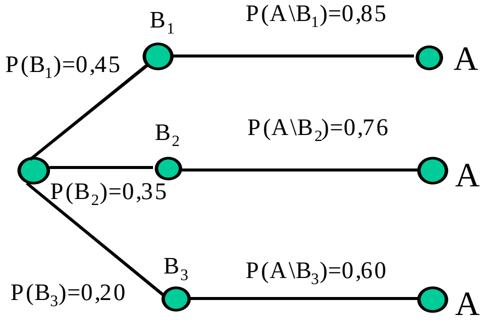


Gráfico 3.5 Diagrama de árbol.

$$P(A) = P(B_1)P(A\backslash B_1) + P(B_2)P(A\backslash B_2) + P(B_3)P(A\backslash B_3)$$

$P(B_1)=0{,}45$ $\quad$ $P(B_2)=0{,}35$ $\quad$ $P(B_3)=0{,}20$

$P(A\backslash B_1)=0{,}85$ $\quad$ $P(A\backslash B_2)=0{,}76$ $\quad$ $P(A\backslash B_3)=0{,}60$.

$$P(A) = (0{,}45)(0{,}85) + (0{,}35)(0{,}76) + (0{,}20)(0{,}60) = 0{,}77$$

En conclusión, la probabilidad de que cualquier regulador de voltaje recibido por la planta, dé un rendimiento según las especificaciones es 0,77. Equivalentemente el 77%.

Teorema 3.10. *Teorema de Bayes.*

Si los eventos $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ constituyen una partición del espacio muestral S tal que $P(B_k) \neq 0$ para i=1, 2,3,..,k, entonces, para cualquier evento A de S tal que $P(A) \neq 0$.

$$P(B_r \backslash A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A \backslash B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \backslash B_r)}$$

$$para\ r = 1,2,3, \ldots, k$$

Observación 3.5.

Este teorema proporciona una fórmula para calcular la probabilidad de que el "efecto" A fue "causado" por el evento B_i.

El numerador, en el teorema de Bayes, expresa la probabilidad de llegar a A por la i- ésima rama del árbol y que la expresión del denominador es la suma de las probabilidades de llegar a A por las n ramas del árbol.

Ejemplo 3.28. En relación con ejemplo 3.27, supóngase que se desea conocer la probabilidad de que un regulador de voltaje específico, cuyo rendimiento corresponde a las especificaciones, provenga del distribuidor B_2.

Solución:

El teorema de Bayes, aplicado a este ejemplo, quedaría así:

$$P(B_2 \backslash A) = \frac{P(B_2)P(A \backslash B_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A \backslash B_i)}$$

$$P(B_2 \backslash A) = \frac{(0,35)(0,76)}{(0,45)(0,85) + (0,35)(0,76) + (0,20)(0,60)} = 0,35$$

En conclusión, La probabilidad de que un regulador de voltaje específico, cuyo rendimiento corresponde a las especificaciones, provenga del distribuidor B_2 es 0,35. Equivalentemente 35%.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Cuatro personas, numerados como 1, 2, 3 y 4, solicitan dos puestos idénticos en una compañía. Los puestos se otorgan seleccionando dos de los aspirantes al azar:
   a Establezca el espacio muestral.
   b Establezca el evento *A* de que si el sujeto 1 es seleccionado, el segundo sea seleccionado del resto.
   c Repita el aparte b, si el sujeto 2 sea seleccionado. Evento *B*
   d Halle $A \cup B$.
   e Halle $A \cap B$.
   f Halle *A*'.

.

2. Un inspector de edificios debe revisar la instalación eléctrica de un nuevo edificio de departamentos, el Lunes, Miércoles, Viernes y Sábado; a las 9 am, 11 am y a las 2 pm. Dibuje un diagrama de árbol que represente el espacio muestral.

3. A un grupo de electricistas se le preguntan si es muy fácil, fácil, regular, difícil o muy difícil reparar un modelo específico de automóvil; codifique las respuestas como 1, 2, 3, 4,5, respectivamente. Si *A*= {1,2}, *B*= {3,4}, *C*= {4,5}. Halle:
   a $A \cup B$.
   b $A \cap B$.
   c $A \cup B'$.
   d C'.
   e Escriba con palabras el significado de cada resultado.

4. De 25 computadoras disponibles en un almacén, 10 de ellas tienen tarjetas adaptadoras para una impresora, 5 tienen tarjetas adaptadoras para un modem, y 13 no tienen ninguna de éstas. Utilizar *A*, para representar el evento de aquellas que tengan tarjetas de impresora, *B* para representar el evento de las que tienen tarjetas de modem y, luego, representar en un diagrama de Venn los siguientes eventos, así como mencionar el número de computadoras que hay en cada uno.
   a Las que tengan ambas tarjetas.
   b Las que no tengan tarjetas alguna.
   c Las que sólo tengan tarjetas para impresora.
   d Las que tengan exactamente una de las tarjetas.

5. El constructor de una Urbanización ofrece a sus posibles compradores viviendas las cuales se pueden seleccionar entre 5 diseños, con tres diferentes sistemas de calefacción, un garaje cerrado o abierto, y un patio o un porche cubierto. ¿De cuántas formas diferentes están disponibles para un comprador?

6. Un envío de 15 celulares contienen 4 defectuosos. ¿De cuántas formas puede un distribuidor adquirir 6 de esos aparatos y recibir cuando menos 3 de los defectuosos?

7. Una caja con 15 baterías contiene una que está defectuosa.
   a ¿En cuántas formas diferentes un supervisor puede elegir 4 de estas baterías y obtener la defectuosa?
   b ¿En cuántas formas diferentes un supervisor puede elegir 4 de estas baterías y obtener ninguna defectuosa?

8. Con respecto al ejercicio 7, supóngase que dos baterías están defectuosas.
   a ¿De cuántas maneras diferentes puede el supervisor escoger tres de las baterías y obtener ninguna batería defectuosa?

b. ¿De cuántas maneras diferentes puede el supervisor escoger tres de las baterías y obtener ambas baterías defectuosas?
c. ¿De cuántas maneras diferentes puede el supervisor escoger tres de las baterías y obtener una defectuosa?

9. Una tienda de artículos posee en existencia 9 clases de cocinas, 7 tipos de neveras y 7 clases de televisores ¿En cuántas formas diferentes pueden elegirse dos artículos de cada clase?

10. Una operación de ensamblaje en una fábrica consta de 5 pasos, que se pueden llevar a cabo en cualquier orden. Si el fabricante quiere comparar los tiempos de ensamblaje para cada arreglo posible de los pasos, ¿cuántos arreglos habrá en el experimento?

11. Para usar un telecajero se requiere de la selección de un conjunto de cuatro dígitos en sucesión. Supóngase que no se utiliza el mismo dígito dos veces. Encuentre el número total de los posibles arreglos

12. De un conjunto de 7 hombres y 6 mujeres ¿cuántas cuadrillas de trabajadores de de 9 miembros se pueden formar si cada uno de ellos debe contener cuando menos 4 mujeres?

13. Se sacan 12 cajas recibidas en diferentes épocas de cierto proveedor. Cada caja contiene 600 artículos con las mismas especificaciones. Al examinar el contenido de las cajas se encuentra en cada caja el siguiente número de piezas con especificaciones equivocadas, debido a errores al empacar: $\{7, 4, 9, 5, 8, 10, 12, 8, 9, 9, 6, 9\}$ ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una pieza con especificaciones erróneas en una caja cualquiera enviada por el proveedor?

14. Se tienen cinco Lanchas, numeradas del 1 al 5, disponibles para su uso, y la Lancha número 3 tiene un defecto. Las Lanchas 1 y 3 provienen del fabricante Multilanchas y el resto del fabricante Lanchas Lara. Supóngase que se seleccionan, uno tras otro, al azar dos Lanchas para someterlas a una prueba de velocidad. Sea ***A*** el evento en el que se selecciona la Lancha defectuosa y ***B*** el evento en el que por lo menos una de las Lanchas se obtuvo del fabricante Multilanchas. Halle ***P(A)*** *y* ***P(B).*** Sug. elabore un diagrama de árbol.

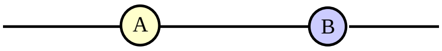
15. Si 4 de 21 encendidos electrónicos están defectuosos y 5 de ellos se escogen al azar, ¿Cuál es probabilidad de que solamente uno de los defectuosos sea escogido?

16. Las probabilidades de que un producto para pulir la pintura de los automóviles califique como, muy malo, malo, regular, bueno, muy bueno, o excelente son: $\{(0{,}08),(0{,}24),(0{,}12),(0{,}30),(0{,}06),(0{,}20)\}$, respectivamente.
    a) ¿Cuáles son las probabilidades de que lo califiquen como muy malo, malo, regular o excelente?
    b) ¿Cuáles son las probabilidades de que lo califiquen como bueno, muy bueno, malo?

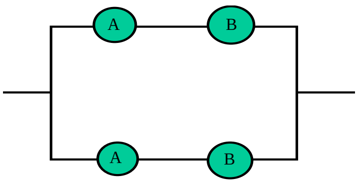
17. Supóngase que dos transformadores defectuosos han sido incluidos en un envío de seis transformadores. El comprador empieza a probar los seis transformadores uno a uno.
    a ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre el último transformador defectuoso en la cuarta prueba?
    b ¿Cuál es la probabilidad de que no haya necesidad de probar más de cuatro transformadores para encontrar los dos defectuosos?
    c Dado que uno de los dos defectuosos ha sido identificado en las primeras dos pruebas ¿Cuál es la probabilidad de que el otro defectuoso se encuentre en la tercera o cuarta prueba?

18. Por problemas de empaquetado se mezclaron 42 tornillos de alta resistencia con 30 tornillos comunes, de igual apariencia, por lo que resulta imposible diferenciarlos. Si se extraen dos tornillos (uno después del otro) ¿Cuál es la probabilidad de que uno sea de alta resistencia y el otro sea un tornillo común?

19. Dos máquinas presentan dos componentes A y B. Las confiabilidades de que ambos componentes trabajen de manera correcta son 0,6 y 0,8, respectivamente. Supóngase que A y B funcionan de manera independientes entre sí, determine la confiabilidad de cada sistema si,
   a Ambos componentes deben funcionar correctamente para que el sistema siguiente también lo haga



   b Los componentes están conectados en paralelo de manera que, si cualquier enlace A- B funciona de manera correcta, entonces el sistema siguiente también lo hará



20. Una red comunicaciones en un aeropuerto posee un sistema de seguridad contra fallas. Si en este sistema falla la línea A, se utiliza la línea B como una emergencia; si también falla la línea B, se utiliza la línea C como una desviación. La probabilidad de que falle cualquiera de estas líneas es 0,2 y las fallas de estas líneas son independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que este sistema de tres líneas no falle totalmente?

21. En una fábrica de motores hay 3 máquinas para pistones. La máquina A produce el 50% de los pistones; la máquina B el 32% y la máquina C el resto. Se ha observado que el 7% de los pistones producidos por la máquina A salen fuera de

especificaciones, al igual que el 8% de los producidos por la máquina B, y el 6% de los producidos por la máquina C. Si seleccionamos al azar un pistón del lote general de producción de las tres máquinas ¿Cuál es la probabilidad de que este fuera de especificaciones?

22. En una línea de inspección, un supervisor, escoge las piezas las cuales deben pasar por una inspección completa; 12% de todos los artículos producidos son defectuosos; 56% de todos los artículos defectuosos y 30% de los no defectuosos pasan por una inspección completa ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo sea defectuoso dado que pasó por una inspección completa?

CAPÍTULO 4

VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Por lo general en la teoría de probabilidades sólo se toman en cuenta ciertos aspectos particulares de los resultados de algún experimento. Por ejemplo, cuando se estudia la producción de bombillos en gran escala, puede interesar su durabilidad, pero no su precio; al examinar la producción en una empresa puede importar sólo el número de artículos defectuosos. Estos números están asociados con elementos al azar, es decir, con variables aleatorias. Al estudiar estas variables, también es indispensable establecer las distribuciones de probabilidad.

En este capítulo se realizará un estudio de las variables aleatorias y sus distribuciones de probabilidad.

VARIABLE ALEATORIA.

DEFINICIÓN 4.1. *Variable Aleatoria.*

Es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral.

Observación 4.1.

Las variables aleatorias pueden ser clasificadas en discretas y en continuas. Las primeras pueden tomar valores enteros finitos o contables, en cambio las segundas pueden tomar valores reales.

DEFINICIÓN 4.2. *Espacio Muestral Discreto.*

Es un espacio muestral que contiene un número finito de posibilidades o una secuencia sin final con igual número de elementos que números enteros.

DEFINICIÓN 4.3. *Espacio Muestral Continuo.* Es un espacio muestral que contiene un número infinito de posibilidades iguales al número de puntos que se encuentran en un segmento de línea.

Observación 4.2.

La variable aleatoria se denotará con letras mayúsculas y negrillas, por ejemplo ***X***; el valor de la variable por minúsculas cursivas, por ejemplo *x*.

DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE PROBABILIDAD.

DEFINICIÓN 4.4. *Distribución discreta de probabilidad.*

El conjunto de pares $(x, f(x))$ es una ***función de probabilidad*** o una ***distribución de probabilidad*** de la variable aleatoria discreta ***X,*** si para cada posible resultado *x*:

$$1)\ f(x) \geq 0$$

$$2)\ \sum_{x} f(x) = 1$$

$$3)\ P(X = x) = f(x)$$

Ejemplo 4.1. Un taladro puede ser clasificado de acuerdo a: su precio en barato B_1, costoso B_2; costo de reparación, barato C_1 y costoso C_2; respaldo de repuestos, con respaldo R_1, sin respaldo R_2. Supóngase que se desea estudiar el evento constituido por el taladro que tenga las características de barato (B_1), barato de reparar (C_2) y respaldo de repuesto (R_2)

A continuación se representan, en un diagrama de árbol, los distintos elementos del espacio muestral, sus probabilidades y valor de la variable aleatoria.

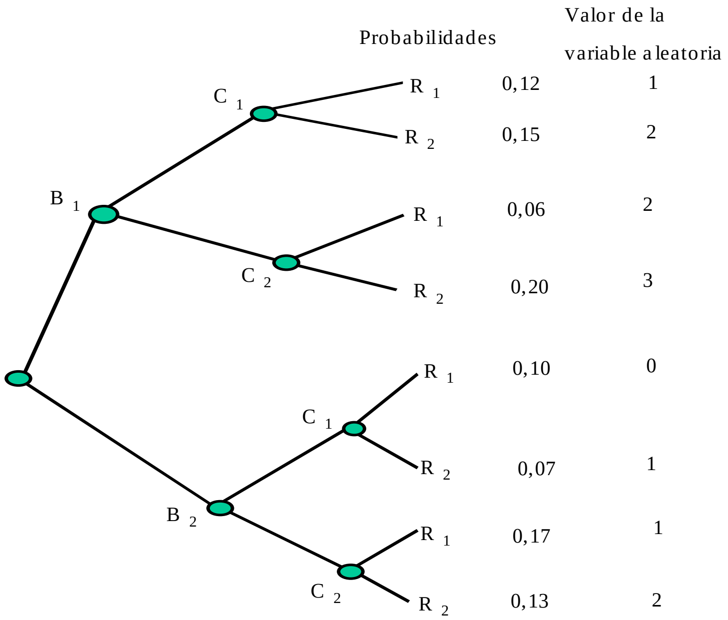


Gráfico 4.1.Diagrama de árbol

La distribución de probabilidad se obtiene sumando los valores de probabilidad para la variable, por ejemplo: Para $x = 1,\ la\ probablidad\ P(X = 1) = f(1) = 0{,}12 + 0{,}07 + 0{,}17 = 0{,}36$.

La distribución de probabilidad para esta variable aleatoria viene dada por la siguiente tabla, donde se especifica el valor de la variable en cada caso y su respectiva probabilidad.

x	***0***	***1***	***2***	***3***
Probabilidad	*0,10*	*0,36*	*0,34*	*0,20*

Tabla 4.1. Distribución de probabilidad.

La variable aleatoria relacionada con el evento asume valores finitos, es por lo tanto una variable aleatoria discreta.

Se puede señalar que la tabla 4.4 representa una distribución discreta de probabilidad, debido a que cumple con las condiciones de la definición 4.4; es decir:

Para cualquier *x* se tiene que:

1) $f(x) \geq 0$, por ejemplo $f(1) = 0{,}36$

2)

$$\sum_{x} f(x) = 0{,}10 + 0{,}36 + 0{,}34 + 0{,}20 = 1$$

3) Para cualquier x se tiene que: $P(X = x) = f(x)$

La distribución discreta de probabilidad también se puede representar a través de un histograma de probabilidad o un diagrama de barras; esto se ilustra a continuación:

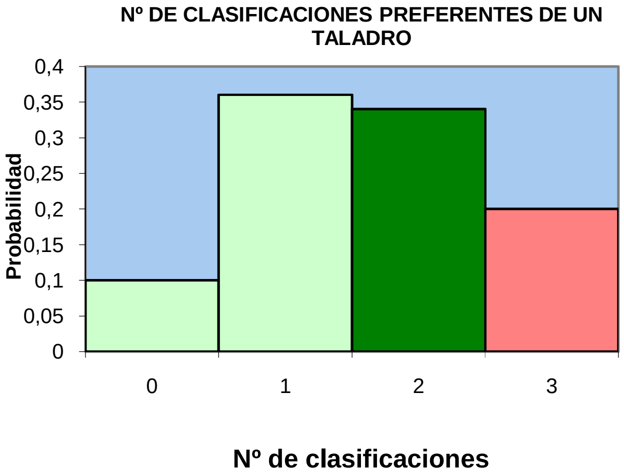


Gráfico 4.2. Histograma de probabilidad.

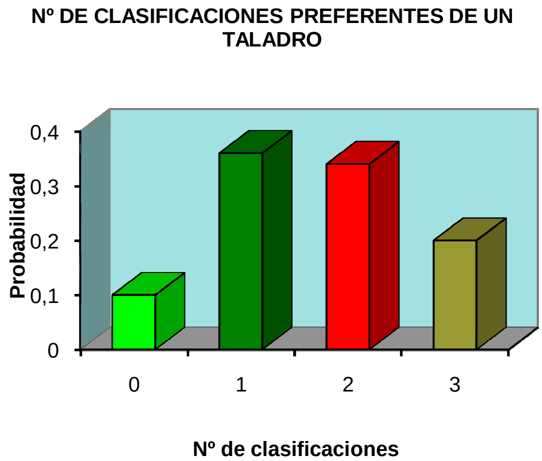


Gráfico 4.3. Diagrama de barras.

DEFINICIÓN 4.5. *Distribución de Probabilidad Hipergeométrica*

Si una población consta de N elementos de los cuales r tienen el atributo A, y N-r tienen el atributo B, y se toman n elementos sin reposición, el espacio muestral para este experimento es de $\binom{N}{n}$ resultados posibles; esto es, el número de formas en que se puede elegir un subconjunto de n objetos, entre un conjunto de N objetos. Así mismo, es posible elegir x elementos entre los r con el atributo A, en $\binom{r}{x}$ formas; es posible elegir n-x elementos entre los N-r elementos con el atributo B, en $\binom{N-r}{n-x}$ formas, y toda la muestra puede ser elegida en $\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}$ formas. Suponiendo que cada una de las $\binom{r}{x}$ muestras tiene la misma probabilidad de ser elegida, la probabilidad de x éxitos en n ensayos sin reposición es

$$P_x = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad para\ \ x = 0,1,\cdots,n$$

$$En\ donde\ x \leq r;\ \ n - x \leq N - r$$

Ejemplo 4.2. Un envío de siete guayas para grúas contiene dos defectuosas. Un compañía adquiere en forma aleatoria tres de estas guayas. Si X es el número de guayas defectuosas adquiridas por la compañía, elabore la distribución discreta de probabilidad y represéntela en un histograma de probabilidad.

Solución: Sea X la variable aleatoria cuyos valores x son los números posibles de guayas defectuosas adquiridas por una compañía. Entonces x puede tener valores {0,1,2}. Donde $N = 7$, $r = 2$,

Calculemos las probabilidades:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}$$

La distribución discreta de probabilidad vendría dada por:

x	***0***	***1***	***2***
Probabilidad	*2/7*	*4/7*	*1/7*

Tabla 4.2 Distribución de probabilidad

La representación de la distribución de probabilidad sería:

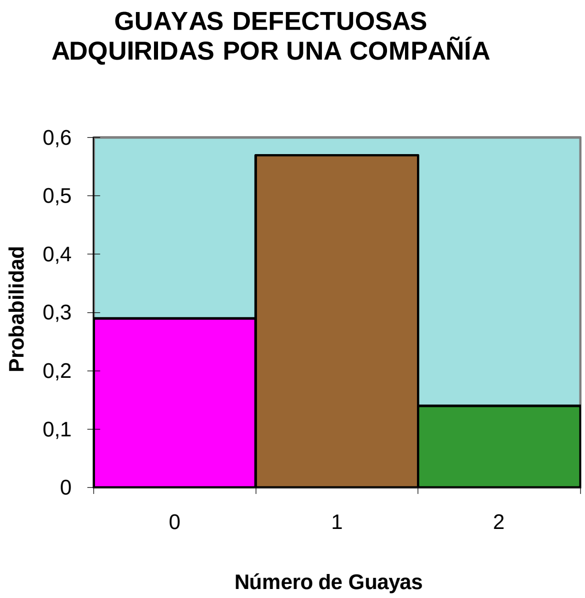


Gráfico 4.4. Histograma de probabilidad.

DEFINICIÓN 4.6. *Función de distribución acumulada.*

La función acumulada ***F(x)*** de la variable aleatoria discreta ***X*** con distribución de probabilidad *f(x)* está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \qquad para\ -\infty < x < \infty$$

Los valores, ***F(x)***, de la función de distribución de probabilidad cumple las siguientes condiciones:

1) $F(-\infty) = 0$
2) 2) $F(\infty) = 1$
3) $Si\ a < b, entonces\ F(a) \leq F(b) \qquad \forall a, b\ \in R$

Ejemplo 4.3. Con los datos del ejemplo 4.1 establezca la su distribución acumulada. Elabore una representación gráfica.

Solución: El valor acumulado en cada intervalo se consigue aplicando la definición 4.4, es decir:

$$F(2) = P(X \leq 2) = \sum_{t \leq 2} f(t) = f(0) + f(1) + f(2) = 0{,}10 + 0{,}36 + 0{,}34 = 0{,}80$$

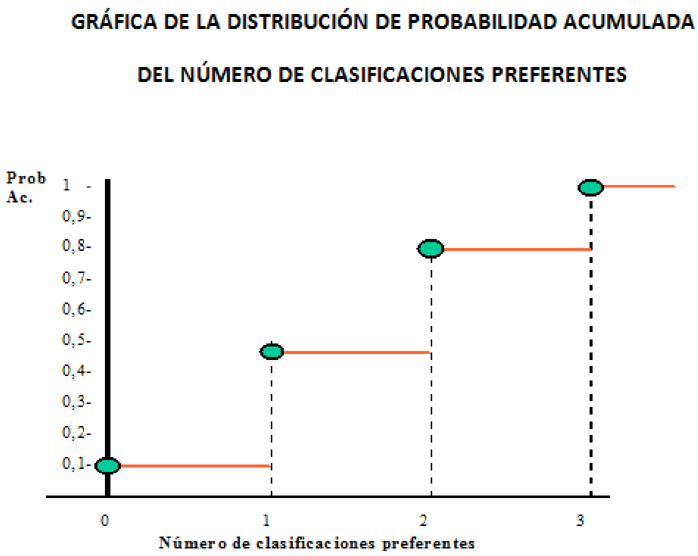


Gráfico 4.5. Distribución de probabilidad acumulada

DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE PROBABILIDAD.

Una variable continua tiene una probabilidad de cero de tomar exactamente cualquiera de sus valores. En consecuencia, no es posible presentar una distribución de probabilidad como se hizo con las variables aleatorias discretas. Si se analiza una variable aleatoria continua, cuyos valores están representados por los litros de gasolina que pueden suministrarle a un vehículo cualquiera, tomados al azar en una estación de servicio; la probabilidad de seleccionar, al azar, un vehículo que se le suministre exactamente 22 litros de gasolina y no otra cantidad, del conjunto infinito de valores cercanos a 22 litros es tan baja, que se le asigna la probabilidad de cero. Sin embargo, no sería éste el caso si se hablara del evento de suministrarle al vehículo gasolina entre 22 litros y 25 litros. Ahora se está utilizando un intervalo en lugar de un valor puntual para la variable aleatoria.

La definición de probabilidad en el caso continuo supone, para cada variable aleatoria, la existencia de una función, llamada función de densidad de probabilidad, de tal manera que el área debajo de la curva, representa la probabilidad de ocurrencia de un evento, en un intervalo.

Si los valores de la variable aleatoria estuviesen en un intervalo finito, siempre es posible ampliar el intervalo para incluir el conjunto total de números reales, al definir $f(x)=0$ en cualquier otro caso que este fuera del intervalo.

DEFINICIÓN 4.7. *Función Densidad de Probabilidad.*

La función $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua $\boldsymbol{X}$, definida sobre el conjunto de los números reales, $\boldsymbol{R}$, si:

$$1)\ f(x) \geq 0 \qquad para\ x \in R$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\ = 1$$

$$3)\ P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

DEFINICIÓN 4.8.

Si ***X*** es una variable aleatoria continua, y $a,b \in R$, entonces

$$P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b)$$

Ejemplo 4.4. La duración de sardinas empaquetadas en un almacén (en horas) es una variable aleatoria continua, cuya función de densidad viene expresada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20000}{(x+100)^3} & para\ x > 0 \\ 0\ \ en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

1) Verifique el aparte 2 de la definición 4.7.

2) Determine la probabilidad de que uno de estos paquetes durará en el almacén:

a) cuando menos 150 horas.

b) a lo más 90 horas.

c) entre 70 y 110 horas

Solución:

$Parte\ 1$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{20000}{(x+100)^3} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{20000}{(x+100)^3} dx = -\frac{10000}{(x+100)^2}\Big|_{0}^{\infty} = 1$

.

$Parte\ 2a$ $\quad \int_{150}^{\infty} \frac{20000}{(x+100)^3} dx = -\frac{10000}{(x+100)^2}\Big|_{150}^{\infty} = 0{,}16$

$Parte\ 2b)$ $\int_0^{90} \frac{20000}{(x+100)^3} dx = -\frac{10000}{(x+100)^2}\Big|_0^{90} = 0{,}72$

$Parte\ 2c)$ $\int_{70}^{110} \frac{20000}{(x+100)^3} dx = -\frac{10000}{(x+100)^2}\Big|_{70}^{110} = 0{,}12$

Observación 4.6.

En algunos casos interesa conocer la probabilidad de que el valor de una variable aleatoria continua sea menor que o igual a algún número real *x*. Para este tipo de problema se podría utilizar la función de distribución acumulada.

DEFINICIÓN 4.9. *Función de distribución acumulada*

Sea ***X*** una variable aleatoria continua, la función que viene dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad para\ -\infty < x < \infty$$

Donde *f(t)* representa el valor de la función de densidad de probabilidad de ***X*** en ***t*****,** se denomina función acumulada de ***X*****.**

DEFINICIÓN 4.10.

Sea ***F***(*x*) la distribución acumulada de la variable aleatoria continua ***X***, con función de densidad *f(x)*, entonces:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

a y *b* son dos constantes reales cualquiera con $a \leq b$.

Ejemplo 4.5. El tiempo de espera (en horas) entre dos conductores de vehículo, de manera sucesiva, que rebasan la velocidad máxima, es una variable aleatoria continua, cuya distribución acumulada es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-6x} & x > 0 \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de esperar menos de 10 minutos entre dos infractores sucesivos, utilizando la distribución acumulada de ***X***.

Solución: $10\ min \cong 0{,}17\ horas.$

$$P(X \leq 0{,}17) = F(0{,}17) = 1 - e^{-(0{,}17)} = 0{,}64$$

Ejemplo 4.6. La función de densidad de una variable aleatoria viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

1. Halle el valor de k.
2. Encuentre ***F***(x) y utilícela para hallar P(0,3<x<0,6).

Solución: Parte 1. De la definición 4.7 se sabe que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} k\sqrt{x}dx = k\frac{2}{3}x\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{2}{3}k = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

La función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Parte 2. Utilizando la definición 4.9 se tiene que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = \int_{0}^{x} \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = x^{\frac{3}{2}}$$

La función de distribución acumulada viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^{\frac{3}{2}} & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Utilizando la definición 4.10 se tiene que:

$$P(0,3 < x < 0,6) = F(0,6) - F(0,3) = (0,6)^{\frac{3}{2}} - (0,3)^{\frac{3}{2}} = 0,26$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA.

Usualmente en los experimentos se hace necesaria la utilización de varias variables. Por ejemplo, puede interesar estudiar la vida útil de una lámina de metal y su revestimiento, a este experimento también se le puede asociar las variables costo, calibre, etc. Para realizar este estudio se utilizan distribuciones de probabilidad conjunta.

En el caso de variables aleatorias discretas, $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, la distribución de probabilidad conjunta para la ocurrencia simultánea de eventos, se puede representar por una función *f(x, y);* la cual establece la probabilidad de ocurrencia de los resultados x e y al mismo tiempo.

En el caso de las variables continuas, la función de densidad conjunta es una superficie sobre el plano *xy;* donde $P[(X,Y) \in A]$**,** representa el volumen del cilindro recto, limitado por la superficie y con región de integración *A* en el plano *xy*.

DEFINICIÓN 4.11. *Distribución de probabilidad conjunta.*

Sean $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ dos variables aleatorias discretas, la función $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$ representa una distribución de probabilidad conjunta si cumple con las siguientes condiciones.

$$1)\ f(x,y) \geq 1$$

$$2)\ \sum_{x}\sum_{y} f(x,y) = 1$$

Ejemplo 4.7. Una caja de fusibles contiene 4 fusibles de 10 amperios, 3 de 15 amperios y 2 de 20 amperios; se desea seleccionar dos fusibles. Si X es el número de fusibles de 10 amperios e Y es el número de fusibles de 15 amperios. Establezca la distribución de probabilidad para estas variables aleatorias discretas.

Solución:

De ***N*=9** fusibles se seleccionan ***n*=2** fusibles, entonces las variables aleatorias **X** e **Y** deben tomar los valores {0,1}, por lo tanto los puntos ***(x,y)*** son (0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(0,2).

Ajustando la definición 4.5 a la distribución conjunta se tiene que:

$$f(x,y)=\frac{\binom{r_1}{x}\binom{r_2}{y}\binom{N-(r_1+r_2)}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}$$

$Donde\ \ r_1=4 \quad y \quad r_2=3$. De aquí que:

$$f(x,y)=\frac{\binom{4}{x}\binom{3}{y}\binom{2}{2-x-y}}{\binom{9}{2}}$$

$$f(0,0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{36}=\frac{1}{36} \qquad f(1,0)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{0}\binom{2}{1}}{36}=\frac{8}{36}$$

$$f(1,1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{0}}{36}=\frac{12}{36} \qquad f(0,1)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{36}=\frac{6}{36}$$

$$f(2,0)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{2}{0}}{36}=\frac{6}{36} \qquad f(0,2)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{36}=\frac{3}{36}$$

La tabla de distribución de probabilidad conjunta sería:

f(x,y)		*x*			*Total por fila*
		0	*1*	*2*	
y	*0*	*1/36*	*8/36*	*6/36*	*15/36*
	1	*6/36*	*12/36*		*18/36*
	2	*3/36*			*3/36*
Total por Columna		*10/36*	*20/36*	*6/36*	*1*

Tabla 4.3. Distribución de probabilidad conjunta

DEFINICIÓN 4.12. *Función de Densidad Conjunta.*

La función *f(x, y)* es una función de densidad conjunta de las variables aleatorias conjunta ***X*** e ***Y*** si cumple con las siguientes condiciones:

$$1)\ f(x,y) \geq 0 \qquad para\ toda\ (x,y)$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dxdy = 1$$

$$3)\ P[(X,Y) \in A] = \iint_A f(x,y)\, dxdy$$

$$Para\ cualquier\ región\ A\ en\ el\ plano\ xy$$

Ejemplo 4.8. Sean ***X*** e ***Y*** las proporciones de dos sustancias diferentes, que se encuentran en una muestra de algún reactivo que se utiliza como pesticida en la siembra de algunas frutas. Supóngase que estas variables aleatorias tienen como función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1;\ \ 0 \leq x + y \leq 1 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Halle $P(X \leq 0{,}2\ ;\quad Y \leq 0{,}3)$

Solución: Utilizando la definición 4.12 se tiene que:

$$P(X \leq 0{,}2; Y \leq 0{,}3) = \int_{-\infty}^{0,3}\int_{-\infty}^{0,2} f(x,y)\, dxdy = \int_{0}^{0,3}\int_{0}^{0,2} 2\, dxdy = 0{,}12$$

Observación 4.7.

Utilizando la distribución conjunta *f(x, y)* se puede encontrar las distribuciones de probabilidad en una variable, es decir, *g(x)* y *h(x).*

DEFINICIÓN 4.13. *Distribuciones Marginales.*

Sean $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ dos variables aleatorias. Sus distribuciones marginales *g(x)* y *h (y)* vienen dadas por:

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y)$$
$$h(y) = \sum_{x} f(x,y)$$
$$Para\ el\ caso\ discreto$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$
$$Para\ el\ caso\ continuo$$

Ejemplo 4.9. Utilizando la distribución de probabilidad conjunta del ejemplo 4.7; halle las distribuciones marginales *g(x)* y *h (y)*.

Solución: Las variables aleatorias $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ puede tomar los valores {0, 1, 2} respectivamente, luego

$$g(0) = P(X = 0) = \sum_{y=0}^{2} f(0,y) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{10}{36}$$

$$g(1) = P(X = 1) = \sum_{y=0}^{2} f(1,y) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = \frac{8}{36} + \frac{12}{36} + 0 = \frac{20}{36}$$

$$g(2) = P(X = 2) = \sum_{y=0}^{2} f(2,y) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) = \frac{6}{36} + 0 + 0 = \frac{6}{36}$$

x	*0*	*1*	*2*
g(x)	*10/36*	*20/36*	*6/36*

Tabla 4.4. Distribución marginal de probabilidad *g(x)*

De manera similar se puede establecer la distribución de probabilidad marginal *h (y).*

y	*0*	*1*	*2*
h(y)	*15/36*	*18/36*	*3/36*

Tabla 4.5. Distribución marginal de probabilidad *h (y).*

Ejemplo 4.10. Hay dos tipos diferentes de componentes en operaciones conjuntas, de los cuales un sistema electrónico tiene un componente de cada tipo. Sean ***X*** e ***Y*** las vidas aleatorias de los componentes del tipo A y del tipo B, respectivamente; entonces la función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} x e^{-\frac{x+y}{2}} & para\ \ x > 0; y > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Halle la distribución marginal *h(y).*

Solución:

Utilizando la definición 4.13 se tiene que las distribuciones marginales *g(x)* y *h (y).*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{8} x e^{-\frac{x+y}{2}} dy \ = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$$

Luego la distribución marginal para la variable ***X*** viene dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} & para\ x > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{8} x e^{-\frac{x+y}{2}}\, dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$$

Luego la distribución marginal para la variable ***Y*** viene dada por:

$$h(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & para\ y > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

DEFINICIÓN 4.14. *Distribución de probabilidad condicional:*

Sean ***X*** e ***Y*** variables aleatorias discretas o continuas, con función de probabilidad conjunta *f(x, y)* y distribuciones marginales *g(x)* y *h (y)*; la distribución de probabilidad condicional*:*

$$f(x\backslash y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{h(y)} & para\ h(y) > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f(y\backslash x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{g(x)} & para\ g(x) > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Observación 4.8.

Si se necesita encontrar la probabilidad de una variable aleatoria que se encuentra entre dos valores, **dado que** la otra variable aleatoria toma un valor particular; se puede proceder así:

En el caso discreto:

$$P(a < X < b\backslash Y = y) = \sum_x f(x\backslash y) \qquad P(c < Y < d\backslash X = x) = \sum_y f(y\backslash x)$$

En el caso continuo.

$$P(a < X < b\backslash Y = y) = \int_a^b f(x\backslash y)dx \qquad P(c < Y < d\backslash X = x) = \int_c^d f(y\backslash x)dy$$

Ejemplo 4.11. Utilizando los ejemplos 4.7 y 4.9; halle la distribución de probabilidad condicional para la variable aleatoria ***X***, dado que la variable ***Y*** toma el valor *y*=0.

Solución: utilizando la definición 4.14 se tiene que:

$$f(x\backslash 0) = \frac{f(x,0)}{h(0)}$$

De los ejemplos 4.7 y 4.9 se tiene que

$$f(0\backslash 0) = \frac{1/_{36}}{15/_{36}} = \frac{1}{15} \qquad f(1\backslash 0) = \frac{8/_{36}}{15/_{36}} = \frac{8}{15} \qquad f(2\backslash 0) = \frac{6/_{36}}{15/_{36}} = \frac{6}{15}$$

x	*0*	*1*	*2*
f(x\0)	*1/15*	*8/15*	*6/15*

Tabla 4.6 Distribución de probabilidad marginal *f (x\0).*

Ejemplo 4.12. Utilizando el ejemplo 4.10; halle la distribución condicional $f(1 \leq Y \leq 2) \setminus X = 3)$.

Solución: Utilizando la definición 4.14 se tiene que

$$f(y\backslash x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{8}xe^{-\frac{x+y}{2}}}{\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}}$$

$$f(1 \leq y \leq 2\backslash x = 3) = \int_1^2 f(y\backslash x)dy = \int_1^2 \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy = 0{,}24$$

DEFINICIÓN 4.15

Sean ***X*** e ***Y*** dos variables aleatorias discretas o continuas, cuya distribución de probabilidad conjunta es *f(x, y)* y distribuciones marginales *g(x)* y *h (y),* respectivamente; se dice que las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** son linealmente independientes si se cumple que:

$$f(x,y) = g(x)h(y) \quad para\ toda\ (x,y)\ \ dentro\ de\ su\ rango$$

Ejemplo 4.13. Determine si las variables aleatorias definidas en el ejemplo 4.7 son independientes o no.

Solución:

Utilizando la definición 4.14, basta verificar, para cada valor de las variables aleatorias, que se cumple la igualdad; en caso de que para algún par (x, y) no se cumpla se dice que no son independientes. En este ejemplo, con una inspección, se observa que para (x, y)= (0,0); se tiene que:

$$f(0,0) = \frac{1}{36} \quad según\ tabla\ \ 4.3$$

$$g(0) = \frac{10}{36} \quad según\ tabla\ \ 4.4$$

$$h(0) = \frac{15}{36} \quad según\ tabla\ \ 4.5$$

Como puede notarse $f(0,0) \neq g(0)h(0)$. Por lo tanto las variables aleatorias no son independientes.

Ejemplo 4.14. Determine si las variables aleatorias definidas en el ejemplo 4.10, son independientes o no.

Solución:

Utilizando la definición 4.14, sólo hay que verificar la igualdad.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}xe^{-\frac{x+y}{2}} & para\ \ x>0; y>0\\ \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} & para\ x>0\\ \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso\end{cases}$$

$$h(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}xe^{-\frac{y}{2}} & para\ y>0\\ \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso\end{cases}$$

Como puede notar $f(x,y)=g(x)h(y)$ para *x<0; y>O*

En otros casos $f(x,y)=0=g(x)h(y)$

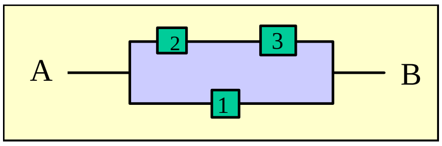
De todo lo anterior se concluye que las variables son independientes.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un amplificador contiene 6 transistores, de los cuales dos están defectuosos. Si seleccionan al azar dos de estos transistores, extraídos del amplificador, e inspeccionados. Si ***X*** es el número de unidades defectuosas;
   a Establezca la distribución de probabilidad.
   b Establezca la distribución acumulada de probabilidad.
   c Elabore un diagrama de barras para la distribución de probabilidad.
   d Elabore una representación gráfica para la distribución acumulada, similar al del ejemplo 4.3.

2. Sea $f(x) = \frac{k}{3^k}$ una distribución de probabilidad para una variable aleatoria que puede tomar los valores x = 0, 1, 2, 3, 4; determine el valor de k.

3. Supóngase un sistema de aceite que fluye a través de una válvula de **A** a **B**. Las válvulas {1, 2, 3} funcionan independientemente, y cada una se abre correctamente mediante una señal con una probabilidad de 0,7. Encuentre la distribución de probabilidad para la variable aleatoria ***X***; la cual representa el número de vías abiertas de **A** a **B** después de haber enviado la señal. La variable puede tomar los valores {0, 1, 2}.



Represente esta distribución a través de un histograma de probabilidad.

4. Un jefe de personal en una fábrica tiene 4 hombres y 4 mujeres trabajando para él. Se desea elegir dos trabajadores para realizar un trabajo y decide seleccionarlos al azar. Sea ***X*** el número de mujeres en la selección. Encuentre la distribución de probabilidad para ***X***. Represente esta distribución a través de un histograma de probabilidad.
Represente esta distribución a través de un diagrama de barras.

5. Sea ***X*** la variable aleatoria que representa el número de defectos por cada metro de cintas de acero está dada por

x	0	1	2	3	4
f(x)	0,05	0,16	0,37	0,41	0,01

Elabore la distribución de probabilidad acumulada. Represente gráficamente esta distribución.

6. Defínase la función de distribución acumulada para la variable aleatoria ***X*** está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & para\ x < 2 \\ \frac{1}{3} & para\ 2 \le x < 5 \\ \frac{1}{2} & para\ 5 \le x < 9 \\ \frac{5}{6} & para\ 9 \le x < 12 \\ 1 & para\ x \ge 12 \end{cases}$$

Halle:

$a) P(3 < X \le 6)$ $\quad$ $b) P(X = 9)$ $\quad$ $c) la\ distribucion\ de\ probabilidad\ de\ X$

7. El desgaste del dibujo (en miles de kilómetros) de los cauchos para camiones es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} e^{-\frac{x}{20}} & para\ x > 0 \\ 0 & para\ x \le 0 \end{cases}$$

Halle la probabilidad de que los cauchos se desgastarán:

a) Cuando más a 20000 km
b) Entre 28000 y 35000 km.
c) Cuando menos a 45000 km.
d) Exactamente a los 15000 km.

8. Supóngase que el error de fase de un dispositivo de rastreo es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

Halle la probabilidad de que el error de esta fase esté:

a) Entre 0 y $\pi/4$

b) Mayor que $\pi/6$.

9. La proporción de impurezas ***X*** de determinadas muestras de mineral de oro es una variable aleatoria cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 10x^2(1-x) & para\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

Si se selecciona 5 muestras de ellas en formas independientes, calcular la probabilidad de que:

a) Exactamente una de ellas tenga una proporción de impurezas mayor que 0,8.

b) Por lo menos una de ellas tenga una proporción de impurezas mayor que 0,8.

14. Utilizando la definición de la función de densidad del problema 8; halle la función de distribución acumulada.
15. De una caja de clavos que contiene 3 de 1 pulgada, 2 de 0,5 pulgadas y 3 de 2 pulgadas se escoge una muestra aleatoria de 4 clavos. Si ***X*** es el número de clavos de 1 pulgada e ***Y*** es el número de clavos de 0,5 pulgadas que están en la muestra, encuentre la distribución de probabilidad conjunta de ***X*** e ***Y***.
16. Utilizando la distribución del problema 11, determine:

a) Las distribuciones marginales *g(x)* y *h(y).*

b) Si las variables son independientes.

c) La distribución de probabilidad condicional para la variable aleatoria ***Y***, dado que la variable ***X*** toma el valor *x*=1.

17. Sea $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ las proporciones de tiempo, en un día de trabajo, que los obreros José y Pedro, respectivamente, se ocupan en realizar un trabajo. La función de densidad que establece esta relación es:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

a. Calcular $P(X < 1/4, \quad Y > 1/4)$
b. Calcular $P(X + Y \le 1)$.

18. Utilizando los datos del problema 13.
a. Halle las funciones marginales *g(x)* y *h(y)*.
b. Determine si las variables son independientes.
c. Calcule $f\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \backslash y = \frac{1}{2}\right)$

CAPÍTULO 5

ESPERANZA MATEMÁTICA

En el capítulo 2 se estudió las medidas descriptivas y se estableció la tendencia central de los datos a representarse por un número; y la dispersión de estos datos. Considérese ahora la siguiente información: Se ***espera*** *que un caucho dure 30000 kilómetros, esto no quiere decir que un caucho, tomado al azar y sometido a prueba, su duración no pueda ser 26000 km, o 34000 km.; Si no que este valor* ***esperado*** *es una tendencia central de los valores de una variable aleatoria. Una forma de estudiar los resultados de un experimento, de este tipo, es tomar en cuenta los valores que posean la variable aleatoria, y su distribución de probabilidad, con la finalidad de determinar el valor que se puede* ***esperar,*** *que asuma la variable en un experimento.*

En este capítulo se estudiará el valor esperado, o en otras palabras la ***Esperanza Matemática*** *de una variable aleatoria.*

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.

DEFINICIÓN 5.1. *Esperanza Matemática o la Media de la variable aleatoria* ***X***.

Si la distribución de probabilidad de la variable aleatoria ***X*** viene dada por $f(x)$; entonces la media está dada por:

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x f(x)$$

Si ***X*** es una variable discreta.

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Si ***X*** es una variable continua.

Ejemplo 5.1. En el ejemplo 4.2, se planteó en siguiente experimento: Un envío de siete guayas para grúas contiene dos defectuosas. Una compañía adquiere en forma aleatoria tres de estas guayas. Si $\boldsymbol{X}$ es la variable aleatoria cuyos valores x son los números posibles de guayas defectuosas adquiridas por una compañía. La distribución de probabilidad es:

x	**0**	**1**	**2**
Probabilidad	2/7	4/7	1/7

Tabla 5.1.Distribución de probabilidad.

Halle la media de la variable aleatoria.

Solución: Utilizando la definición 5.1, donde la variable aleatoria es discreta se tiene que:

$$\mu_X = E(X) = \sum_x xf(x) = 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{4}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} = 0{,}86$$

μ_X =0,86 significa que la compañía, que adquirió 3 guayas, debe esperar que tengan una guaya defectuosa, en promedio.

Ejemplo 5.2 En el ejemplo 4.4 se planteó el siguiente experimento: La duración de sardinas empaquetadas, en un almacén (en horas) es una variable aleatoria continua, cuya función de densidad viene expresada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20000}{(x+100)^3} & para\ x > 0 \\ 0 \quad en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Halle la media de la variable aleatoria.

Solución:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{20000}{(x+100)^3} dx = 20000 \left[- \frac{1}{x+100} + \frac{100}{2(x+100)^2} \right] \Bigg|_0^{\infty} = 100$$

μ_X =100, significa que se debe esperar que las sardinas empaquetadas en un almacén duren en promedio 100 horas. Recuerde que este valor es una tendencia central y no significa que todas las sardinas tienen que durar en el almacén esa cantidad de tiempo.

Observación 5.1.

En ocasiones se necesita calcular la esperanza matemática (la media) de una función que está relacionada con una variable aleatoria.

DEFINICIÓN 5.2. *Esperanza Matemática (la media) de una función relacionada con una variable aleatoria.*

Sea ***X*** una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es $f(x)$. La esperanza matemática de la variable aleatoria $g(X)$ viene dada por:

$$\mu_{g(X)} = E\big(g(X)\big) = \sum_x g(x)f(x)$$

Si ***X*** es una variable discreta.

$$\mu_{g(X)} = E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Si ***X*** es una variable continua.

Ejemplo 5.3. Supóngase que la cantidad de kilómetros que recorre un automóvil; está en relación con los litros que debe suministrarle, mediante la siguiente fórmula $X+1$; por tanto la cantidad de litros de gasolina está en función de la cantidad de kilómetros que debe recorrer el automóvil. Esto se puede definir por la fórmula $g(X) = X + 1$.

Supóngase que la distribución de probabilidad de la variable aleatoria ***X*,** definida por la cantidad de kilómetros que recorre un automóvil viene dada por:

x	*8*	*10*	*13*
f(x)	*0,54*	*0,36*	*0,1*

Tabla 5.2. Distribución de probabilidad

Halle la media de la variable $g(X)$.

$$\mu_{g(X)} = E\big(g(X)\big) = \sum_x g(x)f(x) = \sum_x (x+1)f(x)$$

$$\mu_{g(X)} = 9(0{,}54) + 11(0{,}36) + 14(0{,}1) = 10{,}22$$

$\mu_{g(X)} = 10{,}22$; Significa que se espera que el gasto en promedio de gasolina de un automóvil sea de alrededor de 10,22 litros.

Ejemplo 5.4. Sea ***X*** la variable aleatoria definida por la fracción de tiempo que un torno está en operación durante una semana de trabajo de 30 horas; la función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & para\ \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

La ganancia semanal en Bolívares está dada por $g(x) = 20000x + 60000$

Halle la media de la variable aleatoria.

Solución:

$$\mu_{g(X)} = E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = \int_0^1 (20000x + 60000)2x dx = 73333{,}33$$

$\mu_{g(x)} = 73333{,}33$, significa que el valor esperado en promedio de la ganancia semanal del torno sea de 73333,33 Bs.

DEFINICIÓN 5.3. *Esperanza Matemática (la media) de una función en dos variables.*

Sean ***X*** e ***Y*** dos variables aleatorias con distribución de densidad conjunta $f(x,y)$. La esperanza matemática para la variable aleatoria g(***X, Y***) viene dado por:

$$\mu_{g(X,Y)} = E\big(g(X,Y)\big) = \sum_{x}\sum_{y} g(x,y)f(x,y)$$

Si las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** son discretas.

$$\mu_{g(X,Y)} = E\big(g(X,Y)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

Si las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** son continuas.

Ejemplo 5.5. Una caja de fusibles contiene 4 fusibles de 10 amperios, 3 de 15 amperios y 2 de 20 amperios; se desea seleccionar dos fusibles. Si X es el número de fusibles de 10 amperios e Y es el número el número de fusibles de 15 amperios (Ver ejemplo 4.7, capítulo 4)

La tabla de distribución de probabilidad conjunta es:

f(x,y)		*x*			Total por fila
		0	1	2	
Y	0	1/36	8/36	6/36	15/36
	1	6/36	12/36		18/36
	2	3/36			3/36
Total por Columna		10/36	20/36	6/36	1

Tabla 5.3. Distribución de probabilidad conjunta

Supóngase que el costo (en Bolívares) de los fusibles, ya especificados, viene dada por la función: $g(X,Y) = X + 2Y$. Halle la media de la función g.

Solución: Utilizando la definición 5.3 se tiene que.

$$\mu_{g(X,Y)} = E\big(g(X,Y)\big) = \sum_x \sum_y g(x,y)f(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{g(X,Y)} &= E(X+2Y) \\
&= g(0,0)f(0,0) + g(0,1)f(0,1) + g(0,2)f(0,2) + g(1,0)f(1,0) \\
&\quad + g(1,1)f(1,1) + g(2,0)f(2,0) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 1 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{12}{36} + 2 \cdot \frac{6}{36} = \frac{84}{36} \approx 2.33
\end{aligned}$$

$\mu_{g(X,Y)} = 2{,}33$ significa que el costo en promedio de los fusibles es 2,23 Bs.

Ejemplo 5.6. Sean $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ las proporciones de dos sustancias (A y B) diferentes que se encuentran en una muestra de algún reactivo que se utiliza como pesticida en la siembra de algunas frutas. Supóngase que estas variables aleatorias tienen como función de densidad conjunta

:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le 1; \quad 0 \le x + y \le 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Halle la media de la variable $g(X,Y)$, si se define la función $g(X,Y) = X + Y + 50$ como la cantidad en metro cuadrados que abarcaría la sustancia preparada.

Solución: Utilizando la definición 5.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_{g(X,Y)} = E\big(g(X,Y)\big) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y+50)f(x,y)dxdy \int_0^1\int_0^1 (x+y+50)2dxdy = 102
\end{aligned}$$

$\mu_{g(X,Y)} = 102$, significa que se espera que la sustancia abarque un área de 102 m^2, en promedio.

DEFINICIÓN 5.4. *Esperanza Matemática (la media) de una variable aleatoria calculada a través de una distribución de probabilidad marginal.*

Caso 1: Si $g(X,Y) = X$, la esperanza matemática de la variable aleatoria discreta ***X*** viene dada por:

$$\mu_X = \sum_x \sum_y xf(x,y) = \sum_x xg(x)$$

Si $g(x)$ es la distribución de probabilidad marginal de ***X***

Caso 2: Si $g(X,Y) = Y$, la esperanza matemática de la variable aleatoria discreta ***Y*** viene dada por:

$$\mu_Y = \sum_x \sum_y yf(x,y) = \sum_x yh(y)$$

Si $h(y)$ es la distribución de probabilidad marginal de ***Y.***

Caso 3: Si $g(X,Y) = X$, la esperanza matemática de la variable aleatoria continua ***X*** viene dada por:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx$$

Si $g(x)$ es la distribución de probabilidad marginal de ***X***

Caso 4: Si $g(X,Y) = Y$, la esperanza matemática de la variable aleatoria continua ***Y*** viene dada por:

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy$$

Si $h(y)$ es la distribución de probabilidad marginal de ***Y.***

Ejemplo 5.7. Utilizando la distribución de probabilidad conjunta del ejemplo 5.5; las distribuciones marginales $g(x)$ y $h(y)$ son:

x	*0*	*1*	*2*
$g(x)$	*10/36*	*20/36*	*6/36*

Tabla 5.4. Distribución marginal de probabilidad $g(x)$.

y	*0*	*1*	*2*
h(y)	*15/36*	*18/36*	*3/36*

Tabla 5.5. Distribución marginal de probabilidad *h(x)*

Halle la media de las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** (Ver problema 4.9, Capítulo 4)

Solución:

$$\mu_X = E(X) = \sum_x \sum_y x(f(x,y) = \sum_x xg(x) = \frac{32}{36} = 0{,}88$$

μ_X =0,88 Significa que se espera escoger cerca de 1 fusible de 10 amperios.

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_x \sum_y y(f(x,y) = \sum_x yh(y) = \frac{24}{36} = 0{,}66$$

μ_Y =0,66 Significa que se espera escoger cerca de 1 fusible de 15 amperios.

Ejemplo 5.8. Hay dos tipos diferentes de componentes en operaciones conjuntas, de los cuales un sistema electrónico tiene un componente de cada tipo. Sean ***X*** e ***Y*** las vidas aleatorias (en años) de los componentes del tipo A y del tipo B, respectivamente; entonces la función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} x e^{-\frac{x+y}{2}} & para\ \ x > 0; y > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

(Ver ejemplo 4.10).

La distribución marginal para la variable ***X*** viene dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} & para\ x > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

La distribución marginal para la variable ***Y*** viene dada por:

$$h(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & para\ y > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

De la definición 5.4 se tiene que la media marginal para la variable X, viene dada por:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx \int_0^{\infty} x\ \frac{1}{4} e^{-\,x/2}\ dx = 1$$

μ_X =1 Significa que la vida del componente del tipo A es en promedio 1 año.

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) dy \int_0^{1} y \frac{1}{2} e^{-\,y/2} dy = 2$$

μ_Y =2 Significa que la vida del componente del tipo B es en promedio 2 año.

<u>MEDIDAS DE DISPERSIÓN.</u>

***DEFINICIÓN* 5.5.** *Varianza de una variable aleatoria.*

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad *f(x)* y la media μ_X ; la varianza de la variable X viene dada por:

$$\sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2) = \sum_x (x - \mu_X)^2 f(x)$$

Si la variable X es discreta.

$$\sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$$

Si la variable X es continua.

Observación 5.2.

La Varianza de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$**,** ya sea discreta o continua, viene dada por:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

***DEFINICIÓN* 5.6.** *Desviación Estándar de una variable aleatoria*.

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria con distribución de probabilidad *f(x)* y la media μ_X ; la desviación estándar de la variable $\boldsymbol{X}$ viene dada por:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{E(X^2) - \mu_X^2}$$

Ejemplo 5.9. Utilizando la distribución del ejemplo 5.3; calcule la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$.

Solución:

De la definición 5.2 se tiene que

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = 64(0{,}54) + 100(0{,}36) + 169(0{,}1) = 87{,}46$$

De la definición 5.1 se tiene que

$$\mu_X = \sum_x x f(x) = 8(0{,}54) + 10(0{,}36) + 13(0{,}1) = 9{,}22$$

De la observación 5.2 se tiene que

$$\sigma_X^2 = 87{,}46 - (9{,}22)^2 = 2{,}45$$

De la definición 5.6 se tiene que

$$\sigma_X = \sqrt{2{,}45} = 1{,}57$$

Ejemplo 5.10. Del ejemplo 5.4 se tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x & para\ \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Calcule la varianza y la desviación estándar.

Solución:

De la definición 5.2 se tiene que

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 2xdx = \frac{1}{2}$$

De la definición 5.1 se tiene que

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x2xdx = \frac{2}{3}$$

De la observación 5.2 se tiene que

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0{,}056$$

De la definición 5.6 se tiene que

$$\sigma_X = \sqrt{0{,}056} = 0{,}24$$

Observación 5.3.

Se pueden realizar comparaciones de distribuciones de probabilidad, de una variable aleatoria (*discreta o continua)*, tomando en cuenta:

- Las medias de la variable.
- Las varianza de las distribuciones.
- Las desviaciones estándar de las distribuciones.

Ejemplo 5.10. Supóngase que la distribución de probabilidad del ejemplo 5.3 está dada para un automóvil A y que la siguiente distribución es para un automóvil B.

x	*8*	*10*	*13*
f(x)	*0,46*	*0,26*	*0,28*

Tabla 5.6. Distribución de probabilidad

Compare las distribuciones de probabilidad de las tablas 5.2 y 5.6.

Solución:

Hallemos la media, la varianza y la desviación estándar de la distribución de la tabla 5.6.

$$\mu_X = 9{,}92 \qquad \sigma_X^2 = 4{,}35 \qquad \sigma_X = 2{,}09$$

	μ	σ^2	σ
Automóvil A	*9,22*	*2,45*	*1,57*
Automóvil. B	*9,92*	*4,35*	*2,09*

Tabla 5.7. Media, Varianza y Desviación estándar.

Comparando los valores en la tabla 5.7 se puede notar que:

- El promedio de recorrido del automóvil B es mayor al de A.
- La dispersión de los recorridos es mayor para el automóvil B que para el automóvil A.

DEFINICIÓN 5.7. *Varianza de una función relacionada con una variable aleatoria.*

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es $f(x)$. La varianza de la variable aleatoria $g(\boldsymbol{X})$ viene dada por:

$$\sigma_{g(X)}^2 = E\left(\left(g(x) - \mu_{g(X)}\right)^2\right) = \sum_x \left(g(x) - \mu_{g(X)}\right)^2 f(x)$$

Si $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria discreta.

$$\sigma_{g(X)}^2 = E\left(\left(g(x) - \mu_{g(X)}\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(x) - \mu_{g(X)}\right)^2 f(x)dx$$

Si $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria continua.

Observación 5.4.

La varianza de una variable aleatoria *g(**X**)*, ya sea discreta o continua, viene dada por:

$$\sigma_{g(X)}^2 = E((g(X))^2) - \mu_{g(X)}^2$$

DEFINICIÓN 5.8. *Desviación Estándar de una variable aleatoria.*

Sea ***X*** una variable aleatoria con distribución de probabilidad *f(x)* y la media $\mu_{g(X)}$; la desviación estándar de la variable $g(X)$ viene dada por:

$$\sigma_{g(X)} = \sqrt{\sigma_{g(X)}^2} = \sqrt{E((g(X))^2) - \mu_{g(X)}^2}$$

Ejemplo 5.12. Utilizando los datos del ejemplo 5.4; halle la varianza y la desviación estándar de la variable $g(X)$.

Solución: del ejemplo 5.4 se tiene que:

$$\mu_{g(X)} = 10{,}22$$

De la definición 5.2 se tiene que:

$$E((g(X))^2) = \sum_x (x+1)^2 f(x) = 106{,}9$$

De la observación 5.4 se tiene que

$$\sigma_{g(X)}^2 = 106{,}9 - (10{,}22)^2 = 2{,}45$$

De la definición 5.8 se tiene que

$$\sigma_{g(X)} = \sqrt{2{,}45} = 1{,}57$$

Ejemplo 5.12. Utilizando los datos del ejemplo 5.4; halle la varianza y la desviación estándar de la variable $g(X)$.

Solución: del ejemplo 5.4 se tiene que:

$$\mu_{g(X)} = 73333{,}33$$

De la definición 5.2 se tiene que:

$$E((g(X))^2) = \int_0^1 (20000x + 60000)^2 2x dx = 9 \cdot 10^9$$

De la observación 5.4 se tiene que

$$\sigma_{g(X)}^2 = 9 \cdot 10^9 - (7{,}3333{,}33)^2 = 3622222711$$

De la definición 5.8 se tiene que

$$\sigma_{g(X)} = \sqrt{3622222711} = 60184{,}9$$

<u>COVARIANZA.</u>

Observación 5.5.

Se pueden establecer relaciones entre dos variables aleatorias, ***X*** e ***Y,*** a través de lo que se conoce como *Covarianza, (σ_{XY})* de tal manera de si el valor de la covarianza:

- $\sigma_{XY} > 0$ se dice que, a mayor valor de ***X*** mayor valor de ***Y***; y que a menor valor de ***X*** menor valor de ***Y.***
- $\sigma_{XY} < 0$ se dice que, a mayor valor de ***X*** menor valor de ***Y***; y que a menor valor de ***X*** mayor valor de ***Y.***

Observación 5.6.

Si las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** son independientes la covarianza es cero. Si la covarianza es cero, no necesariamente las variables son independientes.

DEFINICIÓN 5.9. *Covarianza*

La covarianza de las variables aleatorias, con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$ viene dada por:

$$\sigma_{XY} = E\big((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big) = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y)$$

Si las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** son discretas.

$$\sigma_{XY} = E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy$$

Si las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** son continuas.

Observación 5.7.

La covarianza de dos variables aleatorias ***X*** e ***Y*** con medias $\mu_{X,}$ μ_Y, respectivamente, viene dada por:

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

Ejemplo 5.13. Utilizando los datos del ejemplo 5.7; halle la covarianza.

Solución:

De la definición 5.3 se tiene que

$$E(XY) = \sum_x\sum_y xyf(x,y) = \frac{12}{36}$$

Del ejemplo 5.7 se tiene que

$$\mu_X = 0{,}88 \qquad \mu_Y = 0{,}66$$

De la observación 5.7 se tiene que

$$\sigma_{XY} = 0{,}33 - (0{,}88)(0{,}66) = -0.25$$

Significa que a medida que aumenta el número de fusibles de 10 amperios disminuye el número de fusibles de 15 amperios y viceversa.

Ejemplo 5.14. Utilizando los datos del ejemplo 5.6; halle la covarianza.

Solución:

De la definición 5.3 se tiene que

$$E(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}xy2dxdy=\frac{1}{2}$$

Del ejemplo 5.8 se tiene que

$$\mu_X=1 \qquad \mu_Y=1$$

De la observación 5.6 se tiene que

$$\sigma_{XY}=0{,}5-1\cdot 1=-0{,}5$$

Significa que a medida que aumenta la proporción de la sustancia A disminuye la proporción de la sustancia B y viceversa.

***PROPIEDADES DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y LAS DE DISPERSIÓN*.**

Propiedad 5.1.

Sean *m* y *k dos* constantes cualesquiera, entonces:

$$E(mX+k)=mE(X)+k$$

Propiedad 5.2.

Sean $f_1(X), f_2(X), f_3(X), \cdots, f_k(X)$ funciones de la variable aleatoria *X*, entonces:

$$E(f_1(X)\pm f_2(X)\pm f_3(X)\pm\cdots\pm f_k(X))$$
$$=E\big(f_1(X)\big)\pm E\big(f_2(X)\big)\pm E\big(f_3(X)\big)\pm\cdots\pm E\big(f_k(X)\big)$$

Propiedad 5.3.

Sean $f_1(X,Y), f_2(X,Y), f_3(X,Y), \cdots, f_k(X,Y)$ funciones de las variables aleatorias *X* e *Y*, entonces:

$$E(f_1(X,Y)\pm f_2(X,Y)\pm f_3(X,Y)\pm\cdots\pm f_k(X,Y))$$
$$=E\big(f_1(X,Y)\big)\pm E\big(f_2(X,Y)\big)\pm E\big(f_3(X,Y)\big)\pm\cdots\pm E\big(f_k(X,Y)\big)$$

Propiedad 5.4.

Si las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** son independientes; entonces

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Propiedad 5.5.

Sean *m* y *k* dos constantes cualesquiera; entonces

$$\sigma_{mX+k}^2 = m^2\sigma_X^2$$

Propiedad 5.6.

Sean ***X*** e ***Y*** son dos variables aleatorias cuya distribución de probabilidad conjunta es $f(x, y)$; entonces

$$\sigma_{mX+kY}^2 = m^2\sigma_X^2 + k^2\sigma_Y^2 + 2mk\sigma_{XY}$$

Donde *m* y *k* son constantes.

Propiedad 5.7.

Si $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$\sigma_{m_1X_1+m_2X_2+\cdots+m_kX_k}^2 = m_1^2\sigma_{X_1}^2 + m_2^2\sigma_{X_2}^2 + \cdots + m_k^2\sigma_{X_k}^2$$

donde m_1, m_2,..., m_k son constantes

<u>TEOREMA DE CHEBYSHEV.</u>

Dado la media y la desviación estándar de una variable aleatoria, se puede estimar la probabilidad de que el valor de la variable este en un intervalo.

Teorema 5.1.

Si ***X*** es una variable aleatoria con media μ_X y desviación estándar σ_X; la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor dentro de *k* desviaciones estándar respecto de la media es mayor o igual a $1 - \frac{1}{k^2}$ es decir

$$P(\mu_X - k\sigma_X < X < \mu_X + k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Ejemplo 5.15. Utilice el teorema de Chebyshev para estimar la probabilidad del intervalo que contiene la variable aleatoria definida en el ejemplo 5.10.

Solución:

Del ejemplo 5.10 se tiene que

$$\mu_X = 9{,}92 \qquad \sigma_X = 2{,}09$$

Utilizando el teorema de Chebyshev se tiene que

$$P\big(9{,}92 - k(2{,}09) < X < 9.92 + k(2{,}09)\big) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

En particular si *k*=2, el intervalo queda así:

$$P\big(9{,}92 - 2(2{,}09) < X < 9.92 + 2(2{,}09)\big) \geq 1 - \frac{1}{2^2}$$

$$P(5{,}74 < X < 14{,}1) \geq 0{,}75$$

Esto significa que la probabilidad de que la cantidad de kilómetros que recorre un automóvil este entre 5,74 y 14,1; con un valor dentro de 2 desviaciones estándar, es mayor a 0,75.

Ejemplo 5.16. Utilice el teorema de Chebyshev, para estimar la probabilidad del intervalo que contiene la variable aleatoria definida en el ejemplo 5.4.

Solución:

Del ejemplo 5.10 se tiene que

$$\mu_X = 0{,}67 \qquad \sigma_X = 0{,}24$$

Utilizando el teorema de Chebyshev se tiene que

$$P\big(0{,}67 - k(0{,}24) < X < 0{,}67 + k(0{,}24)\big) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

En particular si *k*=3, el intervalo queda así:

$$P\big(0{,}67 - 3(0{,}24) < X < 0{,}67 + 3(0{,}24)\big) \geq 1 - \frac{1}{3^2}$$

$$P(-0{,}05 < X < 1{,}39) \geq 0{,}67$$

Esto significa que la probabilidad de que la fracción de tiempo, que un torno está en operación durante una semana de trabajo de 30 horas, está entre 0 y 1,39, con un valor dentro de 3 desviaciones estándar, es mayor a 0,67.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La distribución de probabilidad siguiente representa las fallas de una computadora en un día determinado.

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0,29	0,17	0,16	0,27	0,03	0,07	0,01

   Halle la media, varianza y desviación estándar.

2. El gerente del departamento de ventas de una compañía elaboró una tabla de distribución de probabilidad para la demanda diaria para una herramienta en particular

x	0	1	2
f(x)	0,3	0,6	0,1

   a. Establezca la distribución de probabilidad para dos días de demandas. Sugerencia, elabore un diagrama de árbol.
   b. Halle la media, varianza y desviación estándar para la demanda de dos días.

3. El funcionamiento hasta su primera falla (en ciertos de horas) para cierta resistencia es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

   Halle la media, varianza y desviación estándar.

4. El porcentaje de impurezas por unidad de producción en cierto producto químico es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 - 12x^3 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & en \ otros \ casos \end{cases}$$

   Halle la media, varianza y desviación estándar.

5. Utilizando la distribución del ejercicio 2, sabiendo que el gerente cobra una comisión de 300 Bs por cada herramienta despachada, halle la media, la varianza y desviación estándar del cobro de comisión.
6. El tiempo total, medido en unidades de 100 horas, que un operador hace funcionar un altoparlante en un período de seis meses, es una variable aleatoria continua con función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

   Halle la media, la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria $g(X) = 60X^2 + 39X$ donde $g(X)$ representa el número de kilovatios/hora consumidos semestralmente.

7. Supóngase que las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** tienen distribución de probabilidad conjunta

f(x, y)		x		
		2	3	5
y	2	0,10	0,20	0,10
	3	0,15	0,30	0,15

Halle la media de la variable aleatoria $g(X,Y) = 3XY^2 + X^2Y$.

8. Si la función de densidad conjunta de las variables aleatorias ***X*** e ***Y*** viene dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x+2y) & 0 < x < 1, \quad 1 < y < 2 \\ 0 & en \quad otros \quad casos \end{cases}$$

Halle la media de la variable $g(X,Y) = \frac{X}{Y^3} + X^2Y$.

9. Utilizando la tabla del ejercicio 7 halle la media de la variable ***X***.

10. Utilizando la tabla del ejercicio 7 halle la media de la variable ***Y***.

11. Utilizando la función de densidad del ejercicio 8 halle la media de la variable ***X***.

12. Utilizando la función de densidad del ejercicio 8 halle la media de la variable ***Y.***

13. Utilizando la tabla del ejercicio 7, halle la covarianza.

14. Utilizando la tabla del ejercicio 8, halle la covarianza.

15. Utilice el teorema de Chebyshev para estimar la probabilidad del intervalo que contiene la variable aleatoria definida en el ejercicio 1. Particularice para *k* =3.

16. Utilice el teorema de Chebyshev para estimar la probabilidad del intervalo que contiene la variable aleatoria definida en el ejercicio 2. Particularice para k =5.

17. Utilice el teorema de Chebyshev para estimar la probabilidad del intervalo que contiene la variable aleatoria definida en el ejercicio 3. Particularice para k =3.

18. Utilice el teorema de Chebyshev para estimar la probabilidad del intervalo que contiene la variable aleatoria definida en el ejercicio 4. Particularice para k =2.

CAPÍTULO 6

DISTRIBUCIONES DE PROBABLIDAD DISCRETA

Al tratar de establecer una distribución de probabilidad para una variable aleatoria se pude encontrar que:

- *Se desconoce la probabilidad asociada a la distribución de probabilidad.*
- *Se conoce, por registros de procesos, que la probabilidad asociada a la distribución es aproximadamente igual en todos los ensayos.*

Estos dos aspectos nos obligan a asumir que la probabilidad $p_1; p_2; p_3; \ldots; p_k$ *asignada a cada valor de la variable, es la misma; para facilitar una primera aproximación. Es decir, asumimos una distribución uniforme.*

Por otra parte, existen experimentos aleatorios que tienen distribuciones de probabilidad muy sencillas, ya que sólo hay dos sucesos mutuamente excluyentes. Por ejemplos, supóngase que en un proceso se requiere el estudio de los artículos defectuosos y no defectuosos que salen de una ensambladora o que un proceso está bajo especificaciones o no. Para normalizar la terminología que describe estos procesos, se definirá éxito y fracaso. Estos términos sólo indican los resultados y no tienen connotación de bondad en cuanto a los mismos. Por lo tanto, se puede utilizar el término éxito para definir los artículos defectuosos en un proceso.

Los dos sucesos, éxito o fracaso, son de naturaleza cualitativas; no obstante se pueden convertir estos sucesos en cuantitativos asignándoles el valor ***1 al éxito*** *y* ***0 al fracaso.***

Supóngase que una variable aleatoria ***X*** *se define como el número de éxitos y que tiene un valor* $\boldsymbol{x}$*=4; esto significa que en el ensayo ocurrieron cuatro éxitos en el numero n de veces que se repitió el experimento* $n \geq 4$

En este capítulo se estudiarán las distribuciones con las características antes mencionadas.

DISTRIBUCIÓN UNIFORME.

DEFINICIÓN 6.1. *Distribución de Probabilidad Uniforme.*

Si una variable aleatoria ***X*** puede tomar ***k*** valores distintos con iguales probabilidades, la distribución es uniforme y viene dada por:

$$f(x) = \frac{1}{k} \qquad donde\ x = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k$$

Ejemplo 6.1. El número ***X*** de casas que una compañía de bomberos puede atender depende de la distancia ***x*** que un camión de bomberos puede cubrir en un periodo específico. Supóngase que para $P(X \leq 20) = P(X \geq 27) = 0$; se desea establecer una distribución de probabilidad para ***x*** ={21, 22, 23, 24, 25, 26}. Una manera un tanto riesgosa es asignarle a cada valor de la variable la misma probabilidad; y por tanto sería una distribución uniforme. Quedando definida por

x	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*
f(x)	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*

Tabla 6.1 Distribución Uniforme

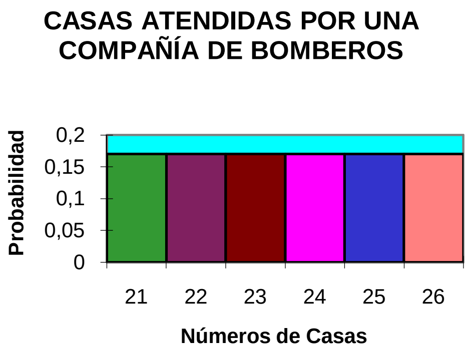


Gráfico 6.1. Distribución Uniforme

<u>DISTRIBUCIONES DE BERNOULLI.</u>

DEFINICIÓN 6.1. *Distribución de Bernoulli.*

Sea ***X*** una variable aleatoria discreta, defínase ***p*** la probabilidad de éxito y ***q=1-p*** la probabilidad de fracaso, la distribución de Bernoulli viene dada por

$$f(x,p) = p^x(1-p)^{1-x} \Leftrightarrow f(x,p) = p^x q^{1-x} \quad donde \ (x=0) \ o \ \ (x=1)$$

Ejemplo 6.1. Supóngase que la probabilidad de escoger un artículo no defectuoso es 0,67. Calcule la probabilidad de escoger uno defectuoso.

Solución:

Sea ***p*** la probabilidad de escogencia de un artículo defectuoso (éxito).

Sea ***q*** la probabilidad de escogencia de un artículo no defectuoso (fracaso).

Utilizando la definición 6.1 se tiene que]

$$f(0;0{,}67) = 0{,}67^0(1-0{,}67)^{1-0} = 0{,}33$$

<u>DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y MULTINOMIAL.</u>

Una variable aleatoria ***X*** tiene una distribución Binomial si cumple con las siguientes condiciones:

- El experimento consiste en un número fijo de ***n*** ensayos repetidos.
- Cada ensayo tiene sólo dos resultados, éxito o fracaso.
- La probabilidad ***p*** permanece constante, de un ensayo a otro. Los ensayos son independientes. Es decir, la distribución Binomial se basa en el supuesto de que la población sea infinita y de que la muestra aleatoria se toma con reposición (ver observación 3.3, cap. 3), de manera que las observaciones sean independientes entre sí; y además la probabilidad permanece constante.

- Se define a ***X*** como el número de éxitos en ***n*** ensayos. Esto es, si x es el número de éxitos entonces *n- x* es el número de fracasos.

DEFINICIÓN 6.2. *Distribución Binomial.*

Si un intento Binomial puede resultar en un éxito con probabilidad ***p*** y en un fracaso con probabilidad ***q=1-p***, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Binomial ***X***, definida como el número de éxitos en ***n*** ensayos independientes, viene dada por

$$b(x;n;p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,3,\cdots,n$$

Observación 6.1.

El número combinatorio

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Ejemplo 6.2. En una fábrica se asegura que el 30% de las áreas reducen el consumo de energía eléctrica, al realizar cambios en el sistema de iluminación. Halle la probabilidad de que 2 de 5 áreas reduzcan el consumo de energía eléctrica en las áreas.

Solución: Sea ***X*** el número de áreas que reducen el consumo de energía eléctrica. El experimento cumple con los requerimientos de una distribución Binomial, ya que, los ensayo son independientes (la fábrica está dividida por áreas); la probabilidad permanece constante *p= 0,3*; existen dos alternativas (se reduce o no se reduce el consumo de energía eléctrica).

De la definición 6.2 se tiene que

$$x = 0,1,2,3,4,5 \qquad n = 5 \qquad p = 0,3 \qquad q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$b(0;5;0,3) = \binom{5}{0}(0,3)^0(0,7)^{5-0} = 0,17$$

$$b(1;5;0,3) = \binom{5}{1}(0,3)^1(0,7)^{5-1} = 0,36$$

$$b(2; 5; 0{,}3) = \binom{5}{2}(0{,}3)^2(0{,}7)^{5-2} = 0{,}31$$

$$b(3; 5; 0{,}3) = \binom{5}{3}(0{,}3)^3(0{,}7)^{5-3} = 0{,}13$$

$$b(4; 5; 0{,}3) = \binom{5}{4}(0{,}3)^4(0{,}7)^{5-4} = 0{,}028$$

$$b(5; 5; 0{,}3) = \binom{5}{5}(0{,}3)^5(0{,}7)^{5-5} = 0{,}002$$

En particular *b(2; 5; 0,3)=0,31* significa que la probabilidad de que 2 de 5 áreas reduzcan su consumo eléctrico es de 0,31. Igual interpretación se puede realizar para los otros valores.

La distribución de probabilidad está dada por:

x	0	1	2	3	4	5
b(x,5; 0,3)	0,17	0,36	0,31	0,13	0,028	0,002

Tabla 6.2. Distribución Binomial

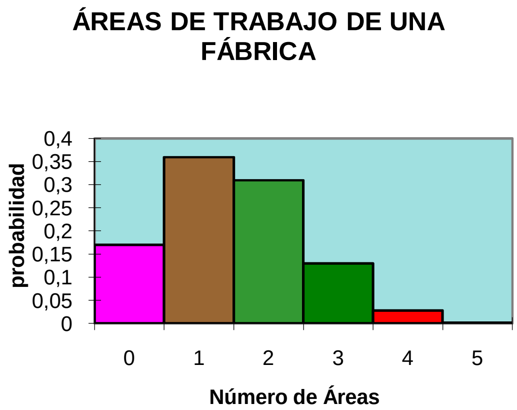


Gráfico 6.2. Distribución Binomial

***Observación 6.2*.**

Si ***n*** es muy grande, se utiliza la fórmula

$$P(X \leq x) = B(x; n; p) = \sum_{k=0}^{x} b(k; n; p) \qquad donde\ \ x = 0,1,2,3, \cdots, n$$

La tabla 1 anexa, proporciona las probabilidades acumuladas $B(x; n; p)$, en lugar de los valores de $b(x; n; p)$.

Ejemplo 6.3. Calcule $P(X \leq 5) = B(5; 20; 0,25)$ utilizando la tabla 1 anexa.

Solución:

La tabla 1 está conformada por fila y columnas. En la primera columna se encuentran los valores de ***n***; en la segunda los valores de ***x***; y en resto los valores de las probabilidades. Para calcular la probabilidad acumulada $B(5;\ 20;\ 0,25)$ Se ubica ***n***=20, luego ***x***=5, siguiendo por la fila hasta la intersección con la columna que contiene ***p***=0,25; se obtiene que $B(5; 20; 0,25)=0,6172$.

***Observación 6.3*.**

Si se desea calcular la probabilidad $b(x;\ n;\ p)$, es decir para un valor particular, utilizando la tabla 1, se puede aplicar la fórmula.

$$b(x; n; p) = B(x; n; p) - B(x-1; n; p)$$

Ejemplo 6.4. Un fabricante de neveras afirma que solamente el 10% de las neveras requiere reparación dentro del período de garantía.

a.- ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 6 de 20 neveras fallen antes de finalizar la garantía?

b.- ¿Cuál es la probabilidad de que fallen entre 3 y 6 (inclusive el 3 y el 6) de 20 neveras, antes de finalizar la garantía?

c.- ¿Cuál es la probabilidad de que más de 6 neveras fallen antes de finalizar la garantía?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que 6 neveras fallen antes de finalizar la garantía?

Solución: Sea ***X*** el número de neveras que fallen antes de finalizar la garantía.

Utilizando la tabla 1 se tiene que.

Parte a.

$$P(X \leq 6) = B(6; 20; 0{,}1) = \sum_{k=0}^{6} b(6; 20; 0{,}1) = 0{,}9976$$

Parte b.

$$P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2)$$

$$P(X) \leq 2 = B(2; 20; 0{,}1) = 0{,}6769$$

$$P(3 \leq X \leq 6) = 0{,}9976 - 0{,}6769 = 0{,}3207$$

Parte c.

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - B(6; 20; 0{,}1) = 1 - 0{,}9976 = 0{,}0024$$

Parte d.

$$P(X = 6) = b(6; 20; 0{,}1) = B(6; 20; 0{,}1) - B(5; 20; 0{,}1) = 0{,}9976 - 0{,}9887 = 0{,}0089$$

Teorema 6.1.

La media, la varianza y la desviación estándar de una distribución Binomial vienen dadas por:

$$\mu_X = np \qquad \sigma_X^2 = npq \qquad \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Ejemplo 6.5. En relación con ejemplo 6.4; supóngase que se desea estimar la media, la varianza y la desviación estándar, de las neveras que fallen antes que venza su garantía, entre un lote de 15 neveras.

Solución:

Utilizando el teorema 6.1 se tiene que.

$$n = 15 \qquad p = 0{,}1 \qquad q = 1 - p = 0{,}9$$

$$\mu_X = 15\,(0{,}1) = 1{,}5$$

$$\sigma_X^2 = 15\,(0{,}1)(0{,}9) = 1{,}35 \qquad \sigma_X = \sqrt{1{,}35} = 1{,}16$$

DEFINICIÓN 6.3. *Distribución Multinomial.*

Si un ensayo puede conducir k resultados $A_1, A_2, \ldots, A_k$, con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$ respectivamente, entonces la distribución de probabilidad multinomial de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ en ***n*** ensayos independientes viene dada por

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k; p_1, p_2, \cdots, p_k; n) = \binom{n}{x_1, x_2, \cdots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

$$donde \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

Teorema 6.2.

La media, la varianza, la desviación estándar y la covarianza de una distribución Multinomial, de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Para los ensayos los k resultados $A_1, A_2, \ldots, A_k$, con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vienen dadas por:

$$\mu_{X_i} = np_i$$

$$\sigma_{X_i}^2 = np_i(1 - p_i)$$

$$\sigma_{X_i} = \sqrt{\sigma_{X_i}^2} \quad donde \quad i = 1,2,3, \cdots, k$$

$$\sigma_{X_i X_j} = -np_i p_j \qquad para \quad i \neq j$$

Observación 6.4.

La expresión

$$\binom{n}{x_1, x_2, \cdots, x_k} = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \cdots x_k!}$$

Ejemplo 6.6. Un distribuidor recibe un lote de lámparas para retroproyector con las siguientes especificaciones: la probabilidad de que dure menos de 50 horas con uso continuo es 0,29; la probabilidad de que dure entre 50 y 75 horas con uso continuo es 0,55; la probabilidad de que dure más de 75 horas con uso continuo es 0,22.

Calcule la probabilidad de que 7 lámparas duren menos de 50 horas, 4 duren entre 50 y 75 horas y 2 duren más de 75 horas.

a) Calcular el promedio de lámparas que duren menos de 50 horas.
b) Calcular la varianza y la desviación estándar de las lámparas que duren menos de 50 horas.
c) Calcular la covarianza de las lámparas que duren menos de 50 horas y las que duren entre 50 y 75 horas.

Solución:

Parte a)

Sea $\boldsymbol{X_1}$ el número de lámparas que duran menos 50 horas de uso continuo;

Sea $\boldsymbol{X_2}$ el número de lámparas que duran entre 50 y 75 horas;

Y sea $\boldsymbol{X_3}$ el número de lámparas que duran más de 75 horas de uso continuo.

Utilizando la definición 6.3 se tiene que

$$n = 7 + 4 + 2 = 13$$

$$x_1 = 7;\ x_2 = 4;\ \ x_3 = 2$$

$$p_1 = 0{,}29 \quad p_2 = 0{,}55 \quad p_3 = 0{,}22$$

$$\binom{13}{7,4,2} = \frac{13!}{7!\,4!\,2!} = 25740$$

$$f(7; 4; 2; (0{,}29); (0{,}55); (0{,}22); 13) = 25740(0{,}29)^7(0{,}55)^4(0{,}22)^2 = 0{,}0197$$

Parte b)

$$\mu_{X_1} = np_1 = 13(0{,}29) = 3{,}77$$

Parte c)

$$\sigma_{X_1}^2 = np_1(1-p_1) = 13(0{,}29)(1-0{,}29) = 2{,}68$$

$$\sigma_{X_1} = \sqrt{2{,}68} = 1{,}64$$

Parte d)

$$\sigma_{X_1X_2} = -np_1p_2 = -13(0{,}29)(0{,}55) = -207$$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA.

Cuando la población es finita y la muestra aleatoria se toma sin reposición, la probabilidad cambiará para cada ensayo. En este tipo de problema se aplica una distribución Hipergeométrica. De resto esta distribución coincide con la Binomial.

DEFINICIÓN 6.4. *Distribución Hipergeométrica.* Sea ***X*** la variable aleatoria definida como el número de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño ***n***, seleccionada de ***N*** resultados de los cuales ***k*** son éxitos y ***N- k*** son fracasos; la distribución Hipergeométrica de la variable aleatoria ***X*** viene dada por

$$h(x;N;n;k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad para\ x = 0,1,2,\cdots,n$$

Ejemplo 6.7. Un lote de 30 computadoras contiene 6 defectuosas. Si 12 de ellas, se escogen al azar, y se revisan una tras otra ¿Cuál es la probabilidad de que 3 estén defectuosas?

Solución:

Sea ***X*** el número de computadoras defectuosas en una muestra de 12.

Ya que las computadoras son revisadas una tras otras, los ensayos son hechos sin reposición, por lo tanto las probabilidades varían de un ensayo a otro. De esto se desprende que la distribución es Hipergeométrica.

De la definición 6.4 se tiene que

$$x = 3 \qquad N = 30 \quad n = 12 \qquad k = 6$$

$$h(3; 30; 12; 6) = \frac{\binom{6}{3}\binom{30-6}{12-3}}{\binom{30}{12}} = \frac{(20)(1307504)}{86493225} = 0{,}3$$

Teorema 6.3.

La media, la varianza y la desviación estándar de una distribución Hipergeométrica son:

$$\mu_X = \frac{nk}{N}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{N-n}{N-1}\, n\, \frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Ejemplo 6.8. En relación con ejemplo 6.7; supóngase que se desea estimar la media, la varianza y la desviación estándar del número de computadoras defectuosas en la muestra de 12 de ellas escogidas al azar, sin reposición.

Solución:

Del ejemplo 6.7 y teorema 6.3 se tiene que

$$\mu_X = \frac{(12)(6)}{30} = 2{,}4$$

$$\sigma_X^2 = \frac{30-12}{30-1}\, 12\, \frac{6}{30}\left(1 - \frac{6}{30}\right) = 1{,}19$$

$$\sigma_X = \sqrt{1{,}19} = 1{,}09$$

Observación 6.5.

En la medida en que ***n*** sea extremadamente más pequeña que ***N***, la probabilidad, de un ensayo a otro, cambiará ligeramente. Por lo tanto, se puede realizar una aproximación a una distribución Hipergeométrica, utilizando una Binomial con ***p= k/N.***

Ejemplo 6.9. Un fabricante de puestas de metal señala que en un despacho de 6000 puertas enviadas a una ferretería, 300 estas ligeramente dañadas. Si un comprador adquiere 9 de estas puestas, seleccionadas al azar ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 estén dañadas?

Solución:

Sea ***X*** el número de puertas defectuosas en una muestra de 9 puertas.

Ya que ***n***=9 es muy pequeña en relación con ***N***=6000; utilizando la observación 6.5, donde $p = \frac{300}{6000} = 0{,}05$ se tiene que

$$h(4; 6000; 9; 300) \cong b\big(4; 9; (0{,}05)\big) = \binom{9}{4}(0{,}05)^4(0{,}95)^{9-4} = 0{,}00061$$

DEFINICIÓN 6.5. *Distribución Hipergeométrica Multivariada.*

Si ***N*** resultados se pueden repartir en ***k*** grupos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ con $c_1, c_2, \ldots, c_k$ elementos, respectivamente, entonces la distribución de probabilidad Hipergeométrica Multivariada de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_K$ que define el número de elementos seleccionados de $A_1, A_2, \ldots, A_k$ en una muestra aleatoria de tamaño ***n*** viene dada por

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k; c_1, c_2, \cdots, c_k; N; n) = \frac{\binom{c_1}{x_1}\binom{c_2}{x_2}\cdots\binom{c_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

$$donde \sum_{i=1}^{k} x_i = n \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i = N$$

Ejemplo 6.10. En una convención anual de una empresa están presentes 2 gerentes, 3 accionistas, 5 administradores y 2 dirigentes sindicales. Si se selecciona al azar un equipo de 4 personas, calcule la probabilidad de que todos los grupos estén representados.

Solución:

Sea $\boldsymbol{X}_1$ el número de gerentes seleccionados. Sea $\boldsymbol{X}_2$ el número de accionistas seleccionados. Sea $\boldsymbol{X}_3$ el número de administradores seleccionados. Sea $\boldsymbol{X}_4$ el número de dirigentes sindicales seleccionados. Para formar una muestra de tamaño 4.

Ya que hay 4 grupos se debe escoger uno de cada uno, por lo tanto

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Número de elementos por grupo $c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 5, c_4 = 2$

El total de elementos $\boldsymbol{N}$=12.

La muestra $\boldsymbol{n}$=4.

De la definición 6.5 se tiene que

$$f(1,1,1,1,;2,3,5,2;12;4) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{12}{4}} = 0{,}12$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

En una distribución Binomial se calcula la probabilidad de que un determinado número de éxitos ocurra en un determinado número de ensayos. En otros experimentos con las características de una distribución Binomial, puede interesar la probabilidad de que el $\boldsymbol{k}$ -ésimo éxito ocurra en el $\boldsymbol{x}$ –ésimo ensayo. A este tipo de experimento se le denomina distribución Binomial negativa. En la distribución Binomial la variable aleatoria ***X*** representa el número de éxitos. En ésta la ***X*** representa el número de ensayos necesarios para producir ***k*** éxitos.

DEFINICIÓN 6.6. *Distribución Binomial Negativa.*

En un experimento cuyos ensayos son repetidos e independientes, produciendo un éxito con probabilidad ***p*** y un fracaso con probabilidad ***1-p***, la distribución de probabilidad de la variable ***X***, la cual representa el número de ensayos en el cual se produce el ***k*** –ésimo éxito, está dada por

$$b^*(x;k;p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} \quad donde \quad x = k, k+1, k+2, \cdots$$

Teorema 6.4.

La media, la varianza y la desviación estándar de una distribución Binomial Negativa vienen dadas por:

$$\mu_X = \frac{k}{p}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{k(1-p)}{p^2} \qquad\qquad \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Ejemplo 6.11. Supóngase que el 15% de Licuadoras en determinada línea de ensamblaje tienen defectos. Si se seleccionan al azar las Licuadoras, una tras otra y se someten a prueba para luego devolverlas a la línea

a. Calcular la probabilidad de que se encuentre la segunda Licuadora defectuosa en el cuarto ensayo.
b. Calcular la media, varianza y desviación estándar.

Solución:

Sea ***X*** el número de ensayos en el cual hay dos Licuadoras defectuosas.

Parte a: De la definición 6.6, se tiene que

$p = 0{,}15 \quad q = 1 - p = 0{,}85$

k=2 significa la segunda Licuadora defectuosa

x=4 significa el cuarto ensayo en el cual se encuentra la segunda Licuadora defectuosa

$$b^*\big(2; 4; (0{,}15)\big) = \binom{3}{1}(0{,}15)^2(0{,}85)^{4-2} = 0{,}049$$

Parte b: Utilizando el teorema 6.4 se tiene que

$$\mu_X = \frac{2}{0{,}15} = 13{,}3$$

$$\sigma_X^2 = \frac{2(1-0{,}15)}{(0{,}15)^2} = 7{,}56$$

$$\sigma_X = \sqrt{7{,}56} = 8{,}69$$

Este resultado significa que se deben efectuar un promedio de 13,3 ensayos con una desviación estándar de 8,69 para lograr dos Licuadoras defectuosas.

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA.

Como un caso particular de la distribución Binomial Negativa se tiene la distribución Geométrica; tomando k=1.

DEFINICIÓN 6.7. *Distribución Geométrica****.***

En un experimento cuyos ensayos son repetidos e independientes, produciendo un éxito con probabilidad ***p*** y un fracaso con probabilidad ***1-p***, la distribución de probabilidad Geométrica de la variable ***X***, la cual representa el número de ensayos en el cual se produce el *primer* (***k***=1) éxito, está dada por

$$g(x,p) = pq^{x-1} \qquad donde \quad x = 1,2,3,\cdots$$

Teorema 6.5.

La media, la varianza y la desviación estándar de una distribución Geométrica, vienen dadas por:

$$\mu_X = \frac{1}{p}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(1-p)}{p^2} \qquad \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Ejemplo 6.12. Si 0,08 es la probabilidad de que cierto instrumento de medición de intensidad de luz sufra una desviación excesiva,

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el sexto de los instrumentos sometidos a prueba sea el primero en mostrar esa desviación?
b. Calcular la media, varianza y desviación estándar.

Solución:

Sea ***X*** el número de ensayos en el cual se produce el *primer* (***k***=1) instrumento que muestra una desviación excesiva.

Parte a: Utilizando la definición 6.7 se tiene que

x=6 es el número de instrumentos sometidos a prueba,

$$p = 0{,}08 \qquad q = 1 - p = 0{,}92$$

$$g(6; 0{,}08) = (0{,}08)(0{,}92)^{6-1} = 0{,}053$$

Parte b: Utilizando el teorema 6.5 se tiene que

$$\mu_X = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(1 - 0{,}08)}{(0{,}08)^2} = 143{,}75$$

$$\sigma_X = \sqrt{143{,}75} = 11{,}98$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON.

La distribución de Poisson representa la probabilidad de que un evento aislado ocurra un número específico de veces en un intervalo de tiempo o espacio dado. La ocurrencia de eventos sólo se verá afectada por la casualidad o por el azar; por lo tanto, la posición de un evento no servirá para predecir la localización de cualquier otro evento específico. Además, los datos acerca de un intervalo de tiempo o espacio tampoco facilitan la predicción del número de eventos que se presentarán en otro evento.

Un experimento de Poisson tiene las siguientes características.

a. El número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o espacio, es independiente del número que se tiene en cualquier otro intervalo.
b. La probabilidad de que un solo resultado ocurra durante un lapso muy corto o en una pequeña región, es proporcional a la magnitud del intervalo de tiempo o espacio, y no depende del número de resultados que se produzcan fuera del intervalo considerado.
c. La probabilidad de que ocurra más de un resultado en ese breve lapso o de que caiga en un pequeño espacio resulta despreciable.

DEFINICIÓN 6.8. *Distribución de Poisson.*

Sea ***X*** la variable aleatoria que representa el número de resultados que se producen en un intervalo de tiempo o espacio dado; la distribución de Poisson está dada por

$$p(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \qquad donde \quad x = 0{,}1{,}2,\cdots$$

μ^x Representa la media de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o espacio. El valor de $e \cong 2{,}72$.

Teorema 6.6.

La media, la varianza y la desviación estándar de una distribución de Poisson vienen dadas por:

$$\mu_X = \sigma_X^2 \qquad \sigma_X = \sqrt{\mu_X}$$

Ejemplo 2.13. En el departamento de mantenimiento de máquinas se recibe un promedio de 6 solicitudes de servicio por día.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban exactamente 3 solicitudes por día?
b. Estimar la media, la varianza y la desviación estándar.

Solución:

Sea ***X*** el número de solicitudes de servicio por día, que recibe el departamento de mantenimiento.

Parte a: Utilizando la definición 6.8 se tiene que

$$\mu_X = 6; \quad x = 3 \;\Rightarrow p(3;6) = \frac{e^{-6}6^3}{3!} = 0{,}089$$

Parte b: Utilizando el teorema 6.6 se tiene que

$$\mu_X = 6 = \sigma_X^2 \qquad \sigma_X = \sqrt{\mu_X} = \sqrt{6} = 2{,}45$$

Ejemplo 2.14. En promedio, cada rollo de 400 metros de aluminio laminado tiene tres defectos ¿Cuál es la probabilidad de que un espacio de 100 metros no tenga ningún defecto?

Solución:

Sea ***X*** el número de defectos que puede tener el laminado por espacio.

Ya que el promedio por cada 400 metros es 3, entonces por 100 metros será $\mu_X = \frac{100(3)}{400} = 0{,}75$ (Regla de tres).

Utilizando la definición 6.8 se tiene que

$$\mu = (0{,}75); \quad x = 0 \quad \Rightarrow p(0; 0{,}75) = \frac{(e)^{-0{,}75}(0{,}75)^0}{0!} = 0{,}47$$

Observación 6.6.

Si ***n*** es muy grande, se utiliza la fórmula

$$P(X \leq x) = P(x; \mu) = \sum_{k=0}^{x} p(k; \mu)$$

La tabla 2 anexa, proporciona las probabilidades acumuladas $P(x;\ \mu)$ en lugar de los valores de $p(x;\ \mu)$. El manejo de esta tabla es similar al de la tabla de la distribución Binomial (ver observación 6.2 y ejemplo 6.3).

Observación 6.7. Si se desea calcular la probabilidad $p(x;\ \mu)$, es decir para un valor particular, utilizando la tabla 2, se puede aplicar la fórmula.

$$p(x; \mu) = P(x; \mu) - P(x-1; \mu)$$

Ejemplo 2.15. Al examinar la aplicación de estaño por un proceso electrolítico continuo, se descubren en promedio 0,3 imperfecciones por minuto.

a. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 3 imperfecciones en 4 minutos?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan más de 4 imperfecciones en 6 minutos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de a lo sumo 6 imperfecciones en 15 minutos?

Solución:

Sea $\boldsymbol{X}$ el número de imperfecciones por un espacio de tiempo.

Parte a: Utilizando la observación 6.6 y 6.7 se tiene que

0,3 imperfecciones por minuto equivalen a $(0,3)4 = 1,2$ imperfecciones en 4 minutos.

$$\mu = 1,2;\ x = 3 \quad \Rightarrow p(3; 1,2) = P(3; 1,2) - (P(2; 1,2) = 0,966 - 0,879 = 0,087$$

Parte b: Utilizando la observación 6.6 se tiene que

0,3 imperfecciones por minuto equivalen a 1,8 imperfecciones en 6 minutos. Dado que se quiere calcular que hayan más de 4 infectados, se tiene que calcular $P(X > 4)$ o equivalente $1 - P(X \leq 4)$

$$\mu = 1,8;\ \ x = 4 \Rightarrow 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(4; 1,8) = 1 - 0,964 = 0,036.$$

Parte c: Utilizando la observación 6.6 se tiene que

0,3 imperfecciones por minuto equivalen a 4,5 imperfecciones en 15 minutos.

$$\mu = 4,5;\ \ x = 6 \Rightarrow P(X \leq 6) = P(6; 4,5) = 0,831$$

El valor 0,831 es un promedio de los valores entre μ= 4,4 y μ= 4,6

***Observación 6.8*.**

Se puede utilizar la distribución de Poisson para hallar una aproximación de la distribución Binomial; cuando ***n*** es muy grande y ***p*** se aproxima a cero, esto es, cuando la distribución Binomial es muy sesgada; tomando μ =***np***. Usualmente esta aproximación es satisfactoria cuando $n \geq 20 \quad y \quad p \leq 0,05$; y excelente cuando $n \geq 100 \quad y \quad np \leq 10$. En el caso en que ***p*** este cerca de ***1***, se puede utilizar la distribución de Poisson para aproximar la Binomial intercambiando las definiciones de lo que se considera éxito y fracaso.

Teorema 6.7. *Aproximación de la distribución Binomial a través de la de Poisson.*

Sea ***X*** una variable aleatoria con distribución Binomial ***b***(*x; n, p*). Cuando n es muy grande y α = *np* permanece constante,

$$b(x;n;p) \cong p(x;\mu)$$

Ejemplo 6.16. En un proceso de fabricación de botellas para refrescos presentan defectos de rajaduras que no son aceptadas por los compradores. Se sabe que en promedio 1 de cada 1000 de estos artículos tienen 2 o más rajaduras ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 9000 botellas se encuentren a lo sumo 8 botellas con defectos?

Solución:

En las condiciones en que está planteado el problema, se trata de una distribución Binomial. Pero se puede realizar una aproximación utilizando Poisson; ya que,

$$n = 9000 \geq 100; \qquad P = \frac{1}{1000} \leq 0{,}05; \quad np = 9 \leq 10$$

Sea ***X*** el número de botellas con defectos.

Utilizando el teorema 6.7, donde x=8, se tiene que

$$P(X \leq 8) = B(8; 9000; 0{,}001) \cong P(8; 9) = 0{,}456$$

TEORÍA DE COLAS.

Se pueden presentar problemas que tienen las características de un proceso de Poisson donde se relacionan números de unidades (automóviles, clientes, etc.) que son atendidos o que esperan ser atendidos en un lapso de tiempo muy breve.

DEFINICIÓN 6.9.

Supóngase que α es la tasa promedio de las unidades que son atendidas y β es la tasa promedio de las unidades que esperan; o α es la tasa promedio de las unidades que esperan y β es la tasa promedio de las unidades que son atendidas; de tal manera que $\alpha < \beta$. Donde la variable aleatoria representa el número de unidades que esperan o son atendidas.

a) *<u>Su distribución de probabilidad está dada por</u>*

$$\pi(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x \quad donde\ \ x = 0,1,2,\cdots$$

b) El número promedio de unidades atendidos o en espera esta dado por

$$\frac{\alpha}{\beta - \alpha}$$

c) El número promedio de unidades que esperan esta dado por

$$\frac{\alpha^2}{\beta(\beta - \alpha)}$$

d) El tiempo promedio de espera esta dado por

$$\frac{\alpha}{\beta(\beta - \alpha)}$$

Ejemplo 6.17. El arribo de automóviles a una estación de servicio de gasolina es un proceso de Poisson cuya tasa promedio de llegada de 2 por minuto. Los automóviles son atendidos con una tasa promedio de 3 por minuto; este servicio continua ininterrumpidamente hasta que todos los automóviles sean atendidos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya automóviles es la cola?
b) ¿Cuál es el promedio de automóviles que son atendidos o que esperan ser atendidos?
c) ¿Cuál es el promedio de automóviles en la cola?
d) ¿Cuál es el tiempo promedio de clientes que esperan ser atendidos?

Solución: ***X*** es el número de automóviles que esperan son atendidos en una estación de servicio de gasolina.

Parte a: Utilizando la definición 6.9 parte a) donde α =2, β =3 y *x=0*. Se tiene que la probabilidad de que no haya automóviles en la cola es.

$$\pi\,(0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=0{,}33$$

Parte b: Utilizando la definición 6.9 parte b) donde α =2 y β =3. Se tiene que el promedio de automóviles que son atendidos o que esperan ser atendidos es.

$$\frac{2}{3-2}=1$$

Parte c: Utilizando la definición 6.9 parte c) donde α =2 y β =3. Se tiene que el promedio de automóviles de automóviles en la cola es

$$\frac{2^{2}}{3(3-2)}=1{,}33$$

Parte d: Utilizando la definición 6.9 parte d) donde α =2 y β =3. Se tiene que el tiempo promedio (en minutos) de clientes que esperan ser atendidos es.

$$\frac{2}{3(3-2)}=0{,}67$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un obrero es seleccionado de un grupo de 12, para realizar un trabajo, extrayendo un número al azar de una caja que contiene 12 números, numerados del 1 al 12.

a. ¿Qué tipo de distribución representa el problema anterior?
b. Obtenga la distribución de probabilidad.
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el número extraído sea menor que 4?

2. Al someter a prueba un tipo de caucho para camiones sobre terreno mojado, se observó que el 30 % de los camiones no terminaron la prueba por deslizamientos de éstos. De los siguientes 16 camiones sometidos a prueba,
   a. Halle la probabilidad de que exactamente 6 camiones no finalicen la prueba.
   b. Halle la probabilidad de que de 4 a 8 camiones no finalicen la prueba.
   c. Halle la probabilidad de que menos de 5 camiones no finalicen la prueba.
   d. Halle la probabilidad de que más de 7 no finalicen la prueba.

3. Una compañía distribuidora de gas suministra a 10 establecimientos su producto. La probabilidad de que cualquiera de los establecimientos llame y haga un pedido es de 0,2, y es la misma para los otros establecimientos.
   a. Halle la probabilidad de que exactamente 4 establecimientos soliciten gas.
   b. Halle la probabilidad de que de 2 a 8 establecimientos soliciten gas.
   c. Halle la probabilidad de que menos de 5 establecimientos soliciten gas.
   d. Halle la probabilidad de que más de 7 establecimientos soliciten gas.

4. Se construye un sistema eléctrico con determinado número de componentes de respaldo en sus subsistemas. Un subsistema tiene 5 componentes idénticos, y cada uno tiene probabilidad 0,3 de fallar en menos de 1000 horas. Si se supone que los componentes trabajan de manera independientes, calcular la probabilidad de que
   a. Exactamente dos de los cuatro componentes duren más de 1000 horas.
   b. El subsistema trabaje más de 1000 horas.
   c. Halle la media, varianza y la desviación estándar del evento que consiste en que el subsistema funcione.

5. La probabilidad de que el nivel de ruido de un torno exceda 3 dB es 0,06.

a. Halle la probabilidad de que entre 11 de estos tornos el nivel de ruido en uno exceda 3 dB.
b. Halle la probabilidad de que entre 11 de estos tornos el nivel de ruido a lo más en dos se exceda 3 dB.
c. Halle la probabilidad de que entre 11 de estos tornos el nivel de ruido en dos o más se exceda 3 dB.
d. Halle la media, varianza y la desviación estándar.

6. El departamento de bomberos de una ciudad informa que entre los incendios en casas, un 72% aproximadamente se dan en casas solas, un 21% en apartamentos y el 7% restantes se presenta en otros tipos de vivienda. Si en un determinado día se informa independientemente de 4 incendios, calcular la probabilidad de que 2 sean en casas solas, 1 en un apartamento y 1 en otro tipo de vivienda.

7. Los vehículos que llegan a un cruce pueden virar hacia la izquierda o a la derecha, o continuar de frente. En un estudio sobre los patrones del tránsito en este cruce, realizado durante un largo período, los inspectores han observado que el 45% de los vehículos da vuelta a la izquierda, el 20% a la derecha y el resto continúan de frente.
   a. Calcular la probabilidad de que, para los siguientes 6 automóviles que lleguen al cruce, uno dé vuelta a la izquierda, dos a la derecha, y tres continúen de frente.
   b. Determinar la probabilidad de que, de los siguientes 4 vehículos que lleguen al cruce, por lo menos uno dé vuelta a la derecha.
   c. Calcular la media la varianza y la desviación estándar del número de vehículos que dan vuelta a la izquierda, si llegan 100 vehículos al cruce.

8. Un cargamento de 100 alarmas contra incendios contiene 6 defectuosas. Si tres de ellas son seleccionadas aleatoriamente y embarcadas para un comprador,

a. Calcular la probabilidad de que al cliente le toque una defectuosa. Utilice Distribución Hipergeométrica y luego la Distribución Binomial como una aproximación.
b. Calcule la media, varianza y desviación estándar.

9. Entre los 350 empleados de una compañía, 255 están sindicalizados mientras que los otros no. Si se escogen 9 por sorteo para integrar un comité que administre el fondo de jubilaciones,
   a. Calcule la probabilidad de que 6 estén sindicalizados mientras que otros no, utilizando la Distribución Hipergeométrica y luego la Distribución Binomial como una aproximación.
   b. Calcule la media, varianza y desviación estándar.

10. Se regresan máquinas impresoras al proveedor para que las limpie y las devuelva, de acuerdo a la garantía. No se llevan a cabo las reparaciones principales y, como resultado, algunos clientes reciben máquinas que trabajan mal. Entre 9 impresoras usadas que se suministran ahora, 3 funcionan mal. Un cliente desea rentar 3 máquinas de éstas en forma inmediata. Por lo tanto, se seleccionan 3 máquinas rápidamente y se le mandan, sin verificar,
    a. Calcular la probabilidad de que el cliente reciba todas las máquinas que funcionen.
    b. Calcular la probabilidad de que el cliente reciba por lo menos una máquina defectuosa.
    c. Calcular la probabilidad de que el cliente reciba tres máquinas que funcionen mal.
    d. Calcule la media, varianza y desviación estándar.
11. Una encuesta nacional revela que de 18000 personas casi el 69% desaprueban el fumar diario. Si 19 de estas personas seleccionadas al azar y se les pide su opinión,

a. Calcular la probabilidad de que más de 9 pero menos de 15 desaprueben dicho hábito.
b. Calcular la probabilidad de que más de 10 desaprueben dicho hábito.
c. Calcule la media, varianza y desviación estándar.

12. Una agencia de ventas de carros de varias marcas tiene para la venta 5 Ford, 7 Chevrolet, 4 Fiat, 3 Dodge y 4 Toyotas. Si la agencia selecciona al azar 9 de estos automóviles para darles servicio. Calcule la probabilidad de que 2 Ford, 3 Chevrolet, 1 Dodge, 1 Fiat y 2 Toyota sean sometidos a servicio.

13. Una empresa que solicita personal encuesta que el 35% de los aspirantes tienen conocimientos de manejo de computadoras. Supóngase que se tienen cuatro puestos en los que se necesitan conocimiento de manejo de computadoras,
   a. Calcule la probabilidad de que se encuentre al cuarto aspirante calificado en la sexta entrevista, si se seleccionan los solicitantes uno a uno y al azar.
   b. Calcule la media, varianza y desviación estándar.

14. En una fábrica de cemento se examinan los empleados para detectar si tienen cemento en los pulmones. Se pide a la fábrica que envíe a 4 empleados, cuyos resultados fueron positivos, a una clínica para mayores exámenes. Si el 40% de los empleados tuvieron resultados positivos en la detección de cemento en los pulmones, calcular la probabilidad de que se deba analizar a 11 empleados para encontrar a cuatro con cemento en los pulmones.

15. Una compañía que perfora pozos de agua explora cierta área para encontrar un pozo productivo. La probabilidad de que tenga éxito en una prueba es 0,25.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer pozo productivo sea el cuarto pozo perforado?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el explorador no vaya a encontrar un pozo productivo si solamente puede perforar a más 11 pozos?
c. Calcule la media, varianza y la desviación estándar.

16. El número de accidentes graves en una empresa manufacturera es de 11 por año, de manera tal que el ingeniero de seguridad industrial instituye un plan que considera efectivo para reducir el número de accidentes graves. Un año después de poner en práctica el plan, sólo han ocurrido cinco accidentes ¿Qué probabilidad hay de ocurran cinco o menos accidentes por año, si la frecuencia promedio sigue siendo de 11?

17. El número de nudos en un tipo de madera tiene un promedio de 1,8 nudos por metro cúbico. Encuentre la probabilidad de que un metro cúbico de madera tenga a lo más un nudo.
18. Se encuentra que sólo un carburador de cada mil está defectuoso, después de ser ensamblado en una fábrica, y los carburadores defectuosos se distribuyen de manera aleatoria.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que un embarque de 500 carburadores no tenga ningún carburador defectuoso?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que un embarque de 100 carburadores incluya cuando menos un carburador defectuoso?

19. Un inspector de tránsito destacado en un puesto de vigilancia impone en promedio 7 boletas por infracción por mes.
    a. Calcule la probabilidad de que en un mes cualquiera imponga exactamente 10 boletas por infracción.
    b. Calcule la probabilidad de que en un mes cualquiera imponga menos de 7 boletas por infracción.

c. Calcule la probabilidad de que en un mes cualquiera imponga por lo menos 2 boletas por infracción.

20. La llegada de gandolas a un puesto de carga tiene un promedio de tres por hora. La gandolas se descargan con un promedio de cuatro por hora y el proceso de descarga continua ininterrumpidamente hasta que todas las gandolas han sido descargadas.
    a. ¿Cuál es el promedio de gandolas que están siendo descargadas o que esperan ser descargadas?
    b. ¿Cuál es el promedio de gandolas en la cola?
    c. ¿Cuál es el tiempo promedio que una gandola debe esperar en la cola?
    d. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya gandolas en espera de ser descargadas?

CAPÍTULO 7

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONTINUA

Retomando la teoría sobre las distribuciones de probabilidad continua, se estudiarán distribuciones de gran uso en la Ingeniería como son: la Distribución Normal, Uniforme, Beta, Gamma, Exponencial y Weibull.

Es de hacer notar que cuando se calculan probabilidades utilizando estas distribuciones, pueden suceder, que los resultados difieran, esto es porque algunas se ajustan más a la realidad de los valores de la variable aleatoria; por tanto, se tiene que tener cuidado de escoger la distribución que se ajuste más a los datos. La experiencia del Ingeniero en el tratamiento del fenómeno y el conocimiento de las aplicaciones de estas distribuciones juega un papel importante.

DISTRIBUCIÓN NORMAL.

Se pueden mencionar tres importantes aplicaciones de la distribución normal.

- Primera, se pueden obtener aproximación de la distribución binomial.
- Segunda, se ha observado, que muchos fenómenos, tales como la resistencia de piezas, tienen una distribución normal.
- Tercera, distribuciones que no son normales, pueden ser normalizadas a través del Teorema Central del Límite.

Se debe tener cuidado al aplicar modelos de Probabilidad Normal, a situaciones dadas, sin previa comprobación. Suponer de manera errada una Distribución Normal puede llevar a errores muy serios. La gráfica de esta distribución, es una curva denominada *Curva Norma Estándar*; la cual tiene forma de campana, como se muestra a continuación:

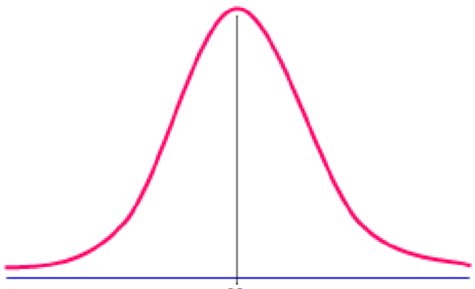


Gráfico 7.1. Curva Normal

La variable aleatoria continua ***X*** con Distribución Normal se denomina *variable aleatoria normal.*

DEFINICIÓN 7.1. *Distribución Normal.*

La función de densidad normal de la variable aleatoria normal ***X***, con media μ y desviación estándar σ es

$$n(x;\mu;\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\qquad -\infty<x<\infty$$

Las caraterísticas de la Distribución Normal son las siguientes:

a) La curva es simétrica con recpecto a la recta $x=\mu$. Se suele decir que es simétrica respecto a la media.

b) La distribución depende de la media y de la desviación estándar. Esto es muy importante, ya que podemos comparar poblaciones o muestras, comparado sus medias y sus desviaciones estándar.

   - En el caso dos poblaciones con desviaciones iguales, pero medias diferentes, las dos curvas son de forma idéntica, pero están centradas en distintas posiciones sobre una recta horizontal

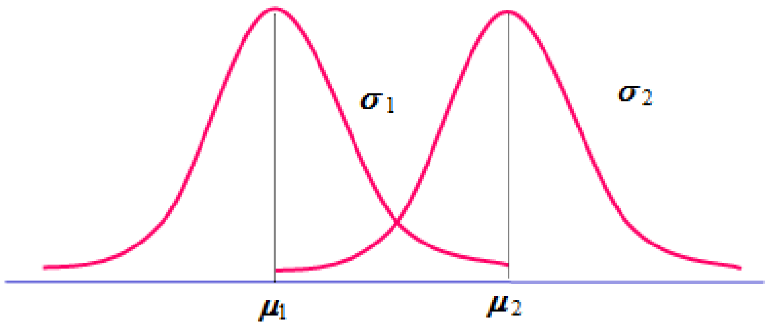


Gráfico 7.2. Comparación de Curvas Normales con medias diferentes y desviaciones estandar iguales.

.

- En el caso de dos poblaciones con desviaciones diferentes, y las medias iguales; las curvas están centradas en la misma posición, pero una de ellas es más achatada y extendida que la otra. La que tiene mayor desviación es la más achatada y extendida.

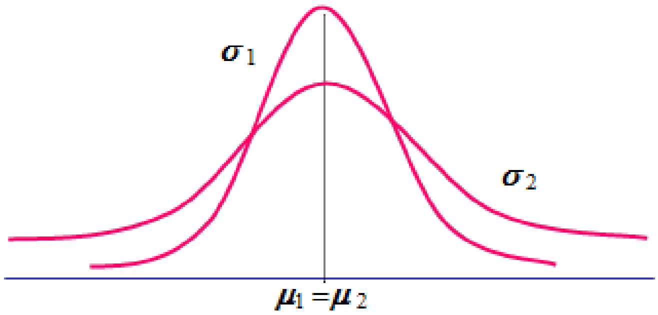


Gráfico 7.3. Comparación de Curvas Normales con la misma media y diferentes desviaciones.

- En el caso de dos poblaciones con desviaciones y medias diferentes, las curvas están centradas en posiciones deferentes y una de ellas es más achatada y extendida que la otra. La que tiene mayor desviación, es la más achatada y extendida.

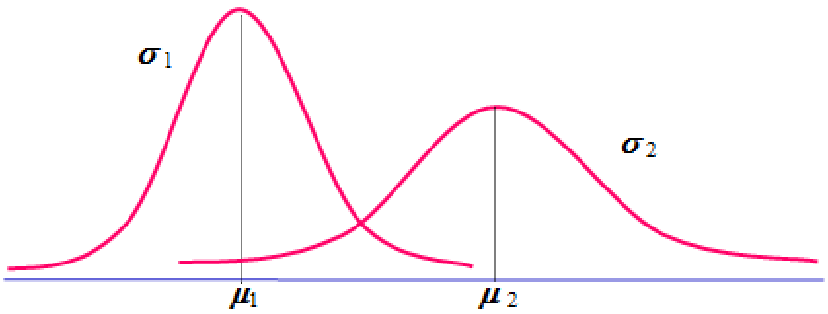


Gráfico 7.4. Comparación de Curvas Normales con medias y desviaciones diferentes .

c) Por la simétrica de la curva, el área de la región bajo la curva en el intervalo $(-\infty, \mu)$, es igual a 0,5; que corresponde a $P(x \leq \mu) = 0{,}5$. Igual en el intervalo (μ, ∞). Se suele decir que del lado izquierdo de la media se encuentra el 50% de los datos, así como del lado derecho; también se puede mencionar que la probabilidad del lado izquierdo o derecho de la media es de 0,5. En definitiva el área total bajo la curva es igual a 1.

DEFINICIÓN 7.2. *Distribución Normal Estándar.*

Es la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Z. Esta distribución tiene media $\boldsymbol{\mu = 0}$ y desviación estándar $\boldsymbol{\sigma = 1}$.

DEFINICIÓN 7.3. *Curva Normal Estándar.*

Es la curva que representa la Distribución Normal estándar.

Observación 7.1.

El cálculo de áreas bajo la curva, utilizando la definición 7.1, resulta muy tedioso, por lo que es conveniente aplicar una tabla estandarizada, convirtiendo los valores de la variable aleatoria ***X*** en valores ***Z,*** a través de la fórmula

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Observación 7.2.

La tabla 3 anexa, establece la Distribución Normal Estándar. Los valores de la tabla están colocados formando una matriz de filas y columnas. En la primera columna se encuentran los valores *z* hasta las décimas; en primera fila las centésimas. La tabla proporciona el área bajo la curva calculada de izquierda a derecha. Así si se desea calcular la probabilidad $P(Z \leq -2{,}43)$ se localiza en la primera columna –2,4, siguiendo por la fila 12, en intersección con la columna 5 se encuentra el número 0,0073 que corresponde a la probabilidad deseada.

Dado que se trata de una función de densidad con variable continua y se calcula el área bajo la curva, el tomar o no el extremo del intervalo proporciona el mismo valor del área.

Ejemplo *7.1.* Una máquina que expende bebidas en vasos esta calibrada de modo que descarga el producto con un promedio de 250 mililitros por vaso. Si la cantidad de líquido está distribuida normalmente con una desviación estándar de 14 mililitros.

a. ¿Qué porcentaje de vasos contendrá menos de 240 ml?
b. ¿Qué porcentaje de vasos contendrá más de 256 ml?
c. ¿Qué porcentaje de vasos contendrá entre 240 y 256 ml?
d. Si se usan vasos de 240 ml, ¿cuántos de los siguientes 500 vasos, se derramarán?
e. ¿Bajo qué valor estará el 30% de los vasos con menos contenido?
f. ¿Bajo qué valores está el 50% de los valores centrales?

Solución:

Parte a. Para hallar *P(X*<240*)* transformemos el valor *X* en valores *Z,* utilizando la observación 7.1. Ver gráfico 7.5 a.

$$\mu = 250; \quad \sigma = 14; \quad x = 240$$

$$z = \frac{240 - 250}{14} = -071$$

$$P(X < 240) \Leftrightarrow P(Z < -0{,}71)$$

En la tabla 3 anexa $P(Z < -0{,}71) = 0{,}2389 \Leftrightarrow 23{,}89\%$. Esto quiere decir que el porcentaje de vasos que contendrá menos de 240 ml es el 23,89%.

Parte b. Para hallar $P(X>256)$ transformemos el valor X en valores Z, utilizando la observación 7.1. Ver gráfico 7.5 b.

$$\mu = 250; \quad \sigma = 14; \quad x = 256$$

$$z = \frac{256 - 250}{14} = 0{,}43$$

$$P(X > 256) = 1 - P(X \leq 256) \Leftrightarrow 1 - P(Z \leq 0{,}43)$$

En la tabla 3 anexa $1 - P(Z \leq 0{,}43) = 1 - 0{,}6664 = 0{,}3336 \Leftrightarrow 33{,}36\%$. Esto quiere decir que el porcentaje de vasos que contendrá más de 256 ml es el 33,36%.

Parte c: Utilizando la parte a y b, ver gráfico 7.5 c, se tiene que

$$P(240 < X < 256) \Leftrightarrow P(-0{,}71 < Z < 0{,}43) = P(Z < 0{,}43) - P(-0{,}71)$$

$$= 0{,}6664 - 0{,}2389 = 0{,}4275$$

Esto quiere decir que el porcentaje de vasos contendrá entre 240 y 250 ml es el 42,75%.

Parte d: El vaso se derramará si el líquido que se vierte en él supera los 240 ml, por lo tanto calculemos el porcentaje de vasos que supera esta cantidad y multipliquemos el resultado por 500. Ver gráfico 7.5 d. $P(X > 240) = 1 - P(X \leq 240) = 1 - 0{,}2389 = 0{,}7611 \Leftrightarrow 76{,}11\%$. Multiplicando por 500 se tiene que 380,55 o aproximadamente 381 vasos se derramarán.

Parte e: Para hallar la cantidad de mililitros que contiene el 30% de los vasos con menos contenido, se debe calcular $P(Z < z) = 0{,}30$ el valor 0,30 está en la fila 30 entre las columnas 4 y 5; para decidir qué valor de z tomar, se puede asumir varios criterios, uno de ellos puede ser tomar un promedio entre los valores de z, o tomar el valor más cercano a 0,30 y luego ubicar el valor z. Tomemos un promedio, luego $z = \frac{-0{,}53+(-0{,}52)}{2} = -0{,}525$ despejando x de la fórmula de la observación 7.1 se tiene que $x = \mu + z\sigma \Rightarrow x = 250 + (-0{,}525)14 = 242{,}65$. Es decir 242,65 ml tendrán el 30% de los vasos con menos contenido. Ver gráfico 7.5 e.

Parte f: Para hallar los valores entre los cuales se encuentra el 50% de los valores centrales, es decir $P(x_1 < X < x_2) = 50\%$, ver gráfico 7.5 f, se encuentran los valores de x que cumplan con $P(X < x) = 0{,}25$ y $P(X < x) = 0{,}55$, para ello se ubican los valores z en la tabla 3 correspondientes a 0,25 y 0,75. Estos son -0,675 y 0,675 respectivamente; utilizando el despeje de la x de la fórmula de la observación 7.1 se tiene que,

$$x = 250 + (-0{,}675)14 = 240{,}55$$
$$x = 250 + (0{,}675)14 = 259{,}45$$

Por lo tanto, los valores entre los cuales se encuentra el 50% de los valores centrales son 241 y 259 ml aproximadamente.

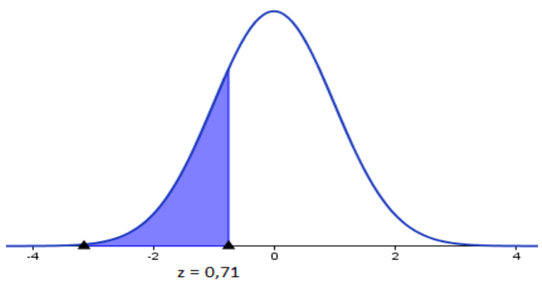


Gráfico 7.5 a. $P(Z < 0{,}71)$

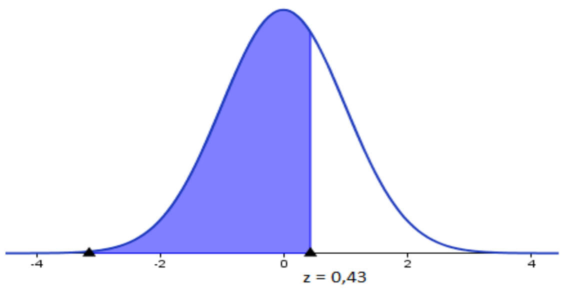


Gráfico 7.5 b. $P(Z < 0{,}43)$

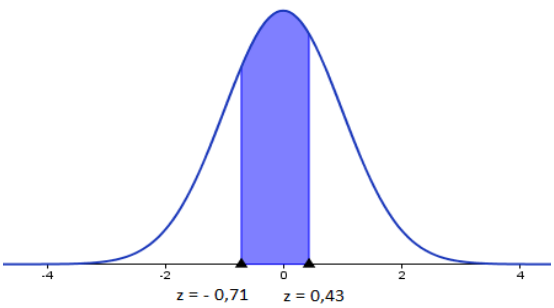


Gráfico 7. c. $P(-0.71 < Z < 0{,}43)$

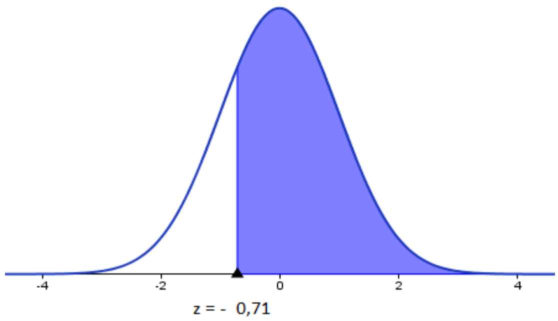


Gráfico 7.5 d. $P(Z > -0.71)$

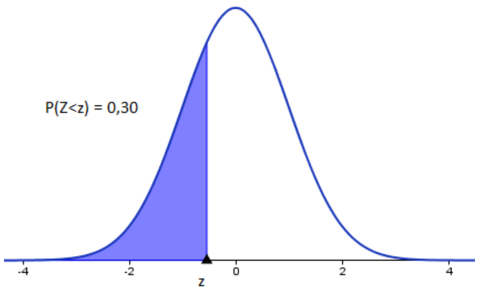


Gráfico 7.5 e. $P(Z < z) = 0{,}30)$

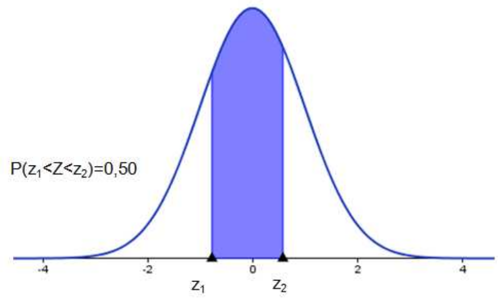


Gráfico 7.5 f. $P(z_1 < Z < z_2) = 0{,}50$

Ejemplo 7.2. Supóngase que el voltaje medido en un circuito eléctrico tiene Distribución Normal con media 110 voltios y desviación estándar 1,5 voltios. Si se toman cuatro mediciones independientes del voltaje ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro mediciones estén entre 106 y 108 voltios?

Solución: Para hallar la probabilidad pedida se debe encontrar $P(106 < X < 108)$ y luego elevarlo a la cuatro, ya que los cuatro eventos son independientes.

Hallemos los valores equivalentes de z para $x = 106$ y para $x = 108$

$$\mu = 110; \quad \sigma = 1{,}5; \quad \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{106 - 110}{1{,}5} = -2{,}67 \\ \\ z = \dfrac{108 - 110}{1{,}5} = -1{,}33 \end{cases}$$

$$P(-2{,}67 < X < -1{,}33) = P(X < -1{,}33) - P(X < -2{,}67) = 0{,}0918 - 0{,}0038 = 0{,}088$$

La probabilidad de que las cuatro mediciones estén entre 106 y 108 voltios, está dada por $(0{,}088)^4 = 0{,}00006$.

APROXIMACIÓN NORMAL A LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

En el capítulo 6, se estableció la aproximación de una Distribución Binomial a través de una Distribución de Poisson; Ahora utilizaremos la Distribución Normal para hallar esta aproximación.

Los criterios que establecen cuándo esta aproximación es aceptable son:

- Cuando ***n*** es muy grande.
- Cuando ***np* y *nq*** sean mayores que 5.
- Ya que se trabaja con una variable discreta, y se utiliza una distribución que corresponde a una variable continua, hay que aplicar una corrección por continuidad, la cual está dada por $P(x_1 \leq X \leq x_2) \cong P(x_1 - 0{,}5 \leq X' \leq x_2 + 0{,}5)$ donde X'es la variable transformada.
- Cuando ***p=q=1/2***, o cuando el valor de estas probabilidades es cercano a ***1/2***, la aproximación es excelente. Pero si ***p*** o ***q*** se alegan de ***1/2*** (es decir, cuando la distribución es sesgada), se requieren poblaciones o muestras más grandes para obtener una buena aproximación.

DEFINICIÓN 7.4. *Aproximación Normal a la Distribución Binomial.*

Si $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria discreta con Distribución Binomial, con $\mu = np$ y varianza $\sigma^2 = npq$, donde $n \to \infty$ entonces se puede aproximar a través de la Normal; donde los valores z vienen dados por

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

Ejemplo 7.3. Un gerente de almacén en una empresa informa que existe una probabilidad de 0,09 de que un artículo específico no esté en existencia. Si un embarque cubre los pedidos para 130 artículos distintos,

a. ¿Cuál es la probabilidad de que 16 a más de ellos no se encuentren en existencia?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 14 y 20 artículos (incluidos 14 y 20) no se encuentren en existencia?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que de 12 o menos de ellos no se encuentren en existencia?

Solución: la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ definida por el número de artículos en existencia en un almacén, es discreta, no obstante se puede aproximar, la probabilidad, a través de la distribución normal; ya que, si $\boldsymbol{n}$ = 130, $\boldsymbol{p}$ = 0,09, $\boldsymbol{q}$ = 0,91 entonces $\boldsymbol{np}$ = 11,7 y $\boldsymbol{nq}$ =118,3 son mayores que 5.

Parte a. La $P(X \geq 16)$ es equivalente, según la corrección por continuidad a $P(X' \geq 15{,}5)$ este intervalo contiene el 16.

$$P(X \geq 16) = P(X' \geq 15{,}5) = 1 - P(X' < 15{,}5)$$

Hallemos el valor $\boldsymbol{z}$ equivalente de

$$z = \frac{15{,}5 - 130(0{,}09)}{\sqrt{130(0{,}09)(0{,}91)}} = 1{,}16$$

Utilizando la tabla 3 anexa, se tiene que

$$P(X' < 15{,}5) = P(Z < 1{,}16) = 0{,}877$$

$$P(X \geq 16) = P(X' \geq 15{,}5) = 1 - P(X' < 15{,}5) = 1 - 0{,}877 = 0{,}123$$

Parte b. La $P(14 \leq X \leq 20)$ es equivalente, según la corrección por continuidad a $P(13{,}5 \leq X' \leq 20{,}5)$ este intervalo contiene el 14 y el 20.

$$P(13{,}5 \leq X' \leq 20{,}5) = P(X' \leq 20{,}5) - P(13{,}5 \leq X').$$

Encontremos los valores de *z* equivalente de 13,5 y 20,5.

$$z = \frac{13{,}5 - 130(0{,}09)}{\sqrt{130(0{,}09)(0{,}91)}} = 0{,}55$$

Utilizando la tabla 3 anexa se tiene que

$$P(X' \leq 13{,}5) = P(Z \leq 0{,}55) = 0{,}7088$$

$$z = \frac{20{,}5 - 130(0{,}09)}{\sqrt{130(0{,}09)(0{,}91)}} = 2{,}70$$

Utilizando la tabla 3 se tiene que

$$P(X' \leq 20{,}5) = P(Z \leq 2{,}70) = 0{,}9965$$

$$P(14 \leq X \leq 20) = P(13{,}5 \leq X' \leq 20{,}5) = 0{,}9965 - 0{,}7088 = 0{,}2877$$

Parte c. La $P(X \leq 12)$ es equivalente, según la corrección por continuidad, a $P(X' \leq 12{,}5)$ este intervalo contiene el 12.

Hallemos el valor *z* equivalente de

$$z = \frac{12{,}5 - 130(0{,}09)}{\sqrt{130(0{,}09)(0{,}91)}} = 0{,}25$$

Utilizando la tabla 3 se tiene que

$$P(X \leq 12) = P(X' \leq 12{,}5) = P(Z \leq 0{,}25) = 0{,}5987$$

APROXIMACIÓN NORMAL A LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON.

La Distribución de Poisson puede ser calculada a través de una Distribución Normal; un criterio utilizado para realizar tal cálculo es determinar si la media aritmética μ, de los datos, es mayor que 10, es decir $(\mu > 10)$.

DEFINICIÓN 7.5. *Aproximación Normal a la Distribución de Poisson.*

Sea $\boldsymbol{X}$ la variable aleatoria discreta con Distribución de Poisson, donde la media es suficientemente grande, entonces se puede aproximar a través de la Normal, donde los valores de *z* vienen dados por

$$z = \frac{x - \mu}{\sqrt{\sigma}}$$

Ejemplo 7.4. El promedio de solicitudes de servicio que recibe un departamento de mantenimiento en una empresa por cada turno de trabajo es 12 ¿Calcular la probabilidad de que se reciban más de 17 solicitudes?

Solución: la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ definida por el número de solicitudes que recibe un departamento de mantenimiento de una empresa, es discreta, no obstante se puede aproximar, la probabilidad, a través de la distribución normal; ya que $\mu = 12 > 10$.

La $P(X > 17) = P(X' > 16{,}5) = 1 - P(X' \leq 16{,}5)$

Hallemos el valor *z* equivalente de 16,5.

$$z = \frac{16{,}5 - 12}{\sqrt{12}} = 1{,}30$$

Utilizando la tabla 3 se tiene que

$$P(X > 17) = 1 - P(X' \leq 16{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}30) = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$$

DISTRIBUCIÓN UNIFORME.

Los eventos en los cuales la variable aleatoria asume valores en un intervalo finito, de manera que éstos se encuentran distribuidos de manera uniforme sobre un intervalo, responden a distribuciones uniformes.

DEFINICIÓN 7.6. *Distribución Uniforme.*

Sea ***X*** una variable aleatoria distribuida uniformemente sobre un intervalo (a, b). Su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

DEFINICIÓN 7.7. *Distribución Uniforme Acumulada.*

Sea ***X*** una variable aleatoria distribuida uniformemente sobre un intervalo (a, b). Su función de densidad acumulada viene dada por

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_a^t \frac{1}{b-a}\,dx = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{(x-a)}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Observación 7.3.

Para cualquier subintervalo (a_1, b_1) de (a, b) se tiene que

$$P(a_1 \leq X \leq b_1) = F(b_1) - F(a_1) = \frac{b_1 - a_1}{b - a}$$

DEFINICIÓN 7.8. *Media**,** Varianza y Desviación Estándar de una Distribución Uniforme.*

La media, la varianza y la desviación estándar de una distribución Uniforme vienen dadas por

$$\mu = \frac{a + b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(b - a)^2 \qquad\qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Ejemplo 7.5. Un sistema computarizado se detiene cuando uno de sus circuitos deja de funcionar. El tiempo que se tarda en que el departamento de mantenimiento compre el circuito dañado, está distribuido uniformemente en un intervalo de 1 a 6 días.

a. Definir la función de densidad.
b. Definir la función de densidad acumulada.
c. Calcular la probabilidad de que el tiempo de entrega sea mayor o igual a 2 días.
d. Calcular la probabilidad de que el tiempo de entrega este entre 2 y 5 días (inclusive).
e. Calcule la media, varianza y desviación estándar de la distribución.

Solución: Sea ***X*** la variable aleatoria que representa el tiempo que tarda el departamento de mantenimiento en adquirir el circuito integrado.

Parte a. Ya que el tiempo ***X*** está distribuido uniformemente de uno a seis días, según la definición 7.6, la función de densidad es

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6-1}=\dfrac{1}{5} & 1\leq x\leq 6\\[2ex] 0 & en\ otros\ casos\end{cases}$$

Parte b. La función de densidad acumulada, según la definición 7.7, es

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\[2ex] \dfrac{x-1}{6-1}=\dfrac{x-1}{5} & 1\leq x\leq 6\\[2ex] 1 & x>6\end{cases}$$

Parte c. Según definición 7.7, la

$$P(X\geq 2)=\int_2^6 \frac{1}{5}dx=\frac{4}{5}$$

Parte d. Según la observación 7.3, la probabilidad

$$P(2\leq X\leq 5)=F(5)-F(2)=\frac{5-2}{6-1}=\frac{3}{5}$$

Parte e. Según la definición 7.8, la media, varianza y desviación estándar son

$$\mu=\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

$$\sigma^2=\frac{1}{12}(6-1)^2=\frac{25}{12}=2{,}08 \qquad\qquad \sigma=\sqrt{\frac{25}{12}}=1{,}44$$

DISTRIBUCIÓN LOG-NORMAL.

Este tipo de distribución se utiliza cuando el logaritmo de la variable aleatoria posee una Distribución Normal.

DEFINICIÓN 7.9. *Función de densidad Log- Normal.*

Sea ***X*** una variable aleatoria continua. La función de densidad Log- Normal está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} x^{-1} e^{-\frac{(lnx-\alpha)^2}{2\beta^2}} & para\ x>0;\ \beta>0 \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

DEFINICIÓN 7.10.

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad log- normal. La probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entre a y b, con $\mu=\alpha$ y $\sigma=\beta$ viene dada por

$$F\left(\frac{lnb-\alpha}{\beta}\right) - F\left(\frac{lna-\alpha}{\beta}\right)$$

Donde *F* es la distribución normal estándar.

DEFINICIÓN 7.11. *Media**,** Varianza y Desviación Estándar de una Distribución Log-Normal.*

La media, varianza y la desviación estándar de una distribución Log-Normal, vienen dadas por

$$\mu = e^{\alpha+\frac{\beta^2}{2}}$$

$$\sigma^2 = e^{2\alpha+\beta^2}\left(e^{\beta^2}-1\right) \qquad\qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Ejemplo 7.6. Una comisión de análisis de riesgo, estudia el riesgo en una planta eléctrica, sugiere que se deben modelar la resistencia de los soportes de los generadores, en función de su capacidad para resistir a la aceleración máxima producida por los temblores. La opinión de los Ingenieros sugiere que la distribución se ajusta a la log-normal con $\mu = 3$ y σ^2=0,07.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los soportes resistan una aceleración máxima entre 30 y 35?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los soportes resistan una aceleración máxima superior a 35?

c. Halle la media, varianza y desviación estándar.

Solución:

Sea $\boldsymbol{X}$ la variable aleatoria que representa la aceleración máxima.

Parte a. Utilizando la definición 7.10, con $\mu = \alpha$=3 y $\sigma = \beta$=0,26, se tiene que

$$P(30 < X < 35) = P(X < 35) - P(X < 30) = F\left(\frac{ln35 - 3}{0,26}\right) - F\left(\frac{ln30 - 3}{0,26}\right)$$
$$= F(2,14) - F(1,54)$$

Utilizando la tabla de la distribución normal (tabla 3) se tiene que

$$F(2,14) - F(1,54) = 0,9838 - 0,9382 = 0,0456$$

Parte b. Utilizando la definición 7.10, con $\mu = \alpha$=3 y $\sigma = \beta$=0,26, se tiene que

$$P(X > 35) = 1 - P(x \leq 35) = 1 - F(2,14) = 1 - 0,9838 = 0,0162$$

Parte c. La media, la varianza y la desviación estándar viene dada por

$$\mu = e^{3+\frac{(0,26)^2}{2}} = 20,77$$

$$\sigma^2 = e^{6+(0,26)^2\left(e^{(0,26)^2}-1\right)} = 431,57 \qquad \sigma = \sqrt{431,57} = 20,77$$

DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA.

En estadística, la Distribución χ^2 (de Pearson), llamada *Ji* cuadrado, es una distribución de probabilidad continua con un parámetro ν que representa los grados de libertad de la variable aleatoria.

DEFINICIÓN 7.12. *Distribución ji Cuadrada.*

La función de densidad para la Distribución *ji* Cuadrada o χ^2 viene dada por:

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 \ \ en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Donde ν: $son\ los\ grado\ de\ libertad$

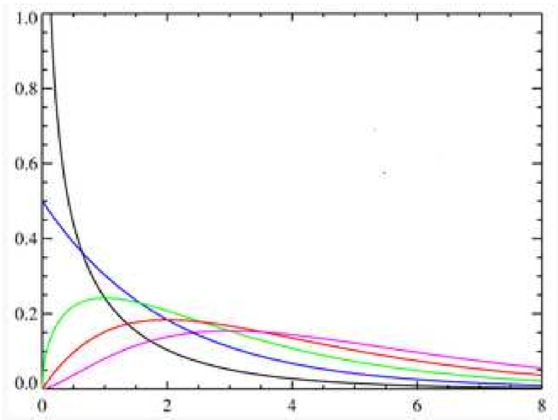


Gráfico 7.6. Distribución χ^2 (de Pearson) con diferentes grados de libertad.

Ejemplo 7.7. Halle la distribución de probabilidad χ^2 con 29 grados de libertad. Calcule la $P(\chi^2 > 42{,}557)$

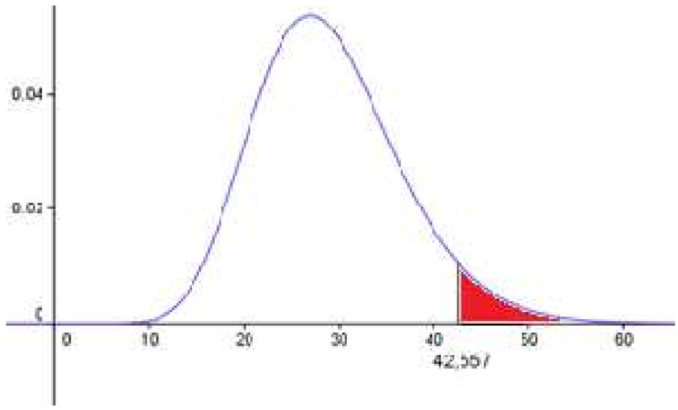
Solución

$\nu = 29$

Si consideramos la función de densidad, ésta vendría siendo

$$f(x;\nu = 29) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{29}{2}}\Gamma\left(\dfrac{29}{2}\right)} x^{\frac{29-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ \\ 0 \;\; en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

El gráfico fue hecho con el software libre GeoGebra.



Gráfica 7.7 Distribución $\boldsymbol{\chi^2}$ con $\nu = 29$

$$P(\chi^2 > 42{,}557) = \int_{42{,}557}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{29}{2}}\Gamma\left(\dfrac{29}{2}\right)} x^{\frac{29-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = 0{,}05$$

Observación 7.4.

- Para efectos del uso de este tipo de distribución en ocasiones es recomendable la aplicación de la tabla 4 anexa, contiene los valores de *ji* Cuadrada para los diferentes grados de libertad, de tal manera que el área bajo la curva a derecha del valor de la variable aleatoria es el valor de probabilidad α.
- La primera fila de la tabla contiene valores particulares de probabilidad α. La primera columna contiene los grados de libertad.
- Cada fila representa una distribución particular con su grado de libertad, valores particulares de la variable aleatoria, y valores particulares de

probabilidad. Por ejemplo, en relación al problema 7.7 para grados de libertad $\nu = 29$, con valor de la variable 42,557 la probabilidad es 0,05 (fila 1, columna 6). Que representa el área en el intervalo $((42{,}557), \infty)$.

DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

La Distribución ***t*** (de Student) surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño es pequeño. Se suele que una población se considera pequeña cuando es menor de 30 sujetos.

DEFINICIÓN 7.13. *Distribución t de Student.*

Sea **Z** una variable aleatoria normal estándar y sea $\boldsymbol{\chi^2}$ una variable aleatoria ji-cuadrada con ν grados de libertad, ambas independientes. Entonces la Distribución de

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2/\nu}}$$

Está dada por

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\,\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad para -\infty < t < \infty$$

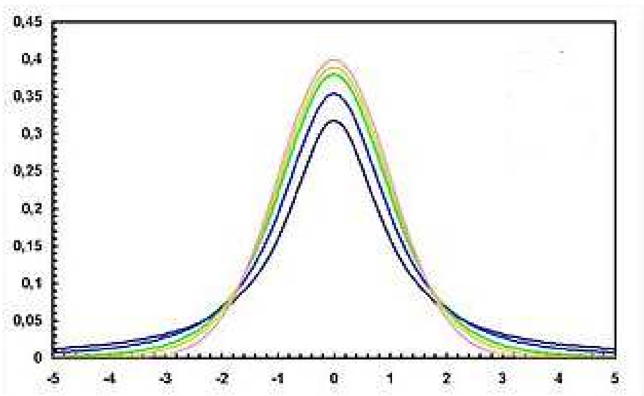


Gráfico 7.7. Distribución ***t*** de Student con diferentes grados de libertad.

Ejemplo 7.8

Halle la distribución de probabilidad ***t*** con 29 grados de libertad. Calcule la $P(\boldsymbol{t} > 1{,}895)$.

Solución

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{7+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\,7}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{7}\right)^{-\frac{7+1}{2}}$$

$$f(t) = \frac{6}{\sqrt{\pi\,7}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{7}\right)^{-4}$$

$$P(\boldsymbol{t} > 1{,}895) = \int_{1{,}895}^{\infty} \frac{6}{\sqrt{\pi\,7}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{7}\right)^{-4} = 0{,}05$$

Ver gráfica 7.8 a, en donde se representa la función y la región cuya área es 0,05

Observación 7.5

- Para efectos del uso de este tipo de distribución en ocasiones es recomendable la aplicación de la tabla 5 anexa
- La tabla proporciona el valor de la probabilidad para valores particulares α el cual es el área bajo la curva en el intervalo $(0, \infty)$, para estos valores.
- La primera fila de la tabla contiene valores particulares de probabilidad α La primera columna contiene los grados de libertad.

- Cada fila representa una distribución particular con su grado de libertad, valores particulares de la variable aleatoria, y valores particulares de probabilidad. Por ejemplo, si se desea calcular *P*($\boldsymbol{t}$ > 1,895), se ubica el valor 1,895 en la fila 8, columna 6. Los grados de libertad es ν=7 y el valor de la probabilidad $\alpha = 0{,}05$. Que representa el área en el intervalo $((1{,}895), \infty)$. Ver gráfico 7.8 a
- La curva es simétrica respecto la recta $t = 0$. Por tanto *P*($\boldsymbol{t}$ $< -1{,}8951$) es también $\alpha = 0{,}05$. Ver gráfico 7.8 b.

Los gráficos fueron hechos con el software libre GeoGebra.

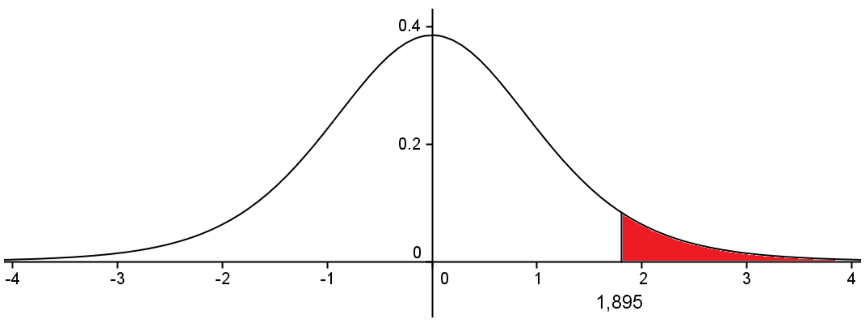


Gráfico 7.8 a. Distribución *t*, con ν=7

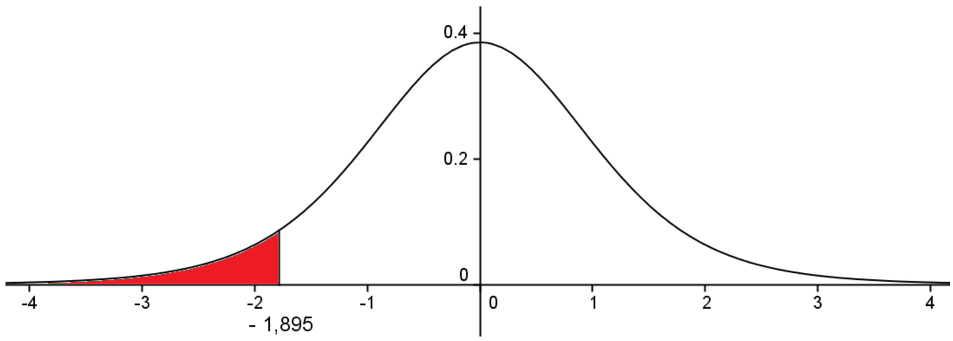


Gráfico 7.8 b. Distribución *t* con ν=7

DEFINICIÓN 7.14. *Distribución F.*

La Distribución **F** es una distribución de probabilidad continua. También se le conoce como Distribución **F de Snedecor** (por George Snedecor) o como Distribución **F de Fisher-Snedecor,** se define de la siguiente manera:

Sea χ_1^2 y χ_2^2 variables aleatorias independientes *ji* Cuadrada con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente. Defínase $F = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}$, la función de densidad para F, viene por:

$$g(F) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} F^{\left(\frac{\nu_1}{2}-1\right)}\left(1-\dfrac{\nu_1}{\nu_2}F\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)} & para\ F > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

También se puede definir como

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{B\left(\nu_1/2, \nu_2/2\right)}\left(\frac{\nu_1 x}{\nu_1 x+\nu_2}\right)^{\nu_1/2}\left(1-\frac{\nu_1 x}{\nu_1 x+\nu_2}\right)^{\nu_2/2} x^{-1} & para\ x > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Donde B es la función Beta.

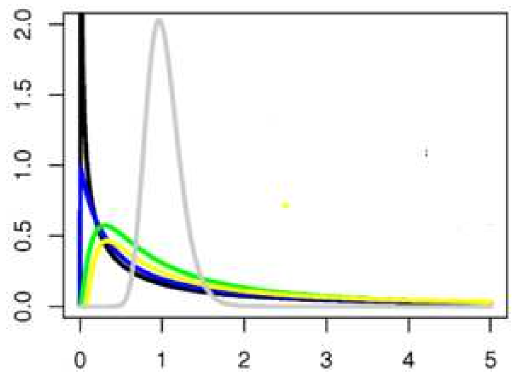


Gráfico 7.9. Distribución ***F*** con diferentes grados de libertad.

Ejemplo 7.9

Halle la Distribución de Probabilidad $\boldsymbol{F}$ con $\nu_1 = 4$ y $\nu_2 = 18$ grados de libertad. Calcule la $P(\boldsymbol{F} > 2{,}93)$.

Solución

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B\left(\nu_1/2, \nu_2/2\right)} \left(\dfrac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\nu_1/2} \left(1 - \dfrac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\nu_2/2} x^{-1} & para\ x > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B\left(4/2, 18/2\right)} \left(\dfrac{4x}{4x + 18}\right)^{4/2} \left(1 - \dfrac{4x}{4x + 18}\right)^{18/2} x^{-1} & para\ x > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(4,9)} \left(\dfrac{4x}{4x + 18}\right)^{2} \left(1 - \dfrac{4x}{4x + 18}\right)^{9} x^{-1} & para\ x > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

El gráfico fue hecho con el software libre GeoGebra.

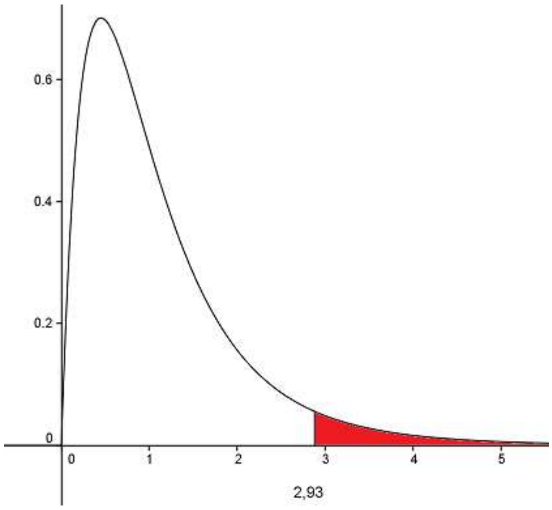


Gráfico 7.10. Distribución $\boldsymbol{F}$ con $\nu_1 = 4$ y ν_2= 18

$$P(\boldsymbol{F} > 2{,}93) = \int_{2{,}93}^{\infty} \frac{1}{B(4{,}9)} \left(\frac{4x}{4x+18}\right)^2 \left(1 - \frac{4x}{4x+18}\right)^9 x^{-1} \quad = 0{,}05$$

Observación 7.6

- Para efectos del uso de este tipo de distribución en ocasiones es recomendable la aplicación de la tabla 6 anexa, contiene los valores de $\boldsymbol{F}$ para los diferentes pares de grados de libertad, de tal manera que el área bajo la curva a derecha del valor de la variable aleatoria es el valor de probabilidad α.
- La tabla proporciona los valores de probabilidad α= 0,01 y α= 0,05.
- La primera fila de la tabla contiene valores particulares ν_1 y la primera columna contiene los valores de ν_2 los grados de libertad.
- Cada par de valores (ν_1, ν_2) corresponde a una distribución $\boldsymbol{F}$ en particular.
- Cada valor que se encuentra en la intersección de fila por columna es un valor de $\boldsymbol{F}$ cuya probabilidad es α= 0,01 ó α= 0,05 según sea el caso. Equivalentemente al área bajo la curva a la derecha del valor de ***F.***
- En ejemplo 7.8, para $\nu_1 = 4$ y $\nu_2 = 18$ grados de libertad. la $P(\boldsymbol{F} > 2{,}93) = 0{,}05$

<u>DISTRIBUCIONES ESPECIALES</u>

A continuación se expondrán las Distribuciones Gamma, Exponencial, Weibull y Beta. Estas distribuciones requieren para definir la función de densidad el cálculo de parámetros. En los libros de texto usualmente dan estos parámetros, en la práctica un procedimiento es recolectar mediciones y con ellos estimar los mismos. El procedimiento es tedioso y complicado; sin embargo, con el uso del software Statgraphics (entre otros) se pueden establecer los mismos. Este software puede ser descargado en calidad de prueba con una duración de 30 días de la página web http://statgraphics.softonic.com/ (fecha de consulta 21/05/2013)

<u>DISTRIBUCIÓN GAMMA.</u>

Este tipo de distribución es utilizada, por ejemplo, en el cálculo de probabilidades relativas a la duración de partes eléctricas, las cuales, pocas veces tienen vidas muy cortas, muchas tienen vidas cercanas al promedio, y muy pocas vidas bastante largas. Otro ejemplo es el de una pieza metálica cuando es sometida a cierta fuerza de compresión, hasta romperse, por lo tanto el tiempo que transcurre antes que la pieza se rompa, puede asociarse a una Distribución Gamma.

DEFINICIÓN 7.15. *Distribución Gamma.*

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria continua. La función de densidad Gamma con parámetros $\alpha > 0$; $\beta > 0$ está dada por:

$$g(x/\alpha\,;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

La media y la desviación estándar viene dada por

$$\mu = \alpha\beta \qquad\qquad \sigma = \sqrt{\alpha\beta^2}$$

Observación 7.7.

A continuación se presentan algunas gráficas de Distribuciones Gamma según los valores de α y β La cual puede tener forma de J invertida o de curva con concavidades diferentes.

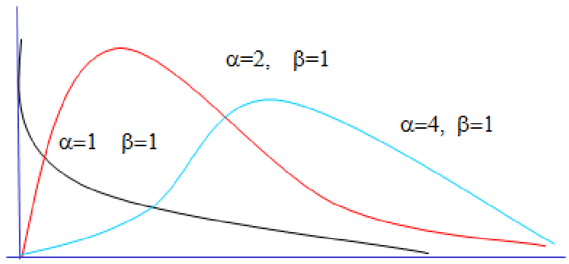


Gráfico 7.11. Distribuciones Gamma con distintos parámetros de forma y escala

Ejemplo 7.10. Supóngase que el intervalo de tiempo ***X*** necesario para efectuar una comprobación periódica de mantenimiento, de acuerdo a la experiencia, en un dictáfono, sigue una Distribución Gamma con α=3 y β=2 (minutos). Calcule la probabilidad de que un mecánico necesite entre 10 y 20 minutos, para revisar un dictáfono.

Solución:

X: Intervalo de tiempo necesario para efectuar una comprobación periódica de mantenimiento, de acuerdo a la experiencia, en un dictáfono.

Establezcamos la función Gamma con los parámetros dados,

$$g(x/3\,;2) = \begin{cases} \dfrac{1}{16}x^2 e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

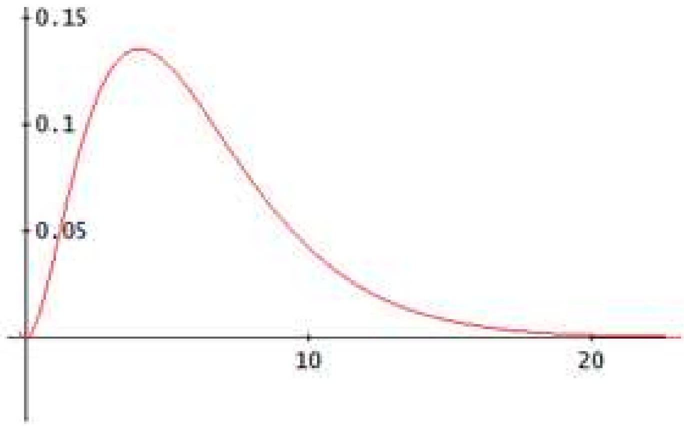


Gráfico 7.12. Representación de la Distribución Gamma

$$P(10 \leq X \leq 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{16} x^2 e^{-x/2}\, dx = 0{,}11184$$

Teorema 7.1.

Si las variables $X_1, X_2, \cdots, X_K$ son independientes y si X_i tiene una Distribución Gamma con parámetro α_i *y* β (i=1, ..., k), entonces la suma $X_1 + X_2 + \cdots + X_K$ tiene una Distribución Gamma con parámetros $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ *y* β.

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL.

En el caso de que α=1 la Distribución Gamma se transforma en una Distribución Exponencial. La gráfica de esta distribución tiene la forma de **J** invertida.

DEFINICIÓN 7.16.

Sea ***X*** una variable aleatoria continua. La función de densidad Exponencial está dada por:

$$e(x/1\,;\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-x/\beta} & x>0;\ \beta>0\\ 0 & en\ otros\ casos\end{cases}$$

$$\beta>0\ \ parámetro$$

La media y la desviación estándar viene dada por

$$\mu=\beta \qquad \sigma=\beta$$

Ejemplo 7.11. Una refinadora de azúcar tiene cinco plantas de proceso, y todas reciben azúcar blanca a granel. La cantidad de azúcar que puede procesar una planta en un día se puede representar mediante una función de densidad exponencial con promedio de 3(medidas en toneladas), para cada una de las cinco plantas. Si las plantas trabajan en forma independiente, calcular la probabilidad de que sean exactamente dos de las cinco plantas las que procesen más de 4 toneladas en un día determinado.

Solución:

X: La cantidad de azúcar que puede procesar **una** planta en un día determinado.

La función de densidad Exponencial con el parámetro β=3 (promedio) viene dada por

$$e(x/1\,;3)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}e^{-x/3} & x>0\\ 0 & en\ otros\ casos\end{cases}$$

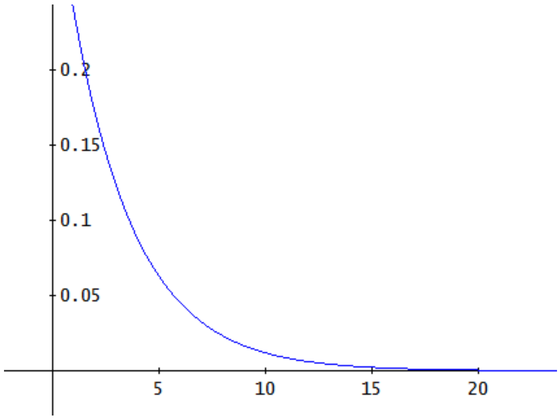


Gráfico 7.13. Representación de la Distribución Exponencial

$$P(x > 4) = \int_4^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\,x/3}\, dx = 0{,}26$$

Si se supone que las cinco plantas trabajan en forma independiente, se debe encontrar la probabilidad de dos éxitos en cinco ensayos, donde 0,26 es la probabilidad de éxito. Utilizando la Distribución Binomial, se tiene que:

$$b(2; 5; 0{,}26) = \binom{5}{2} (0{,}26)^2 (0{,}74)^{5-2} = 0{,}27$$

Teorema 7.2.

Si las variables $X_1, X_2, \cdots, X_K$ constituyen una muestra aleatoria de una Distribución Exponencial con parámetro β, entonces la distribución $Y = min\{X_1, X_2, \cdots, X_K\}$ tiene una Distribución Exponencial con parámetros *n* β.

Teorema 7.3.

Si las variables $X_1, X_2, \cdots, X_K$ son independientes y si X_i tiene una distribución exponencial con parámetro β_i (i=1,...,k), entonces $Y = min\{X_1, X_2, \cdots, X_K\}$ tiene una distribución exponencial con parámetros $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$.

DISTRIBUCION DE WEIBULL.

En teoría de la probabilidad y estadística, la **Distribución de Weibull** es una distribución de probabilidad continua. Recibe su nombre de Waloddi Weibull, que la describió detalladamente en 1951, aunque fue descubierta inicialmente por Fréchet (1927) y aplicada por primera vez por Rosin y Rammler (1933) para describir la distribución de los tamaños de determinadas partículas.

Esta distribución es utilizada como modelo para situaciones del tipo tiempo- falla y con el objetivo de lograr una amplia variedad de componentes mecánicos y eléctricos. La gráfica de la Distribución de Weibull tiene forma de J o de curva con concavidades diferentes.

DEFINICIÓN 7.17.

Sea ***X*** una variable aleatoria continua. La función de densidad de Weibull está dada por:

$$w(x/\alpha\,;\beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha^{\beta}} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} & x > 0 \\ \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0 \ \ parámetros$$

La media y la varianza de la distribución de Weibull viene dada por.

$$\mu = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\sigma^2 = \alpha^2\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - (\mu)^2\right)$$

Ejemplo 7.12. La vida de servicio de un determinado tipo de termistor produce resistencias dentro de sus especificaciones sigue una Distribución de Weibull con α=40 y β=2 (**mediciones en miles de horas**) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de esos termistores, que se ha de instalar en un sistema, trabaje en forma adecuada durante más de 10000 horas?

Solución: X: Vida de servicio de un determinado tipo de termistor.

La función de densidad viene dada por:

$$w(x/40\,;2)=\begin{cases}\dfrac{2}{(40)^2}x^{2-1}e^{-\left(\frac{x}{40}\right)^2} & x>0\\[2ex] 0 & en\ otros\ casos\end{cases}$$

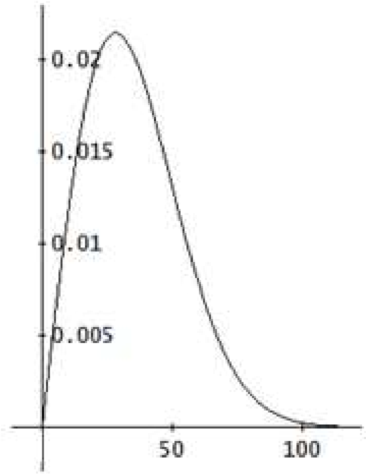


Gráfico 7.14. Representación de la Distribución Weibull

$$P(X>10)=\int_{10}^{\infty}\frac{2}{(40)^2}x^{2-1}e^{-\left(\frac{x}{40}\right)^2}\,dx=0{,}9394$$

<u>DISTRIBUCIÓN BETA.</u>

La Distribución Beta se utiliza para representar variables físicas cuyos valores se encuentran acotados por un intervalo de longitud finita y para encontrar ciertas cantidades que se conocen como límites de tolerancia; así como también en la estadística bayesiana. Así como la Distribución Gamma, la gráfica de la Distribución Beta también tiene forma de J o de curva con concavidades diferentes.

DEFINICIÓN 7.18.

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria continua. La función de densidad Beta está dada por:

$$b(x/\alpha\,;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1;\ \alpha>0;\ \beta>0\\ \\ 0 & en\ otros\ casos\end{cases}$$

$$\alpha;\ \beta\ \ par\acute{a}metros$$

La media y la varianza de la distribución Beta viene dada por.

$$\mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\qquad\qquad \sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Observación 7.8.

Debido a que los valores para la variable aleatoria, en esta distribución, deben estar entre 0 y 1, algunas veces hay que convertir los valores que se tienen a esta escala.

Ejemplo 7.13. Un distribuidor de gasolina tiene tanques de almacenamiento con un aprovisionamiento fijo. Los tanques se llenan cada martes. Para el distribuidor es importante la proporción de este volumen que se vende durante la semana. Durante varias semanas se ha observado que esa proporción se asemeja a una distribución de densidad Beta con α=5 y β=3 ¿Cuál es la probabilidad de que se venda por lo menos el 80% de su capacidad en una semana determinada?

Solución:

X: la proporción de este volumen de gasolina que se vende durante la semana.

La función de densidad Beta viene dada por:

$$b(x/5\,;3) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(5+3)}{\Gamma(5)\Gamma(3)} x^{5-1}(1-x)^{3-1} & 0 < x < 1 \\ \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

$$b(x/5\,;3) = \begin{cases} 35x^4(1-x)^2 & 0 < x < 1 \\ \\ 0 & en\ otros\ casos \end{cases}$$

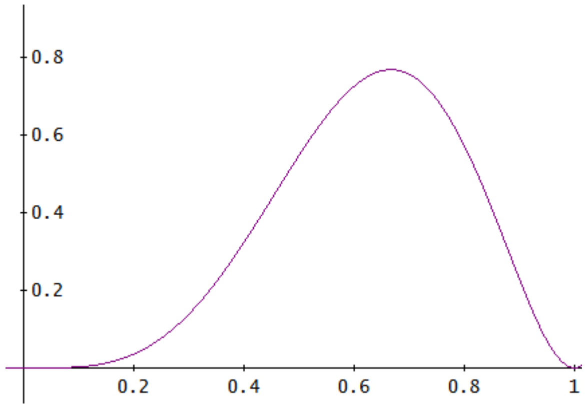


Gráfico 7.15. Representación de la Distribución Beta

$$P(X > 0{,}8) = \int_{0{,}8}^{1} 35x^4(1-x)^2 \; dx = 0{,}0014$$

Ejemplo 7.14. En un experimento sobre reacción nuclear se mide los intervalos de tiempo entre las emisiones de partícula beta.

0,991	2,27	0,424	0,14	0,159	0,527	0,431	0,162	0,919	0,994
0,061	0,09	0,216	0,06	0,082	1,033	0,092	0,076	0,9	0,149
0,186	0,14	0,579	0,75	1,653	2,863	0,83	0,107	0,093	0,866
0,311	0,08	0,429	0,19	2,01	0,365	1,718	0,278	0,041	0,054

Los tiempos vienen dados en milisegundos.

a. Determine los parámetros α y β para la distribución Gamma y defina la función de densidad. Utilice el Statgraphics para representar la distribución.

b. Determine el parámetro β para la distribución Exponencial y defina la función de densidad.

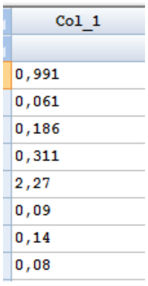
c. Determine los parámetros α y βpara la distribución Weilbull y defina la función de densidad.

d. Halle $P(0{,}34 < X < 0{,}67)$ utilizando cada distribución.

Solución:

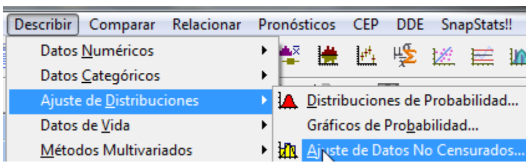
De manera general el procedimiento para la estimación de los parámetros de la distribución con el software Statgraphics es el siguiente:

Una vez abierto el software, en la hoja de cálculo que se muestra se debe escribir en una de las columnas los datos recolectados.

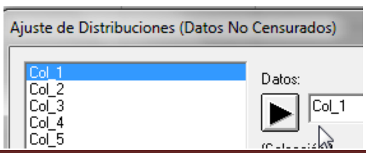


Col_1
0,991
0,061
0,186
0,311
2,27
0,09
0,14
0,08

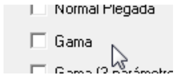
Se selecciona de la barra de herramientas la parte "Describir" y luego "Ajuste de Distribución" y seguido "ajuste de Datos No Censurados"



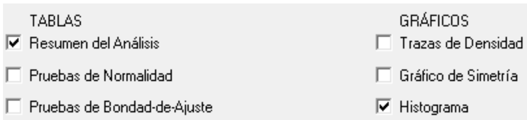
En la ventana que se despliega seleccionar en "Datos" la columna en estudio y se pulsa "Aceptar"



En la ventana “Opciones Ajuste de distribución” se selecciona la distribución que se requiere. En este caso la Distribución Gamma. Se pulsa “Aceptar”.



En la ventana “Tablas y Gráficos” seleccionar “Resumen de Análisis” e “Histograma”



Los valores de los parámetros se muestran a continuación:

Parte a.

Distribución Gamma	
Parámetro (Escala)	$\alpha = 1{,}54912$
Parámetro (Forma)	$\beta = 0{,}9031$

Utilizando los valores de los parámetros se define la función de densidad

$$g(x/\alpha\,;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(0{,}9031)^{1{,}54912}\Gamma(1{,}54912)}\; x^{1{,}54912-1}\; e^{-\frac{x}{0{,}9031}} & para\ x > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ otra\ caso \end{cases}$$

El Statgraphics proporciona un gráfico que incluye un diagrama de distribución de frecuencia y la gráfica de la función de densidad, que es gran ayuda al momento se visualizar cuál distribución de probabilidad se ajusta con mayor precisión.

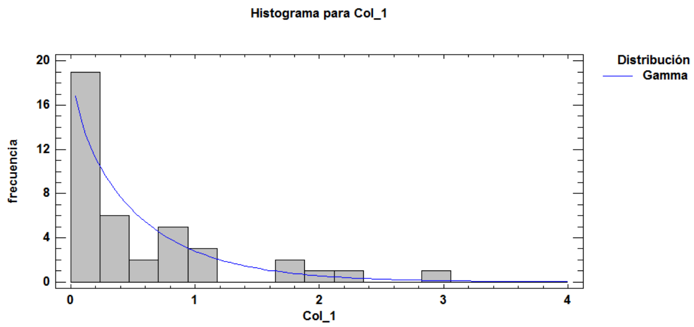


Gráfico 7.16. Histograma y Distribución Gamma aproximada.

Parte b. Repitiendo el procedimiento anterior para el cálculo de los parámetros. En este caso la distribución Exponencial (Se debe seleccionar "Exponencial-2 parámetros) se tiene:

Distribución Exponencial	
Parámetro (Forma)	$\beta = 1{,}8451$

Utilizando los valores de los parámetros se define la función de densidad

$$e(x/1\,;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1{,}8451}\, e^{-\frac{x}{1{,}8451}} & para\ x > 0 \\ 0 \ \ en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

La representación gráfica es la siguiente:

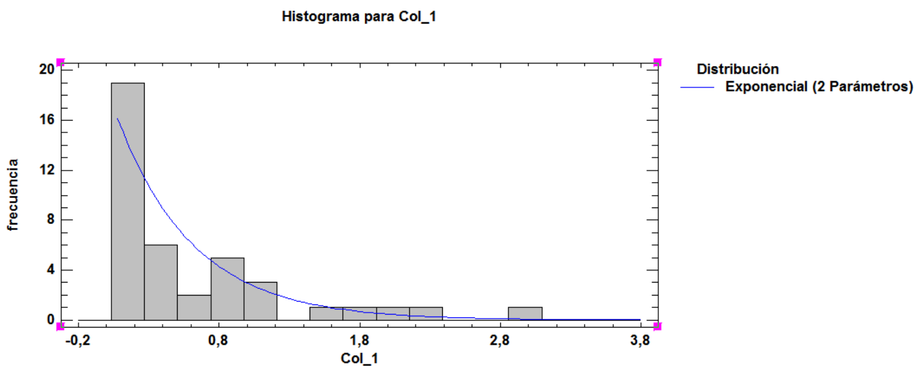


Gráfico 7.17. Histograma y Distribución Exponencial aproximada

Parte c. Con el procedimiento descrito anteriormente se tiene:

Distribución Weibull	
Parámetro (Escala)	$\alpha = 0{,}552665$
Parámetro (Forma)	$\beta = 0{,}90373$

Utilizando los valores de los parámetros se define la función de densidad

$$w(x/\alpha\,;\beta) = \begin{cases} \dfrac{0{,}90373}{(0{,}552665)^{0{,}90373}}\; x^{0{,}90373-1}\; e^{-\left(\frac{x}{0{,}552665}\right)^{0{,}90373}} & para\ x > 0 \\ 0 & en\ cualquier\ oteo\ caso \end{cases}$$

La representación gráfica es la siguiente:

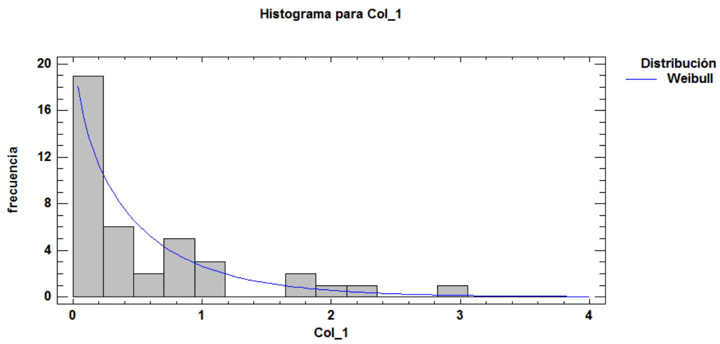


Gráfico 7.18. Histograma y Distribución Weibull aproximada.

Parte d.

Utilizando el software Derive en el cálculo de las integrales se tiene que:

Para la Distribución Gamma

$$P(0{,}34 < X < 0{,}67) = \int_{0{,}34}^{0{,}67} \frac{1}{(0{,}9031)^{1{,}54912}\Gamma(1{,}54912)}\, x^{1{,}54912-1}\; e^{-\frac{x}{0{,}9031}}\; dx$$

$$= 0{,}16909$$

Para la Distribución Exponencial

$$P(0{,}34 < X < 0{,}67) = \int_{0{,}34}^{0{,}67} \frac{1}{1{,}8451}\, e^{-\frac{x}{1{,}8451}}\; dx = 0{,}136209$$

Para la Distribución de Weibull

$$P(0{,}34 < X < 0{,}67) = \int_{0{,}34}^{0{,}67} \frac{0{,}90373}{(0{,}552665)^{0{,}90373}}\ x^{0{,}90373-1}\ e^{-\left(\frac{x}{0{,}552665}\right)^{0{,}90373}}\ dx$$

$$= 0{,}22063$$

Observación 7.9.

Al comparar las gráficas de la funciones de densidad que cada distribución con el histograma de frecuencia se observa que la Distribución de Weibull es la que más se aproxima.

Ejemplo 7.15. Se desea estudiar la vida útil (en cientos de horas) de una muestra de 50 baterías; los resultados se presentan a continuación:

0,0637	0,1601	0,0828	0,0715	0,2186	0,1668	0,1313	0,2535	0,2868	0,0914
0,1531	0,0152	0,1184	0,0474	0,1228	0,1232	0,0542	0,1793	0,1493	0,1952
0,0733	0,1826	0,0484	0,1525	0,2006	0,0577	0,1823	0,2741	0,1709	0,0984
0,2256	0,1868	0,1207	0,1709	0,1032	0,1274	0,0880	0,8342	0,0872	0,2119
0,2364	0,1126	0,0719	0,1305	0,1802	0,1623	0,1526	0,1360	0,1032	0,0431

a. Determine los parámetros α y β para la distribución Beta y defina la función de densidad. Utilice el Statgraphics para representar la distribución.
b. Halle $P(0{,}06 < X < 0{,}12)$.

Solución:

Parte a. Se debe destacar que para la aplicación de la Distribución Beta los datos recolectados deben estar en una escala del 0 al 1.

Siguiendo el procedimiento anterior para el cálculo de los parámetros se tiene:

Distribución Beta	
Parámetro (forma 1)	$\alpha = 1{,}8733$
Parámetro (forma 2)	$\beta = 9{,}73985$

Utilizando los valores de los parámetros se define la función de densidad

$$b(x/\alpha\,;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(1{,}87333+9{,}73985)}{\Gamma(1{,}87333)\Gamma(9{,}73985)}x^{1{,}87333-1}(1-x)^{9{,}73985-1} & 0<x<1\\ 0 & en\ otros\ casos\end{cases}$$

$$b(x/\alpha\,;\beta)=\begin{cases}(80{,}8523771)x^{0{,}87333}(1-x)^{8{,}73985} & 0<x<1\\ 0 & en\ otros\ casos\end{cases}$$

La representación gráfica es la siguiente:

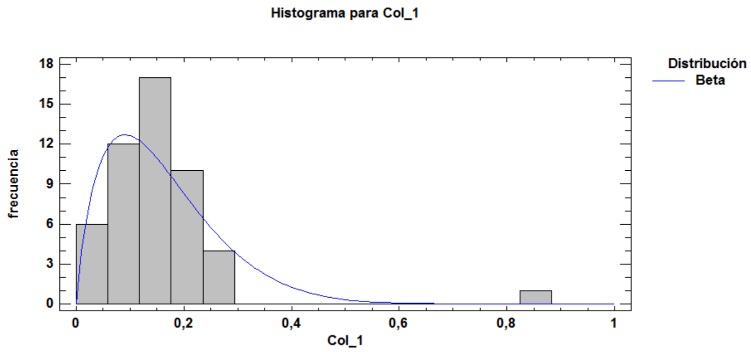


Gráfico 7.19. Histograma y Distribución Beta aproximada

Parte b.

$$P(0{,}06<X<0{,}12)=\int_{0{,}06}^{0{,}12}(80{,}8523771)x^{0{,}87333}(1-x)^{8{,}73985}\ \ dx=0{,}25508$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una máquina que expende bebidas gaseosas está calibrada de modo que descargue un promedio de 150 mililitros por vaso. Si la cantidad de líquido está distribuida normalmente con una desviación estándar igual a 12 ml.
   a. ¿Qué porcentaje de vasos contendrá más de 180 ml?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 140 y 170 ml?
   c. Si se usan vasos de 160ml, ¿cuántos de los siguientes 900 vasos se derramarán?

d. ¿Bajo qué valor estará el 20% de los vasos con menos contenido?

2. El diámetro interior de un anillo para émbolo se distribuye normalmente con una media de 9 cm y una desviación estándar de 0,2 cm.
   a. ¿Qué proporción de los anillos para émbolo tendrá un diámetro interior que exceda de 9,61 cm?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tendrá un diámetro interior entre 8,97 cm y 9,56 cm?
   c. ¿Bajo qué valor de diámetro interior estará el 13% de los anillos?

3 La vida media de cierto tipo de motor es de 9 años, con una desviación estándar de 1,5 años. El fabricante repone los motores que resulten dañados, siempre que estén dentro de la garantía. Si piensa reponer el 2,8% de los motores ¿Cuánto tiempo debe estimar la garantía? La vida útil de los motores se considera distribuidos normalmente.

4 El tiempo requerido para ensamblar una pieza mecánica es una variable aleatoria cuya distribución es aproximadamente normal, con media 11,59 min y desviación estándar de 1,8 min. ¿Cuál es la probabilidad de que el ensamblado de la pieza tarde
   a. al menos 10,60 min?
   b. Entre 10,70 y 12,9 min?

5. Una máquina troqueladora produce tapas, cuyos diámetros están normalmente distribuidos, con una desviación estándar de 0,02 pulg ¿En qué diámetro promedio debe ajustarse la máquina de tal manera que no más del 4% de las tapas producidas tengan diámetros que excedan las 2 pulg?

6. Los tiempos de la primera avería de una impresora de inyección a tinta tienen distribuciones normales con un promedio de 1400 horas y una desviación estándar de 180 horas.

   a. ¿Qué fracción de esas impresoras fallarán antes de 900 horas?
   b. ¿Cuál debe ser el tiempo de garantía para estas impresoras sí el fabricante desea que sólo presente averías el 4% de las impresoras dentro del tiempo de garantía?

7 Se estableció una restricción para el máximo de personas que pueden subir a un ascensor. Un estudio realizado indicó que si 9 personas ocupan el ascensor, la distribución de probabilidad del peso total de las 9 personas tiene una media de 1100 libras y una varianza de 9700 libras ¿Cuál es la probabilidad de que el peso total de nueve personas exceda de 1200 libras? Suponer la distribución normal.

8 En un proceso industrial se producen 11% de artículos defectuosos. Si 102 de ellos se seleccionan al azar.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de defectuosos exceda de 14?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de defectuosos sea menor que 9?

9 La confiabilidad de un fusible eléctrico es la probabilidad de que un fusible, escogido al azar de una producción, funcionará según las condiciones para las cuales fue diseñado. Se probó una muestra aleatoria de 980 fusibles y se observaron 29 defectuosos. Calcular la probabilidad de tener 29 o más defectuosos, si se supone que la confiabilidad del fusible es 0,97.

10 Un fabricante sabe que, en promedio, 3% de las tostadoras de pan que se producen requerirán reparación en los 80 días siguientes a su venta. Utilizando una aproximación normal a la binomial determine la probabilidad de que entre 1100 de las tostadoras de pan al menos 38 requieran reparación en los 80 días después de su venta.

11 Un ingeniero de seguridad industrial cree que 28% de todos los accidentes industriales en su planta se deben a que los empleados no siguen las disposiciones de seguridad. Si esta apreciación es correcta, calcúlese aproximadamente la probabilidad de que, entre 80 accidentes industriales, de 19 a 28 se deban a eso.

12 Si 70% de todas las nubes impregnadas con yoduro de plata muestran un crecimiento espectacular ¿Cuál es la probabilidad de que entre 39 nubes impregnadas con yoduro de plata a lo sumo 19 muestren un crecimiento espectacular?

13 Los siguientes datos son los tiempos de ignición de ciertos materiales de tapicería expuestos al fuego, dados a la más cercana centésima de segundo:

2,58	7,6	2,51	8,79	4,04	5,92	6,43	9,65	1,58	5,09
4,79	11,25	6,2	3,9	1,52	5,33	1,38	8,64	3,87	7,41
5,5	3,78	5,92	3,75	4,56	3,1	2,46	6,43	6,9	1,7
6,75	4,9	5,84	3,49	8,8	6,77	7,4	5,62	4,72	9,7
2,65	5,21	7,86	1,76	4,71	9,2	6,25	1,2	9,45	6,85
4,32	4,54	1,47	3,62	12,8	4,11	7,95	6,4	5,11	2,8

Utilizando la distribución log -Normal calcule la probabilidad

a. De que el tiempo de ignición este entre 2,55 y 4,99
b. De que el tiempo de ignición sea mayor de 5,31.

14 La carga sostenida en una zapata de concreto de un edificio en proyecto es una variable aleatoria. Supóngase que la carga muerta tiene una distribución gamma con $\alpha=8$ y $\beta=2$. Las unidades son miles de libras.

a. Establecer la distribución gamma según estos datos.
b. Calcular la probabilidad de que la carga sostenida esté entre 12 y 18.

15 En cierta ciudad, el consumo de energía eléctrica, en millones de kilowatt-horas, es una variable aleatoria que tiene una distribución gamma con α=2 y β=3. Si la planta de energía tiene una capacidad de producción diaria de 11 millones de kilowatt-horas ¿Cuál es la probabilidad de que este suministro de energía sea insuficiente en un día cualquiera?

16 La duración en años de cierto interruptor eléctrico tiene una distribución exponencial con una rapidez de falla de β= 3. Si 104 de dichos interruptores se instalan en diferentes sistemas ¿Cuál es la probabilidad de que, como máximo, fallen 10 durante el primer año?

17 Supóngase que cierto sistema contiene tres componentes que funcionan independientemente unos de otros y que están conectados en serie, de forma que el sistema falla tan pronto como uno de los componentes falla. Supóngase que el tiempo de vida del primer componente, medido en horas, tiene una distribución exponencial con parámetro β=10; el tiempo de vida del segundo componente tiene una distribución exponencial con parámetro β=30 y el tiempo de vida del tercer componente tiene una distribución exponencial con parámetro β=60. Determine la probabilidad de que el sistema no falle antes de 90 horas.

18 La proporción de hierro puro en determinadas muestras de mineral tiene una distribución beta con α=4 y β=2.

a. Estimar la probabilidad de que una de esas muestras tenga más del 50% de hierro puro.
b. Calcular la probabilidad de que dos de estas muestras tengan menos que el 28% de hierro puro.

19 El tiempo necesario para lograr una mezcla correcta de polvos de cobre antes de sinterizarlos tiene una distribución de Weibull con α=2 y β=4. Calcular la probabilidad de que un mezclado adecuado tome menos de 2 minutos.

20. Se desea estudiar la vida útil (en cientos de horas) de una muestra de 50 baterías; los resultados se presentan a continuación:

0,637	1,601	0,828	0,715	2,186	1,668	1,313	2,535	2,868	0,914
1,531	0,152	1,184	0,474	1,228	1,232	0,542	1,793	1,493	1,952
0,733	1,826	0,484	1,525	2,006	0,577	1,823	2,741	1,709	0,984
2,256	1,868	1,207	1,709	1,032	1,274	0,88	0,578	0,872	2,119
2,364	1,126	0,719	1,305	1,802	1,623	1,526	1,36	1,032	0,431

a. Determine las distribuciones Gamma, Exponencial y Weibull.

b. Halle $P(0{,}6 < X < 1{,}2)$ utilizando estas distribuciones.

CAPÍTULO 8

DISTRIBUCIÓN DE MUESTREO, ESTIMACIÓN PUNTUAL Y POR INTERVALO

La Inferencia Estadística es parte importante de nuestro estudio, por tanto vale la pena ejemplificar tal concepto: supóngase en una empresa se desea estudiar una característica específica de la fabricación de un artículo; por lo general se hace dificultoso el detallar cada uno de los artículos, no obstante si se toma una muestra de ellos se podría realizar una estimación del comportamiento de todos, es decir, de la Población.

Es claro que de una Población dada, se pueden tomar una considerable cantidad de muestras de un cierto tamaño. Es usual que muestras diferentes den resultados diferentes para un estadístico muestral. Es de esperar que un estadístico muestral pueda tener muchos valores diferentes. La distribución de las probabilidades de los valores de un estadístico muestral se denomina Distribución Muestral; lo cual es de real importancia en el campo de la Inferencia Estadística.

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA.

Para ilustrar el concepto de Distribución Muestral consideremos el siguiente ejemplo: supóngase que una variable aleatoria asume los valores 3, 5, 7, 9. Estos cuatro valores se pueden usar para simular una Población infinita si se toman muestras sin remplazo. Supóngase también que se toman muestras de tamaño 2; de tal manera que una muestra puede estar constituida por los valores 3 y 9, y otra por los valores 5 y 7 u otras combinaciones. Es relevante conocer todas las muestras que pueden resultar de un experimento. En la tabla 8.1 siguiente se describen las 16 posibles muestras diferentes que pueden formarse; por otra parte se pueden obtener un número infinito de muestras, pero solamente 16 son diferentes, el resto coincidirían con alguna de éstas.

La tabla contiene la media $\overline{X}$ de cada muestra. Esta asume los siguientes valores $\overline{x}$ siguientes 3, 4, 5, 7, 8 y 9. En la tabla 8.2 se presentan estos valores en correspondencia con su frecuencia y la probabilidad respectiva.

Ahora bien, la probabilidad de obtener una media muestral de 3 es 1/16, la de 4 es 2/16, y así sucesivamente. Esto no quiere decir que de 1600 muestras que se tomen, 100 muestras tengan media 3 y 200 muestras tengan media 4. Tampoco que de 1.600.000 de muestras se obtendrá 100.000 con media 3, y 200.000 con media 4. No obstante, si se toman 1.600 millones de muestras, el número de ellas con media se acercará a 100 millones, es decir, la razón será aproximadamente 1/16. Esto quiere decir que la distribución de probabilidades es la distribución de la frecuencia relativa, y solamente se le puede aproximar a través de un número infinitamente grande. En la práctica, no es necesario tomar tal cantidad de muestras, sino que se selecciona una muestra en particular y se realiza una inferencia acerca de las características de la distribución.

Muestra	X_1	X_2	Media muestral
1	3	3	3
2	3	5	4
3	3	7	5
4	3	9	6
5	5	3	4
6	5	5	5
7	5	7	6
8	5	9	7
9	7	3	5
10	7	5	6
11	7	7	7
12	7	9	8
13	9	3	6
14	9	5	7
15	9	7	8
16	9	9	9

TABLA 8.1. Muestras de tamaño 2 de una variable X.

Media Muestral $\bar{x}$	N° de Muestras	Probabilidad $P(\bar{x})$
3	1	1/16
4	2	2/16
5	3	3/16
6	4	4/16
7	3	3/16
8	2	2/16
9	1	1/16
Total	16	1

TABLA 8.2. Distribución de la media muestral $\overline{X}$ con Muestras de tamaño 2.

El estadístico muestral es una variable aleatoria, y por lo tanto es importante calcular su media y su dispersión

DEFINICIÓN 8.1. *Distribución de Muestreo de la Media Muestral* $\overline{X}$

Supóngase que se selecciona una muestra aleatoria de *n* mediciones de una población con media μ y desviación estándar σ, la distribución de muestreo de la media muestral tiene:

Media y desviación estándar

$$E(\overline{X}) = \mu_{\overline{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo 8.1. Utilizando la Población definida anteriormente como los números 3, 5, 7, 9; halle el promedio poblacional, la desviación estándar poblacional y compárelo con la media de la distribución muestral y la desviación estándar muestral.

Solución:

Según la definición 2.1 se tiene que la media poblacional es

$$\mu = \frac{3+5+7+9}{4} = 6$$

Según la definición 2.3 se tiene que la desviación estándar poblacional es

$$\sigma = \sqrt{\frac{164-4(36)}{4}} = \sqrt{5} = 2{,}236$$

Según las definiciones 5.1 y 8.1 se tiene que la media muestral es

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = 3\frac{1}{16} + 4\frac{2}{16} + 5\frac{3}{16} + 6\frac{4}{16} + 7\frac{3}{16} + 8\frac{2}{16} + 9\frac{1}{16} = \frac{96}{16} = 6 = \mu$$

Según la observación 5.6

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{E\left(\overline{X}^2\right) - \mu_{\overline{X}}^2}$$

Donde

$$E\left(\overline{X}^2\right) = 9\frac{1}{16} + 16\frac{2}{16} + 25\frac{3}{16} + 36\frac{4}{16} + 49\frac{3}{16} + 64\frac{2}{16} + 81\frac{1}{16} = \frac{616}{16} = 38{,}5$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{38{,}5-36} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}581$$

De la definición 8.1 se tiene que la desviación estándar muestral es

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 1{,}581$$

De aquí que

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{E\left(\overline{X}^2\right) - \mu_{\overline{X}}^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Observación 8.1.

Analizando la relación entre la desviación estándar poblacional, el tamaño muestral y la desviación estándar muestral se puede señalar que: si el tamaño muestral es 1 la desviación estándar muestral es igual a la desviación estándar poblacional; si el tamaño muestral es 4 la desviación estándar muestral es la mitad de la desviación estándar poblacional. Si el tamaño muestral se hace infinitamente grande, la desviación estándar muestral tiende a cero, lo cual significa que la media muestral se puede considerar igual a la media poblacional. Como se ha señalado anteriormente, en la práctica resulta imposible tomar todas las combinaciones de muestras de tamaño *n* para establecer la distribución muestral; de tal manera de estimar el promedio poblacional a través de una muestra; para lograr esta información lo que hay que hacer es tratar de disminuir la desviación estándar muestral (utilizando la definición 8.1 de la desviación estándar) aumentando considerablemente el tamaño de la muestra.

Observación 8.2.

Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, la distribución muestral de $\overline{X}$ será aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Este resultado es una consecuencia del teorema, denominado, ***Teorema del Límite Central.***

Teorema 8.1. *Teorema del Límite Central.*

Si $\bar{x}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño *n* tomado de una población con media μ y desviación estándar σ, entonces:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Representa el valor de una variable aleatoria *Z*, cuya función de distribución se aproxima a la distribución normal estándar, cuando $n \to \infty$.

Observación 8.3.

La aproximación normal para $\overline{X}$ será aceptable cuando $n \geq 30$, y si $n < 30$ esta aproximación es aceptable si la población está distribuida normalmente.

Ejemplo 8.2. Una empresa que fabrica bombillas que tienen una duración distribuida en forma aproximadamente normal, con media igual a 700 horas y desviación estándar de 35 horas. Obtenga la probabilidad de que una muestra aleatoria de 38 bombillas tenga una vida media menor que 685 horas.

Solución:

$\overline{X}$: Promedio de duración de las bombillas.

Según el teorema 8.1 se tiene que:

$$\overline{x} = 700 \qquad \sigma = 35 \qquad n = 38$$

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{685 - 700}{35/\sqrt{38}} = -2{,}64$$

$$P(\overline{X} \leq 685) = P(Z \leq -2{,}64) = 0{,}0041$$

Observación 8.4.

La aplicación de la teoría anterior requiere del conocimiento del valor de la desviación estándar poblacional. Si no se conoce este valor, es recomendable, utilizar la desviación estándar de la muestra, si $n \geq 30$ es grande. Si el tamaño de la muestra es $n < 30$, se puede aplicar la distribución ***t*** de Student (Ver cap. 7)

DEFINICIÓN 8.2.

Si $\overline{x}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño *n*, tomada de una población normal con media μ y *s* es el valor de la desviación estándar de la muestra, la cual es una estimación de desviación estándar poblacional σ, y t es el valor de una variable aleatoria con distribución $\boldsymbol{t}$ de Student y grados de libertad $\nu = n - 1$, entonces:

$$t_{\alpha,\nu} = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Ejemplo 8.3. Un fabricante de fusibles asegura que con una sobrecarga del 22%, sus fusibles se fundirán al cabo de 11,30 minutos en promedio. Para probar esta afirmación, se tomó una muestra de 18 de los fusibles y se sometieron a prueba aplicándoles una sobrecarga del 22%, y los tiempos que tardaron en fundirse tuvieron una media de 10,38 minutos y una desviación estándar de 2,84 minutos. Si se supone que las poblaciones se distribuyen normalmente ¿Este resultado refuta o apoya la afirmación del fabricante?

Solución:

$\bar{X}$: Promedio del tiempo que tardan en fundirse, los fusibles sometidos a una sobrecarga del 22%.

Según la definición 8.2 se tiene que:

$$\bar{x} = 10{,}38 \qquad \mu = 11{,}30 \qquad s = 2{,}84 \quad n = 18 \qquad \nu = 18 - 1 = 17$$

$$t = \frac{10{,}38 - 11{,}30}{2{,}84/\sqrt{18}} = -1{,}37$$

$$P(\bar{X} \le 10{,}38) = P(t \le -1{,}37) < P(t \le -1{,}74) = 0{,}05$$

En vista que la probabilidad es muy pequeña, se concluye que los datos se inclinan a refutar la afirmación del fabricante.

Observación 8.5.

Supóngase que se tienen dos poblaciones, la primera con media μ_1 y varianza σ_1^2, para cual se establece el estadístico $\bar{X}_1$ que representa la media de una muestra de tamaño n_1 de esta población; y la segunda población con media μ_2 y varianza σ_2^2, para cual se establece el estadístico $\overline{X}_2$ que representa la media de una muestra de tamaño n_2 de esta población. Entonces la distribución muestral de la diferencia $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ para muestras repetidas de tamaño $n_1 \; y \; n_2$ se aproximará cada vez más, a medida de se aumente los tamaños muestrales. Esta observación nos lleva a establecer el siguiente teorema.

Teorema 8.2.

Si muestras independientes de tamaños $n_1 \; y \; n_2$ son tomadas de dos poblaciones que tienen medias μ_1 , μ_2 y varianzas $\sigma_1^2 \; y \; \sigma_2^2$ respectivamente, la distribución muestral de las diferencias de las medias $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$, es aproximadamente normal, con media y varianza muestral dadas por:

$$\mu_{\overline{X_1}-\overline{X}_2} = \mu_1 = \mu_2$$

$$\sigma^2_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Y por lo tanto:

$$z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}}$$

Representa el valor z de la variable aleatoria Z con distribución normal estándar.

Ejemplo 8.4. Los cinescopios para receptores de televisión que son producidos por una compañía A tienen una media de 5,6 años, con una desviación estándar de 0,8 años, mientras que los que fabrica una compañía B tienen una vida media de 4,5 años, con una desviación estándar de 0,7 años ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de

40 cinescopios de la compañía tenga una vida media que sea por lo menos un año mayor que la vida media de una muestra de 50 cinescopios de la compañía B?

Solución:

$\overline{X}_1$: Promedio muestral de vida de los cinescopios para receptores de televisión producidos por la compañía A.

$\overline{X}_2$: Promedio muestral de vida de los cinescopios para receptores de televisión producidos por la compañía B.

Los valores correspondientes a la media poblacional, desviación estándar poblacional y tamaño muestral de cada población vienen dados por:

$$\mu_1 = 5{,}6 \qquad \mu_2 = 4{,}5$$

$$\sigma_1 = 0{,}8 \quad \sigma_2 = 0{,}7$$

$$n_1 = 40 \quad n_2 = 50$$

Se quiere determinar $P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 1)$. Hallemos el valor de *Z*. Utilizando el teorema 8.2 se tiene que:

$$z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}} = \frac{1 - (5{,}6 - 4{,}5)}{\sqrt{\frac{(0{,}8)^2}{40} + \frac{(0{,}7)^2}{50}}} = -0{,}63$$

y por tanto,

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 1) = P(Z \geq -0{,}63) = 1 - P(Z < -0{,}63) = 1 - 0{,}2643 = 0{,}7357$$

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA VARIANZA.

Para complementar el estudio de la distribución muestral, es importante el estudio de su varianza; para ello utilizamos la distribución *ji* cuadrada.

DEFINICIÓN 8.3. *Distribución ji Cuadrada.*

Si s^2 es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño *n*, la cual es tomada de una población normal cuya varianza es σ^2 entonces:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Es un valor de una variable aleatoria que tiene la distribución *ji* cuadrada con $\nu = n-1$ grados de libertad.

Ejemplo 8.5. Una óptica adquiere cristales, y se sabe que la varianza del índice de refracción de esta clase de cristales es $1{,}36 \cdot 10^{-4}$. Ya que se necesita que los diversos cristales tengan un índice de refracción muy parecido, la óptica rechaza uno de los cargamentos si la varianza muestral de 30 cristales, escogidos al azar exceda a

$2{,}02 \cdot 10^{-4}$. Suponiendo que los valores muestrales pueden considerarse como una muestra aleatoria de una población normal ¿Cuál es la probabilidad de que un cargamento sea rechazado a pesar que la varianza es de $1{,}36 \cdot 10^{-4}$?

Solución:

$$n = 30 \qquad s^2 = 1{,}36 \cdot 10^{-4} \qquad \sigma^2 = 2{,}02 \cdot 10^{-4}$$

$$\chi^2 = \frac{(30-1)2{,}02 \cdot 10^{-4}}{1{,}36 \cdot 10^{-4}} = 43{,}07$$

Con $\nu = n - 1 = 29$, la probabilidad (recuerde que la tabla da el área a la derecha del valor de *ji* cuadrada). El valor 43,07 se encuentra entre los valores 42,557 y 45,772 se puede decir que:

$$P(\chi^2 > 43{,}07) \cong 0{,}05$$

Por lo tanto la probabilidad de un cargamento sea rechazado es menor que 0,05.

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DEL COCIENTE DE VARIANZAS.

Un problema que suele presentarse es determinar si dos muestras provienen de poblaciones que tienen varianzas diferentes. Si dos varianzas muestrales son muy semejantes es de esperar que su razón sea muy cercana a 1. La siguiente definición proporciona un procedimiento para el estudio de este tipo de problemas.

DEFINICIÓN 8.4. *Distribución F.*

Si $s_1^2 \ y \ s_2^2$ son las varianzas de muestras aleatorias independientes de tamaño $n_1 \ y \ n_2$, respectivamente, tomadas de dos poblaciones distribuidas normalmente que tienen la misma varianza, entonces:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Es un valor de una variable aleatoria que tiene distribución *F* con grados de libertad $\nu_1 = n_1 - 1 \ y \ \nu_2 = n_2 - 1$.

Observación 8.6

Se puede utilizar la tabla 6 anexa, para hallar valores de *F* correspondientes a las probabilidades del área a la izquierda de 0,01 y 0,05, utilizando la fórmula.

$$f_{1-\alpha}(\nu_1;\nu_2) = \frac{1}{f_\alpha(\nu_2;\nu_1)}$$

Ejemplo 8.6. Encuentre el valor de $f_{0,95}(\nu_1;\nu_2)$ con grados de libertad $\nu_1 = 9 \ y \ \nu_2 = 12$.

Solución: Utilizando la tabla 6 se tiene que:

$$f_{0,95}(9;12) = f_{1-0,05}(9;12) = \frac{1}{f_{0,05}(12;9)} = \frac{1}{3,07} = 0,3257$$

INFERENCIA ESTADÍSTICA.

La inferencia estadística consiste en los métodos por los cuales se realizan inferencias o generalizaciones sobre una población. La inferencia estadística se puede dividir en dos partes, la teoría de estimación y las pruebas de hipótesis; en este capítulo se tratará la estimación y en el siguiente capítulo las pruebas de hipótesis.

ESTIMACIÓN PUNTUAL.

La estimación puntual está referida a la elección de un estadístico, es decir, un número calculado a partir de datos muestrales que proporcione un valor que este cerca del parámetro que se quiere estimar. El estadístico que se emplea para obtener una estimación puntual se denomina estimador. Se debe tratar de lograr un estimador insesgado; es decir, que la media de la distribución muestral sea igual al parámetro a estimar. En la práctica nos podemos encontrar con varios estimadores, y se tendría que escoger el más adecuado; para ello se puede aplicar el siguiente criterio:

DEFINICIÓN 8.5.

Si se tienen dos estimadores $\hat{\theta}_1 \ y \ \hat{\theta}_2$ insesgado del parámetro θ, se dice que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ sí:

- $\hat{\theta}_1 \ y \ \hat{\theta}_2$ son estimadores insesgados de θ.
- La varianza de la distribución muestral de $\hat{\theta}_1$ es menor que la de $\hat{\theta}_2$.

Observación 8.7.

El problema que se presenta con el estimador puntual es que el más eficiente es improbable que estime con exactitud el valor del parámetro de la población. Por lo tanto, es preferible determinar un intervalo dentro del cual se esperaría hallar el valor del parámetro. Esto se conoce como intervalos de confianza y es el tema que se desarrollará en el resto de este capítulo.

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS.

La estimación por intervalo es la referente a los parámetros: media, proporción, varianza y razón de varianzas.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA μ CON σ CONOCIDA.

La utilización de este tipo de estimación requiere la aclaratoria de varios puntos. El intervalo proporciona dos extremos entre los cuales se debe encontrar la media poblacional, con nivel de confianza o certeza de $(1-\alpha)100\%$**;** para hallar estos extremos se utiliza la media de una muestra de la población, el valor de *z* que delimita un área $\alpha/2$ a su derecha en la distribución normal estándar (ver tabla 3 anexa); la varianza de la población y el tamaño de la muestra. Es de hacer notar que este tipo de intervalo es recomendable cuando $n \geq 30$ En el caso de no conocer la desviación poblacional σ se puede utilizar la desviación *s*, estimada de la muestra.

DEFINICIÓN 8.6. *INTERVALO DE CONFIANZA PARA μ; CON σ CONOCIDA.*

Si $\bar{x}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño *n* de una población con varianza conocida, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para μ está dado por

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor z que delimita en área de $\alpha/2$ a su derecha.

Observación 8.8.

El teorema siguiente se refiere al error muestral, el cual acota la diferencia entre la media muestral y la poblacional.

TEOREMA 8.3.

Si se utiliza $\bar{x}$ como una estimación de μ, se puede tener entonces una confianza de $\mathbf{(1-\alpha)100\%}$ de que el error $\boldsymbol{e}$ muestral esta dado por:

$$|\bar{x}-\mu| \leq e = \frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo 8.7. En una semana determinada se elige al azar una muestra de 200 empleados de una población de que se dedica al trabajo a destajo, y se encuentra que el promedio de pago por pieza trabajada es 1700 Bs, con una desviación estándar muestral de 140 Bs.

a) Halle el intervalo de confianza del 95% para el promedio poblacional de pago por pieza trabajada.
b) Calcular el error muestral.

Solución:

μ: Promedio poblacional de pago por pieza trabajada.

$$\bar{x} = 1700 \qquad \sigma \approx s = 140 \qquad n = 200$$

Para hallar el valor de $z_{\alpha/2}$ se procede así: El nivel de confianza es $(1-\alpha)100\% = 95\%$ donde $\alpha/2 = 0{,}025$; ya que la tabla 3 anexa, (Distribución Normal Estándar) da el área a la izquierda, esta será de $1 - 0{,}025 = 0{,}975$, y por tanto el valor de $z\alpha/_2 = z_{0{,}025} = 1{,}96$. Este valor se encuentra, ubicando el área 0,975 en la tabla de probabilidades (tabla 3 anexa,) y luego relacionando la primera columna con la primera fila.

De la definición 8.6 se tiene que el intervalo de confianza esta dado por:

$$1700 - \frac{(1{,}96)(140)}{\sqrt{200}} < \mu < 1700 + \frac{(1{,}96)(140)}{\sqrt{200}}$$

$$1680{,}6 < \mu < 1719{,}4$$

Interpretación: Se espera que el promedio poblacional de pago por pieza trabajada, este entre 1680,6 Bs y 1719,4 Bs, con un nivel de confianza del 95%.

Del teorema 8.3 se tiene que el error muestral esta dado por:

$$e = \frac{(1{,}96)(140)}{\sqrt{200}} = 19{,}4$$

Interpretación: El nivel de error muestral no excederá de 19,4. Es decir que la diferencia, en valor absoluto, entre la media muestral y la poblacional no excederá de 19,4 Bs.

Observación 8.9.

Con frecuencia se desea saber qué tan grande deberá ser la muestra, para asegurar que el error al estimar el parámetro μ será menor que una cantidad específica ***e***.

DEFINICIÓN 8.7.

Si se utiliza $\bar{x}$ como una estimación de μ, se puede tener entonces una confianza de $(1-\alpha)100\%$ de que el error será menor que una cantidad específica "e" cuando el tamaño de la muestra *n,* según sea el caso, venga dada por la respectiva fórmula.

a) *Si el tamaño poblacional N es desconocido*

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{e}\right)^2$$

b) *Si el tamaño poblacional N (población grande) es conocido.*

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 N\sigma^2}{z_{\alpha/2}^2\sigma^2 + Ne^2}$$

c) *Si el tamaño poblacional N (población pequeña) es conocido.*

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 N\sigma^2}{z_{\alpha/2}^2\sigma^2 + (N-1)e^2}$$

Observación 8.10.

A medida que $\frac{N}{N-1}$ se aproxime a 1, se considera la población grande.

Ejemplo 8.8. Un gerente quiere determinar el tiempo que un mecánico tarda en intercambiar los neumáticos de un automóvil, y además desea poder asegurar con un nivel de confianza del 95% que la media de su muestra sea a lo sumo de 0,4 minutos. Se sabe que la desviación estándar es de 1,4 minutos.

a) ¿Qué tan grande debe ser el tamaño de la muestra si se desconoce el tamaño poblacional?
b) ¿Qué tan grande debe ser el tamaño de la muestra si el tamaño poblacional es de 200 horas?
c) ¿Qué tan grande debe ser el tamaño de la muestra si el tamaño poblacional es de 40 horas?

Solución:

μ: Promedio poblacional del tiempo que un mecánico tarda en intercambiar los neumáticos de un automóvil.

Utilizando la tabla 3 anexa, se tiene que:

$$(1-\alpha)100\% = 95\% \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$e = 0{,}4; \quad \sigma = 1{,}4.$$

a) Utilizando la definición 8.7 a, se tiene que:

$$n = \left(\frac{(1{,}96)(1{,}4)}{0{,}4}\right)^2 = 47$$

Interpretación: Se requiere de una muestra de 47 horas para estimar el promedio poblacional del tiempo que un mecánico tarda en intercambiar los neumáticos de un automóvil, con un nivel de confianza de 95% y un error muestral de 0,4 horas. Sin conocer el tamaño poblacional.

b) Utilizando la definición 8.7 b, se tiene que:

$$n = \frac{(1{,}96)^2 200 (1{,}4)^2}{(1{,}96)^2(1{,}4)^2 + 200(0{,}4)^2} = 38{,}095$$

Interpretación: Se requiere de una muestra de 38,095 horas para estimar el promedio poblacional del tiempo que un mecánico tarda en intercambiar los neumáticos de un automóvil, con un nivel de confianza de 95% y un error muestral de 0,4 horas. Si se sabe que el tamaño poblacional es de 200 horas.

c) Utilizando la definición 8.7 c, se tiene que:

$$n = \frac{(1{,}96)^2 40 (1{,}4)^2}{(1{,}96)^2(1{,}4)^2 + (40-1)(0{,}4)^2} = 21{,}873$$

Interpretación: Se requiere de una muestra de 21,873 horas para estimar el promedio poblacional del tiempo que un mecánico tarda en intercambiar los neumáticos de un automóvil, con un nivel de confianza de 95% y un error muestral de 0,4 horas. Si se sabe que el tamaño poblacional es de 40 horas.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA MUESTRAS PEQUEÑAS PARA μ; CON σ DESCONOCIDO.

En el caso de que el tamaño muestral sea $n < 30$, se recomienda utilizar la distribución ***t*** de Student para establecer el intervalo de confianza. Suponiendo que la población está distribuida normalmente.

DEFINICIÓN 8.8. *INTERVALO DE CONFIANZA PARA MUESTRAS PEQUEÑAS PARA* μ*; CON* σ *DESCONOCIDO.*

Si $\bar{x}$ y s son la media y la desviación estándar de una muestra aleatoria de tamaño $n < 30$, tomada de una población aproximadamente normal con varianza desconocida σ^2, un intervalo de confianza $(1-\alpha)100\%$ para μ estará dada por:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Donde $t_{\alpha/2}$ es el valor *t,* con $\nu = n$-1 grados de libertad, que delimitan un área de $\alpha/2$ a su derecha.

Ejemplo 8.9. La vida útil promedio de una muestra aleatoria de 20 focos es 4500 horas, con una desviación estándar muestral de 250 horas. Se supone que la vida útil de los focos tiene una distribución aproximadamente normal. Halle el intervalo de confianza del 95%; para el promedio poblacional de vida de los focos.

Solución:

μ*:* Promedio poblacional de vida de los focos.

$$\bar{x} = 4500 \qquad s = 250 \qquad n = 20$$

Utilizando la tabla 5 anexa, se tiene que:

$$nivel\ de\ confianza\ (1-\alpha)100\% = 95\ \% \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025$$

$$grados\ de\ libertad = n - 1 = 19 \Rightarrow t_{\alpha/2} = t_{0,025} = 2{,}093$$

Utilizando la definición 8.8 se tiene que el intervalo de confianza esta dado por:

$$4500 - 2{,}093 \cdot \frac{250}{\sqrt{20}} < \mu < 4500 + 2{,}093 \cdot \frac{250}{\sqrt{20}}$$

$$4383 < \mu < 4617$$

Interpretación: Se espera que el promedio poblacional de vida de los focos, este entre 4383 horas y 4617 horas, con un nivel de confianza del 95%.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA $\mu_1 - \mu_2$; con σ^2_1 y σ^2_2 CONOCIDAS

Para muestras independientes a partir de poblaciones normales, si n_1 y n_2 son mayores de 30, se puede establecer un intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales $\mu_1 - \mu_2$, con lo cual se pueden establecer comparaciones entre estas poblaciones.

DEFINICIÓN 8.9 *INTERVALO DE CONFIANZA PARA $\mu_1 - \mu_2$; CON σ_1^2 y σ_2^2 CONOCIDAS.*

Sean $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ las medias de muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2, a partir de poblaciones con varianzas conocidas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por:

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor z que delimita en área de $\alpha/2$ a su derecha.

Ejemplo 8.10. Un fabricante de equipos agrícolas desea comparar el tiempo muerto diario promedio para dos máquinas troqueladora de láminas, que se encuentran en dos compañías distintas. Para ello se tomaron, de los registros, una muestra de 150 días, seleccionados al azar, para cada una de las dos compañías; obteniéndose los siguientes resultados: la máquina 1 tuvo un promedio de 15 minutos de tiempo muertos, con una varianza de 5 minutos; en tanto que la máquina 2 tuvo un promedio de 10 minutos de tiempo muerto, con una varianza de 4 minutos. Calcule el intervalo de confianza para la diferencia de los promedios poblacionales del tiempo muerto de las dos máquinas, con un nivel de confianza del 90%.

Solución:

μ_1: Promedio poblacional del tiempo muerto de la máquina troqueladora número 1.

μ_2: Promedio poblacional del tiempo muerto de la máquina troqueladora número 2.

$$\overline{x}_1 = 15 \qquad \sigma_1^2 \approx s_1^2 = 5 \qquad n_1 = 100$$

$$\overline{x}_2 = 10 \qquad \sigma_1^2 \approx s_2^2 = 4 \qquad n_2 = 100$$

Utilizando la tabla 3 anexa, se tiene que:

$$nivel\ de\ confianza\ (1-\alpha)100\% = 90\ \% \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05 \ \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$(15-10) - 1{,}645 \quad \sqrt{\frac{5}{150} + \frac{4}{150}} < \mu_1 - \mu_2 < (15-10) + 1{,}645 \quad \sqrt{\frac{5}{150} + \frac{4}{150}}$$

$$4{,}55 < \mu_1 - \mu_2 < 5{,}45$$

Interpretación: Se estima que la diferencia de los promedios poblacionales del tiempo muerto diario de las dos máquinas está entre 4,55 minutos y 5,45 minutos. Además se puede concluir de la muestra, que el promedio poblacional de la máquina 1 es mayor que el de la máquina 2.

INTERVALO DE CONFIANZA DE $\mu_1 - \mu_2$ PARA MUESTRAS PEQUEÑAS.

En el caso de que no se conozca las dispersiones de la población, las muestras sean pequeñas (se consideran pequeñas cuando son menores de 30) y las poblaciones están distribuidas aproximadamente normal, en conveniente el uso de los dos tipos de intervalos que se describen a continuación.

DEFINICIÓN 8.10. *INTERVALO DE CONFIANZA PARA MUESTRAS PEQUEÑAS PARA $\mu_1 - \mu_2$; con $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ PERO DESCONOCIDAS.*

Si $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ son las medias de muestras aleatorias pequeñas independientes, de tamaño n_1 y n_2, respectivamente, a partir de poblaciones aproximadamente normales con varianzas desconocidas pero iguales, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + t_{\alpha/2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Donde

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

es la estimación conjunta de la desviación estándar de la población, y $t_{\alpha/2}$ es el valor *t* $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad que delimitan un área de $\alpha/2$ a su derecha.

Ejemplo 8.11. Se mide la porosidad (fracción de volumen hueco) de un metal que se produce por sintetizar (calentamiento sin fusión completa) un polvo en ciertas condiciones en un determinado laboratorio. Se tomó una primera muestra de 5 mediciones independientes de porosidad con la cual se obtuvo un promedio de 0,20 con un varianza de 0,0011. En una segunda muestra, se repite el mismo proceso con un polvo idéntico y se obtiene para 6 mediciones independientes el promedio fue de 0,16, con una varianza de 0,0024. Estimar el intervalo de confianza para la diferencia de los promedios poblacionales de la porosidad del metal, con un nivel de confianza del 95%. Supóngase que las poblaciones están distribuidas normalmente y que sus dispersiones son iguales.

Solución:

μ_1: Promedio poblacional de la porosidad de un metal, de acuerdo a la muestra 1.

μ_2: Promedio poblacional de la porosidad de un metal, de acuerdo a la muestra 2.

$$\bar{x}_1 = 0{,}20 \quad n_1 = 5 \quad s_1^2 = 0{,}0011$$

$$\bar{x}_2 = 0{,}16 \quad n_2 = 6 \quad s_2^2 = 0{,}0024$$

Utilizando la tabla 5 anexa, se tiene que:

$$nivel\ de\ confianza\ (1-\alpha)100\% = 95\ \% \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \Rightarrow t_{\alpha/2} = 2{,}262$$

$$grados\ de\ libertad\ \ \nu = n_1 + n_2 - 2 = 5 + 6 - 2 = 9$$

Utilizando la definición 8.11, se tiene que:

$$s_p = \sqrt{\frac{(5-1)(0{,}0011) + (6-1)(0{,}024)}{5+6-2}} = 0{,}043$$

$$(0{,}20 - 0{,}16) - (2{,}262)(0{,}043)\quad \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} < \mu_1 - \mu_2$$

$$< (0{,}20 - 0{,}16) - (2{,}262)(0{,}043)\quad \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}$$

$$-0{,}0189 < \mu_1 - \mu_2 < 0{,}0989$$

Interpretación: Se estima que la diferencia entre los promedios poblacionales de la porosidad del metal este entre –0,0189 y 0,0989, con nivel de confianza del 95%. Es de hacer notar, que el valor negativo del extremo izquierdo significa que el segundo promedio poblacional supera al del primero, y el valor positivo del extremo derecho, significa que el primer promedio poblacional supera al del segundo. Además existe la posibilidad de que los promedios poblacionales de porosidad del metal sean iguales, ya que el valor cero pertenece al intervalo correspondiente a la diferencia de las medias $\mu_1 - \mu_2$.

DEFINICIÓN 8.11. *INTERVALO DE CONFIANZA PARA MUESTRAS PEQUEÑAS PARA $\mu_1 - \mu_2$;; con $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ Y DESCONOCIDAS.*

Sean $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$; s_1 y s_2 son las medias las varianzas respectivas de muestras aleatorias pequeñas independientes, de tamaño n_1 y n_2, respectivamente, a partir de poblaciones aproximadamente normales con varianzas diferentes y desconocidas, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ está dado por

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$t_{\alpha/2}$ es el valor *t* con

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Grados de libertad, que delimitan un área de $\alpha/2$ a su derecha.

Observación 8.11.

En el caso de que el valor de grado de confianza no sea entero, se recomienda tomar como valor de éste, el entero superior.

Ejemplo 8.12. Una compañía de transporte trata de decidir la compra de cauchos de marca A o de la marca B para sus vehículos. Para decidir la compra realiza el siguiente experimento: se toman 10 cauchos de cada marca y sé hacer rodar hasta su desgaste total. Obteniendo los siguientes resultados; la marca A recorrió 40000 km en promedio, con una desviación estándar de 5500 km; en tanto para la marca B recorrió 41000 km, con una desviación estándar 6000 km. Con estos resultados estimar un intervalo de confianza para la diferencia de promedios poblacionales de recorrido de los cauchos, con un nivel de confianza del 95% ¿Cuál es la marca de cauchos que se puede seleccionar? Supóngase las poblaciones distribuidas normalmente, con dispersiones diferentes.

Solución:

μ_1: Rendimiento promedio poblacional de los cauchos de la marca A.

μ_2: Rendimiento promedio poblacional de los cauchos de la marca B.

$$\bar{x}_1 = 40000 km \quad n_1 = 10 cauchos \quad s_1 = 5500 km$$

$$\bar{x}_2 = 41000 km \quad n_2 = 10 cauchos \quad s_2 = 6000 km$$

Utilizando la tabla 3 anexa, se tiene que:

$$nivel\ \ de\ confianza\ (1-\alpha)100\% = 95\% \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$$

Utilizando la definición 8.11 se tiene que:

$$\nu = \frac{\left(\frac{(5500)^2}{10} + \frac{(6000)^2}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{(5500)^2}{10}\right)^2}{10-1} + \frac{\left(\frac{(6000)^2}{10}\right)^2}{10-1}} \cong 17{,}86 \cong 18$$

Utilizando la tabla 5 anexa, se tiene que:

$$grados\ de\ libertad \quad \nu = 18 \Rightarrow t_{\alpha/2} = 2{,}101$$

El intervalo de confianza es:

$$-1000 - (2{,}101)\sqrt{\frac{(5500)^2}{10} + \frac{(6000)^2}{10}} < \mu_1 - \mu_2 < -1000 + (2{,}101)\sqrt{\frac{(5500)^2}{10} + \frac{(6000)^2}{10}}$$

$$-6407{,}78 < \mu_1 - \mu_2 < 4407{,}78$$

Interpretación: Se estima que la diferencia entre los promedios poblacionales de rodamiento de los cauchos está entre –6407,78 y 4407,78, con nivel de confianza del 95%. Es de hacer notar, que el valor negativo del extremo izquierdo significa que el segundo promedio poblacional supera al del primero, y el valor positivo del extremo derecho, significa que el primer promedio poblacional supera al del segundo. Ya que la marca B supera en mayor rodamiento a la marca A, se recomienda seleccionar la marca B.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA P, A PARTIR DE UNA MUESTRA GRANDE.

En problemas de Ingeniería se manejan proporciones, probabilidades y porcentajes. En el proceso de muestreo puede interesar la proporción de unidades defectuosas en un tren de producción, y en pruebas de vida útil se puede necesitar conocer el porcentaje de tiempo durante el cual ciertos componentes tendrán un rendimiento según sus especificaciones o la probabilidad de que un componente dado dure por lo menos un número determinado de horas. Estos ejemplos evidencias que los problemas referentes a porcentajes, proporciones y probabilidades son equivalentes. La estimación puntual de una proporción suele ser la proporción muestral $p = x/n$, es decir, la proporción de las veces que el evento ocurrió en realidad. Siempre que los *n* ensayos satisfagan los condiciones de un experimento Binomial. Si no se espera que la proporción desconocida esté demasiado cerca de 0 o 1, puede establecerse un intervalo de confianza. Aunque la distribución aplicable a las proporciones es la binomial, suele utilizarse la distribución normal estándar para aproximar la Binomial al construir los intervalos de confianza para proporciones. Esta aproximación es aceptable cuando $n \geq 30$ y tanto $np \geq 5$, como $nq \geq 5$.

DEFINICIÓN 8.12. *INTERVALO DE CONFIANZA PARA* ***P****, A PARTIR DE UNA MUESTRA GRANDE.*

Si p es la proporción de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n, y $q = 1-p$, un intervalo de confianza aproximado de $(1-\alpha)100\%$ para el parámetro Binomial p está dado por

$$p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} < P < p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Donde $z_{\alpha/2}$ el valor z que delimita el área de $\alpha/2$ a su derecha.

Observación 8.12.

El teorema siguiente se refiere al error muestral, el cual acota la diferencia entre la proporción muestral y la poblacional.

TEOREMA 8.4.

Si se utiliza p como una estimación de P, se puede tener entonces una confianza de $(1-\alpha)100\%$ de que el error ***e*** no excederá de

$$|p - P| \leq e = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Ejemplo 8.13. En el estudio de una muestra aleatoria de 90 mayoristas que comprar tubos galvanizados, se obtuvo el resultado siguiente: 40 plantean incrementar sus compras el próximo año. Estimar el intervalo de confianza del 95% de la proporción poblacional de los mayoristas de este material que planean incrementar sus compras el año próximo. Establecer el error muestral.

Solución:

P: proporción poblacional de compras de los mayoristas de tubos galvanizados que planean incrementar sus compras el año próximo.

$$p = \frac{40}{90} \approx 0{,}44 \qquad q = 1 - p = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$$

Utilizando la tabla 3 anexa, se tiene que:

$$nivel\ de\ confianza\ (1-\alpha)100\% = 95\ \% \Rightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$0{,}44 - (1{,}96)\sqrt{\frac{(0{,}44)(0{,}56)}{90}} < P < 0{,}44 + (1{,}96)\sqrt{\frac{(0{,}44)(0{,}56)}{90}}$$

$$0{,}34 < P < 0{,}54$$

Interpretación: Se estima que la proporción poblacional de compras de los mayoristas de tubos galvanizados que planean incrementar sus compras el año próximo esté entre 0,34 y 0,54 o equivalentemente entre 34% y 54%.

Del teorema 8.4 se tiene que el error muestral esta dado por:

$$e = (1{,}96)\sqrt{\frac{(0{,}44)(0{,}56)}{90}} = 0{,}10$$

Interpretación: El nivel de error muestral no excederá de 0,10, o equivalentemente el 10% Es decir que la diferencia, en valor absoluto, entre la proporción muestral y la poblacional no excederá de 0,10.

Observación 8.13.

Con frecuencia se desea saber qué tan grande deberá ser la muestra para asegurar que el error al estimar el parámetro *P* será menor que una cantidad específica ***e***.

DEFINICIÓN 8.13.

Si se utiliza *p* como una estimación de *P*, se puede tener entonces una confianza de $(1-\alpha)100\%$ de que el error será menor que una cantidad específica *e* cuando el tamaño de la muestra n es

a) *Si no se conoce el tamaño poblacional N*

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 pq}{e^2}$$

b) *Si se conoce el tamaño poblacional N (población grande)*

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 pqN}{z_{\alpha/2}^2 pq + e^2 N}$$

c) *Si se conoce el tamaño poblacional N (población pequeña).*

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 pqN}{z_{\alpha/2}^2 pq + e^2(N-1)}$$

Observación 8.14. : Si se desconoce la proporción muestral se puede tomar p=q=1/2

Observación 8.15. A medida que $\frac{N}{N-1}$ se aproxime a 1, se considera la población grande.

Ejemplo 8.14. En la Universidad, un grupo de pasantes desea realizar una investigación referida a la posible influencia de la industria petrolera en la escogencia de las carreras de especialización. Calcular el tamaño de la muestra con un nivel de confianza del 95% y con margen de error permitido del 3%; en las siguientes condiciones:

a) Se desconoce el tamaño poblacional.

b) Se sabe que la población es de 1500 sujetos.

c) Se sabe que la población es de 80 sujetos.

Solución:

P: Proporción poblacional de los sujetos influenciados por la industria petrolera para la escogencia de las carreras de especialización.

Como se desconoce la proporción muestral se puede tomar *p= q=1/2*=0,5.

Utilizando la tabla 3 anexa, se tiene que:

$$(1-\alpha)100\ \% = 95\ \% \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96\ .$$

El nivel de error muestral es $e = 3\% \Leftrightarrow 0{,}03$

a) Utilizando la definición 8.13 a, se tiene que:

$$n = \frac{(1{,}96)^2(0{,}5)(0{,}5)}{(0{,}03)^2} = 1067{,}11 \cong 1067$$

Interpretación: Se requiere de una muestra de 1076 sujetos para estimar la proporción poblacional de los sujetos influenciados por la industria petrolera para la escogencia de las carreras de especialización; con un nivel de confianza de 95% y un error muestral del 3%. Sin conocer el tamaño poblacional.

b) Utilizando la definición 8.13 b, se tiene que:

$$n = \frac{(1{,}96)^2(0{,}5)(0{,}5)}{(1{,}96)^2(0{,}5)(0{,}5) + 1500(0{,}03)^2} = 623{,}53 \cong 624$$

Interpretación: Se requiere de una muestra de 624 sujetos para estimar la proporción poblacional de los sujetos influenciados por la industria petrolera para la escogencia de las carreras de especialización; con un nivel de confianza de 95% y un error muestral del 3%. Si el tamaño poblacional es conocido.

c) Utilizando la definición 8.13 c, se tiene que:

$$n = \frac{(1{,}96)^2(0{,}5)(0{,}5)}{(1{,}96)^2(0{,}5)(0{,}5) + (80-1)(0{,}03)^2} = 74{,}4 \cong 75$$

Interpretación: Se requiere de una muestra de 75 sujetos para estimar la proporción poblacional de los sujetos influenciados por la industria petrolera para la escogencia de las carreras de especialización; con un nivel de confianza de 95% y un error muestral del 3%. Si el tamaño poblacional es conocido.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA P_1-P_2, A PARTIR DE MUESTRAS GRANDES.

Si se desea estimar la diferencia entre dos proporciones poblacionales, se puede utilizar la distribución normal estándar para lograr este intervalo; así como se explicó en la sección anterior.

DEFINICIÓN 8.14.

Si P_1 y P_2 son las proporciones de éxitos en muestras aleatorias de tamaños n_1 *y* n_2, respectivamente, y $q_1 = 1-p_1$ *y* $q_2 = 1-p_2$, un intervalo de confianza aproximado de $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\mathbf{100}\%$ para la diferencia de dos parámetros Binomiales P_1-P_2 está dado por:

$$(p_1 - p_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} < P_1 - P_2 < (p_1 - p_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor z que delimita en área de $\alpha/2$ a su derecha.

Ejemplo 8.15. Se desea comparar la proporción de piezas defectuosas que se producen en dos turnos de trabajo. Se seleccionan 50 piezas producidas en el primer turno y 40 del segundo turno. Resultó que 4 piezas del primer turno eran defectuosas, y 6 de la producción del segundo turno también lo están. Estimar el intervalo de confianza de la diferencia entre las proporciones de piezas defectuosas, con nivel de confianza del 95%.

Solución:

P_1: Proporción poblacional de piezas defectuosas que se producen en el primer turnos de trabajo.

P_2: Proporción poblacional de piezas defectuosas que se producen en el segundo turnos de trabajo.

$$n_1 = 50 \quad p_1 = \frac{4}{50} = 0{,}08 \quad q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$$

$$n_2 = 40 \quad p_2 = \frac{6}{50} = 0{,}15 \quad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

Utilizando la tabla 3 anexa, se tiene que:

$$nivel\ de\ confianza\ (1-\alpha)100\% = 95\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Utilizando la definición 8.14, se tiene que el intervalo de confianza esta dado por:

$$(0{,}08 - 0{,}15) - 1{,}96\sqrt{\frac{(0{,}08)(0{,}92)}{50} + \frac{(0{,}15)(0{,}85)}{40}} < P_1 - P_2$$

$$< (0{,}08 - 0{,}15) + 1{,}96\sqrt{\frac{(0{,}08)(0{,}92)}{50} + \frac{(0{,}15)(0{,}85)}{40}}$$

$$-0{,}06 < P_1 - P_2 < 0{,}2$$

Interpretación: Ya que el intervalo contiene el cero, existe la posibilidad de que no haya diferencia entre las cantidades de piezas defectuosas en los dos turnos.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA σ^2

Se ha destacado en las secciones anteriores la importancia que tiene una estimación de la varianza poblacional σ^2 con respecto a los procedimientos para hacer inferencias acerca de medias de una población. En la práctica existen situaciones donde σ^2 es el objetivo principal de una investigación, y por tanto adquiere mayor relevancia que la media de una población.

Se debe minimizar la variabilidad de las partes mecanizadas, en un proceso de manufactura de un producto, de tal manera de que el producto salga bajo especificaciones.

En general, es vital mantener una variabilidad mínima en las mediciones de las características de calidad de un producto industrial para lograr el control de calidad del proceso y con ello minimizar el porcentaje de productos de baja calidad.

A continuación se establece el intervalo de confianza para estimar la σ^2 y σ, a partir de una muestra aleatoria de tamaño *n*, y utilizando la distribución *ji* cuadrada; en el caso de muestras pequeñas, y la distribución normal en el caso de muestras grandes.

DEFINICIÓN 8.15. *INTERVALO DE CONFIANZA PARA σ^2, TOMANDO MUESTRAS PEQUEÑAS.*

Si s^2 es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño *n* de una poblacional normal, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para σ^2 está dado por:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$$

Donde $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2}$ son valores de la variable aleatoria con distribución χ^2 con $\nu = n\text{-}1$ grados de libertad, que delimitan áreas de $\alpha/2$ y $1-\alpha/2$ respectivamente, a su derecha.

DEFINICIÓN 8.16. *INTERVALO DE CONFIANZA PARA σ^2, TOMANDO MUESTRAS GRANDES.*

Si s^2 es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño n de una poblacional normal, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para σ^2 está dado por:

$$\frac{s^2}{\left(1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}\right)^2} < \sigma^2 < \frac{s^2}{\left(1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}\right)^2}$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor z que delimita en área de $\alpha/2$ a su derecha.

Observación 8.16. Para establecer el intervalo para la desviación estándar se debe calcular la raíz cuadrada de los extremos.

Ejemplo 8.16. Un Ingeniero encargado del control de calidad en una fábrica está convencido que la balanza para pesar materia prima varía según una desviación estándar de σ=1,8 libras. Con el fin de someter a prueba el equipo se tomó una muestra de pesos obteniendo los siguientes resultados:

104,1	110,2	109	103,3	108,1	107,6	105,7	111
104	108	109,6	103,2	105,7	108,7	109,7	103,6
107,5	105	109,7	108,5	104,8	108,7	109,8	105,9

Obtenga el intervalo de confianza del 90% para σ^2 y σ, determinar si el supuesto es válido.

Solución:

σ^2: Varianza poblacional de las mediciones realizadas por una balanza para pesar materia prima en una fábrica.

σ: Desviación estándar poblacional de las mediciones realizadas por una balanza para pesar materia prima en una fábrica.

El supuesto es que $\sigma = 1{,}8 \Rightarrow \sigma^2 = (1{,}8)^2 = 3{,}24$

Utilizando la definición 2.3, o una calculadora de bolsillo se tiene que:

$$n = 24; \quad s = 2{,}47 \Rightarrow s^2 = 6{,}1$$

$$nivel\ de\ confianza\ (1-\alpha)100\% = 90\ \% \Rightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0{,}05$$

$$grados\ de\ libertad\ \ v = n - 1 = 24 - 1 = 23$$

Utilizando la tabla 4 anexa, se tiene que los valores de *ji* cuadrada son

$$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0{,}05} = 35{,}172$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0{,}95} = 13{,}091$$

Utilizando la definición 8.16 (muestra pequeña) se tiene que el intervalo de confianza para σ^2 está dado por:

$$\frac{(24-1)(6{,}1)}{35{,}172} < \sigma^2 < \frac{(24-1)(6{,}1)}{13{,}091}$$

$$3{,}99 < \sigma^2 < 10{,}72$$

Utilizando la observación 8.16 se tiene que el intervalo de σ está dado por:

$$1{,}997 < \sigma < 3{,}27$$

Interpretación: Se estima que la desviación estándar en las mediciones de la balanza esté entre 1,997 y 3,27. Por lo tanto, según esta muestra, se puede concluir que el ingeniero debe reconsiderar el valor supuesto, ya que el estimado supera al valor que se tenía.

Sería recomendable tomar otras muestras para analizar si se siguen manteniendo estos resultados.

Ejemplo 8.17. La desviación estándar de la duración de una muestra de 250 bombillas fue de 130 horas. Estimar el intervalo de confianza del 95% para la varianza y la desviación estándar de duración de las bombillas que forman la población.

Solución:

σ^2: Varianza poblacional de la duración de las bombillas.

σ: Desviación estándar poblacional de la duración de las bombillas.

$$n = 250 \qquad s = 130 \Rightarrow s^2 = 16900$$

$$nivel\ de\ confianza\ (1-\alpha)100\% = 95\ \% \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025$$

Utilizando la tabla 3 anexa, se tiene que el valor de

$$z_{0,025} = 1{,}96$$

Utilizando la definición 8.16 (muestra grande) se tiene que el intervalo de confianza para σ^2 está dado por:

$$\frac{(130)^2}{\left(1+\frac{1{,}96}{\sqrt{2(250)}}\right)^2} < \sigma^2 < \frac{(130)^2}{\left(1-\frac{1{,}96}{\sqrt{2(250)}}\right)^2}$$

$$14285{,}82 < \sigma^2 < 20303{,}33$$

Utilizando la observación 8.16 se tiene que el intervalo de σ está dado por:

$$119{,}52 < \sigma < 142{,}48$$

Interpretación: Se estima que la varianza de la duración de las bombillas este entre 14285,82 y 20303,33 horas, con nivel de confianza del 95%. La desviación estándar de la duración de las bombillas este entre 119,52 y 142,48 horas, con un nivel de confianza del 95%.

INTERVALO DE LA RAZÓN DE DOS VARIANZAS.

Resulta frecuente la necesidad de comparar la precisión de un instrumento de medición con la de otro, la estabilidad de un proceso de manufactura con la de otro, etc. Para ello, se puede utilizar un intervalo de confianza de la razón de varianzas, de tal manera que si los extremos incluyen al 1, a medida que se acerquen a éste, es señal de que las dos poblaciones tienen dispersiones similares; en cambio si los extremos son mayores o menores de 1, evidencian diferencias de las varianzas de las poblaciones.

DEFINICIÓN 8.17. *INTERVALO DE LA RAZON DE DOS VARIANZAS.*

Si $s_1^2 \ y \ s_2^2$ son las varianzas de dos muestras independientes de tamaños $n_1 \ y \ n_2$, respectivamente, seleccionadas de poblaciones normalmente distribuidas, se tiene que un intervalo de confianza con nivel de confianza (1-α)100% para la razón σ_1^2 / σ_2^2 está dado por:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1;\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\, f_{\alpha/2}(\nu_2;\nu_1)$$

Donde $f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)$ y $f_{\alpha/2}(\nu_2,\nu_1)$ son valores de f (Distribución *F*) con $\nu_1 = n_1 - 1 \ y \ \nu_2 = n_2 - 1$ grados de libertad, que delimitan un área de $\alpha/2$ a su derecha.

Ejemplo 8.18. La variabilidad en la cantidad de impurezas presentes en un lote de productos químicos, utilizados en un proceso, depende del tiempo que tarda el proceso. Una fábrica que tiene dos líneas de producción, realiza un pequeño ajuste a la segunda línea; tratando de reducir la variabilidad de impurezas en los productos químicos. Se tomaron dos muestras, 21 mediciones de la primera línea y 25 mediciones de la segunda línea; obteniéndose varianzas $s_1^2 = 1{,}05 \; y \; s_2^2 = 0{,}57$, respectivamente. Estimar el intervalo de confianza de la razón de varianzas, con un nivel de confianza del 90%.

Solución:

σ_1^2 / σ_2^2 : Razón de las varianzas de la cantidad de impurezas presentes en un lote de productos químicos, utilizados en un proceso.

Las varianzas y tamaño muestral son:

$$s_1^2 = 1{,}05 \; y \; s_2^2 = 0{,}57 \quad n_1 = n_2 = 25$$

$$nivel\ de\ confianza\ (1-\alpha)100\% = 90\ \% \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05$$

$$grados\ de\ libertad\ \ \nu_1 = n_1 - 1 = 21 - 1 = 20; \ \ \nu_2 = n_2 - 1 = 25 - 1 = 24$$

Utilizando la tabla 6 se tiene que:

$$f_{\alpha/2}(\nu_1; \nu_2) = f_{0,05}(20; 24) = 2{,}03$$

$$f_{\alpha/2}(\nu_2; \nu_1) = f_{0,05}(24; 20) = 2{,}08$$

Utilizando la definición 8.18 se tiene que le intervalo de confianza esta dado por:

$$\left(\frac{1{,}05}{0{,}57}\right)\left(\frac{1}{2{,}03}\right) < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \left(\frac{1{,}05}{0{,}57}\right)(2{,}08)$$

$$0{,}907 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3{,}83$$

Interpretación: Ya que el intervalo para la razón de las varianzas contiene el valor 1, es de esperar que el ajuste hecho no altere la variabilidad en la cantidad de impurezas presentes en el lote de productos químicos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una fábrica de bombillas que tienen una duración distribuida normalmente, con una desviación estándar de 35 horas. Si una muestra de 100 bombillos tiene una vida promedio de 540 horas, obtenga un intervalo de confianza del 89% para la media de la población de todos los bombillos producidos por la fábrica.

2. Una máquina expendedora de bebidas en vasos se regula de modo que la cantidad de líquido que sirve está distribuida normalmente, con una desviación estándar igual a 0,13 decilitros. Una muestra de 40 vasos contiene un promedio de 3,25 decilitros. Estime un intervalo de confianza del 90% para la media de todas las bebidas despachadas.

3. Se selecciona una muestra de 50 Ingenieros de una compañía de exploración petrolera. Para cada ingeniero se determinaron las horas trabajadas en una semana determinada. Obteniéndose un promedio de 40 horas con y una desviación estándar de 2,5 horas. Estime un intervalo de confianza del 96% para la media de las horas trabajadas por todos los ingenieros de la compañía.

4. Se desea determinar el tiempo promedio que le toma a un trabajador hacer 4 agujeros en una abrazadera metálica. Calcular el tamaño de la muestra con un nivel de confianza del 90%, si la media de la muestra está dentro de 20 segundos respecto de la media verdadera, y la desviación estándar poblacional es de 40 segundos. En las siguientes condiciones:
   a. No se conoce el tamaño poblacional.
   b. Se sabe que la población es de 100 segundos.
   c. Se sabe que la población es de 60 segundos.

5. Se desea estimar el número promedio de horas de uso continuo antes de que cierto tipo de computadora requiera una reparación inicial. Si suponemos que la desviación estándar poblacional es de 50 horas ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra a fin de asegurar con un nivel de confianza del 92% que el error es a lo más 10 días? En las siguientes condiciones:
   a. No se conoce el tamaño poblacional.
   b. Se sabe que la población es de 120 días.
   c. Se sabe que la población es de 48 días.

6. Una muestra aleatoria de doce cojinetes fabricados en una compañía, tiene un diámetro promedio de 0,650 cm, con una desviación estándar de 0,006 cm. Supóngase que la población tiene distribución normal. Estime un intervalo de confianza del 95% para el diámetro promedio de los cojinetes fabricados.

7. Se selecciona una muestra aleatoria de 20 resistores de un tren de producción, que supuestamente produce resistores con una resistencia de 11 ohm. Estos 15 resistores mostraron una resistencia de 10,8 ohm y una desviación estándar de 0,6 ohm. Estimar el intervalo de confianza del 90% para la resistencia promedio de los resistores producidos. Supóngase que la población está distribuida normalmente.

8. De una máquina que fabrica piezas cilíndricas; se selecciona una muestra aleatoria de piezas, cuyos diámetros(en centímetros) son:

1,01	0,97	1,03	1,05	0,98	0,98	1,04
1,09	0,78	1,05	1,02	0,98	0,67	0,54
0,89	0,56	1,01	1,12	1,05	1,07	1,03

   Estime el intervalo de confianza del 98% para el diámetro promedio de piezas fabricadas, si la población está distribuida normalmente.

9. Se comparan dos tipos de tornillo para ver su resistencia a la tensión. Se prueban 80 piezas de cada tipo. La marca A tuvo una resistencia promedio a la tensión de 88,4 kg con una desviación estándar de 6,5 km, mientras la marca B tuvo una resistencia promedio a la tensión de 79,4 kg con una desviación estándar de 5,7 kg. Estime un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de las resistencias promedio, a la tensión de los dos tipos de tornillos.

10. Se comparan tipos distintos de recubrimientos para tubos, en cuanto a su tolerancia a la corrosión. La cantidad de corrosión en una muestra de tubo se cuantifica midiendo la profundidad máxima de las picaduras. Para el recubrimiento A, 40 muestras mostraron una profundidad máxima promedio de 0,25 cm con una desviación estándar de 0,03 cm. Para el recubrimiento B, las profundidades máximas de picaduras en 56 muestras tuvieron un promedio de 0,31 cm y desviación estándar de 0,02 cm. Estimar la diferencia entre profundidades promedio en un intervalo de confianza del 95% ¿Cuál de los dos recubrimientos es mejor?

11 Una proceso de ensamblaje en una planta manufacturera requiere de un periodo de entrenamiento de aproximadamente un mes para que un nuevo operario alcance la máxima eficiencia. Se plantea el uso de un nuevo método; para someter a prueba éste se toman dos grupos de 12 empleados cada uno, durante tres semanas. Se le aplica al primer grupo, el nuevo método; y al segundo, el método existente. Se midieron los tiempos, en minutos, que tarda cada trabajador en montar el dispositivo al final de tres semanas; los cuales fueron:

Método nuevo

33	35	30	28	33	31
27	28	29	31	32	34

Método existente

30	31	32	27	26	31
28	29	31	30	33	35

Estimar el intervalo de confianza del 90% para la diferencia de los promedios poblacionales del tiempo que tarda un operario en montar el dispositivo al final del periodo de tres semanas. En las siguientes condiciones:

a) Las poblaciones están distribuidas normalmente, con dispersiones iguales.
b) Las poblaciones están distribuidas normalmente, con dispersiones diferentes.

12 Un circuito eléctrico contiene dos resistores, cada una de tipo diferente. Las pruebas en 12 piezas del tipo 1 mostraron una resistencia promedio de 10,1 ohm, con una desviación estándar de 0,3 ohm. En tanto que 12 de los de tipo 2 su promedio de resistencia fue de 13,3 ohm y desviación estándar de 0,5 ohm. Estimar el intervalo de confianza del 95% para la diferencia de los promedios poblacionales de las resistencias de los resistores. En las condiciones siguientes:

a) Las poblaciones están distribuidas normalmente, con dispersiones iguales.
b) Las poblaciones están distribuidas normalmente, con dispersiones diferentes.

13. En una muestra de 290 controles remotos, 7 fallaron durante el periodo de garantía de 80 días. Estime el intervalo de confianza del 90% para la proporción de controles remotos. Suponer que la población está distribuida normalmente.

14 Se recibe un lote de 5000 artículos provenientes de un fabricante que asegura que el porcentaje de artículos defectuosos en la producción es de 1,5%. Al seleccionar una muestra aleatoria de 250 artículos y después de inspeccionarlos, se descubren 12 defectuosos. Estimar el intervalo de confianza del 95% para la proporción de artículos defectuosos en el proceso de manufactura del fabricante ¿Qué se puede concluir en relación a la afirmación del fabricante?

15. Se desea estimar la proporción de controles remotos que fallan durante la garantía de 80 días ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra a fin de asegurar con un nivel de confianza del 92% que el error es a lo más 0,5%? En las siguientes condiciones:

a) No se conoce el tamaño poblacional.
b) Se sabe que la población es de 1200 días.
c) Se sabe que la población es de 50 días.

16 Se desea estimar la proporción de artículos defectuosos provenientes de un fabricante ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra a fin de asegurar con un nivel de confianza del 90% que el error es a lo más 1%? En las siguientes condiciones:
d) No se conoce el tamaño poblacional.
e) Se sabe que la población es de 8200 días.
f) Se sabe que la población es de 7 0 días.

17 Una muestra de 300 cerrojos producidos por una máquina mostró que 20 eran defectuosos, mientras que de 150 cerrojos de otra máquina 17 eran defectuosos. Estimar la diferencia de las proporciones de los cerrojos defectuosos producidos por las dos máquinas; con un nivel de confianza del 95%.

18 Se está considerando un cambio en un procedimiento de fabricación de determinadas partes componentes. Se seleccionan muestras utilizando el procedimiento existente y el procedimiento nuevo, a fin de tomar una decisión si el nuevo procedimiento da mejores resultados. Si 95 de 1800 partes manufacturadas con el procedimiento existente y 90 de 2300 fabricados con el nuevo, resultaron con defectos, estime el intervalo de confianza para la diferencia de las proporciones de partes defectuosas producidas por los dos procedimientos.

19 El gerente de una fábrica de baterías afirma que éstas durarán en promedio 2 años, con una varianza de un año. Si 6 de estas baterías tienen tiempos de duración de 1,9, 2,5, 3,1 y 4,5 años, estime el intervalo de confianza del 95% para la varianza y decida si es válida la afirmación del gerente. Supóngase la población distribuida normalmente.

20 La desviación estándar de la resistencia a la rotura de 160 cables producidos por una compañía fue de 150 libras. Estimar el intervalo de confianza del 90% para la varianza y la desviación estándar de la resistencia a la rotura de los cables que forman la población.

21 De acuerdo a los registros, cierto tipo de lámpara eléctrica, tiene una varianza en el tiempo de encendido de 8000 horas. Se observó en una muestra de 30 lámparas de un nuevo tipo tiene una varianza de 12000 horas. Determine si difieren o no las dos varianzas, al nivel de confianza del 89%.

21 La variabilidad en la cantidad de impurezas presentes en un lote de productos químicos, utilizada en un proceso, depende del tiempo que tarda el proceso. Un laboratorio que emplea dos líneas de producción, hizo un ajuste al segundo proceso, con la finalidad de reducir la variabilidad. Se tomó una muestra de 25 mediciones de la primera línea, y 24 mediciones de la segunda, obteniéndose las varianzas 1,05 y 0,54 respectivamente. Estimar el intervalo de confianza del 99% para la razón de las varianzas.

21 La estabilidad de las características de un producto manufacturado es importante para mantener su calidad. El ingeniero encargado del control de calidad, sospecha que una de sus líneas de producción está fabricando bombillas con una alta variación en su vida útil. Se tomó una muestra de 60 bombillas de la línea que supuestamente no trabaja bien, y 45 de una línea control; obteniéndose las varianzas 94000 y 38700, respectivamente. Estimar el intervalo de confianza del 90% para la razón de varianzas.

CAPÍTULO 9

PRUEBA DE HIPÓTESIS

En el capítulo anterior se estudió la estimación de parámetros a través de intervalos de confianza; lo cual resulta relevante si se quiere tener información entre qué valores se encuentra estos parámetros. En ocasiones lo que interesa no es esto, sino, la formulación de ciertas reglas que nos lleve a la aceptación o rechazo de algunas aseveraciones o hipótesis relacionadas con una población. Un Ingeniero, por ejemplo, puede tener que decidir, basado en muestras, si existe diferencia en la exactitud de dos mediciones estandarizadas; o bien, si en un proceso, la media ha permanecido inalterable o si ha cambiado a tal grado que el proceso esté fuera de control y tengan que hacerse ajustes. Los procedimientos que conlleve a la aceptación o rechazo de una hipótesis estadística conforman la parte esencial de la inferencia estadística. A continuación definamos lo que se entiende por hipótesis estadística.

DEFINICIÓN 9.1. *Hipótesis Estadística.*

Es una conjetura o aseveración relacionada con una o más poblaciones. En la mayoría de procesos no es posible trabajar con toda la población y por tanto se realizan los estudios utilizando muestras. Los datos obtenidos se utilizan para establecer la falsedad o veracidad de la hipótesis. Los datos de la población que sean inconsistencia con la hipótesis establecida determinan su rechazo, en tanto que los que la apoyan su aceptación.

Las hipótesis estadísticas que estudiaremos son: ***la hipótesis nula***, la cual es la que se plantea, con la esperanza de ser rechazada y se denota por H_o; y ***la hipótesis alterna*** la cual es la que se acepta una vez rechazada la nula, y se denota por H_1. La hipótesis nula referente a un parámetro de una población se enuncia de manera que especifique un valor exacto del parámetro, en tanto que la alterna permite la posibilidad de muchos valores. Por ejemplo, si en un experimento binomial, la hipótesis nula es p= 0,6 la alterna es p<0,6; p>0,6; o bien $p \neq 0{,}6$. **Se debe tener presente que el hecho de aceptar una hipótesis estadística nula es el resultado de no tener los argumentos suficientes para rechazarla y no quiere decir que sea necesariamente verdadera**.

Al estudiar estas hipótesis se pueden cometer los siguientes errores: rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es verdadera, con lo cual se comete un ***error tipo I***, denotado por α; o aceptar la hipótesis nula cuando en realidad es falsa, cometiendo un ***error tipo II***, denotado por β. Los valores de α y β se expresan en términos de probabilidades y determinan niveles de significación; se pueden representar como áreas bajo una curva simétrica o asimétrica, según sea el caso. El investigador podrá y deberá escoger el nivel de significación α, pero no el de β; teniendo en cuenta lo siguiente:

- A medida que aumenta el valor α, disminuye el valor de β; y viceversa.
- Los valores más usados para α son 0,05 o 0,01, equivalentemente al 5% y al 1%. El nivel de significación α =5% significa que hay un riesgo no mayor del 5% de cometer un error tipo I, o equivalentemente a una certeza del 95% de acierto en nuestra hipótesis.
- Una manera de disminuir los dos tipos de errores, es aumentando el tamaño de la muestra.
- Para decidir el rechazo o aceptación de la hipótesis nula, en relación a un nivel de significación α, se utilizan valores de distribuciones $\boldsymbol{Z, t, \chi^2, F}$.

- Una vez establecido el nivel de significación α, la región bajo la curva queda dividida en dos parte, cada una con su correspondiente valor de área. Al utilizar un tipo de distribución de probabilidad, por ejemplo la distribución ***Z***.
    - La región de rechazo de la hipótesis nula puede ser de una cola o unilateral, si la región queda del lado derecho de un valor referencial (ver gráfico 9.1 a) o del lado izquierdo de ese valor (ver gráfico 9.1 b). Se suele decir que está del lado derecho o izquierdo de la curva.

- La región de rechazo de la hipótesis nula puede ser de dos colas o bilateral, si la región está del lado derecho o izquierdo de un valor referencial (ver gráfico 9.1 c). Se suele decir que está de ambos lados de la curva.

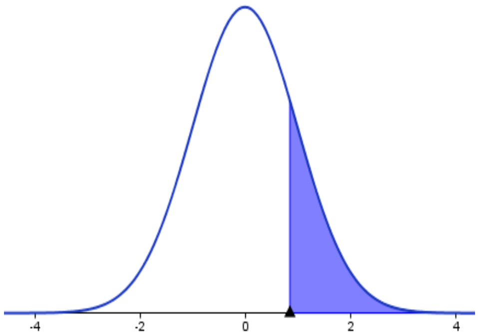


Gráfico 9.1 a. Región de rechazo (una cola) de la H_0 en color azul

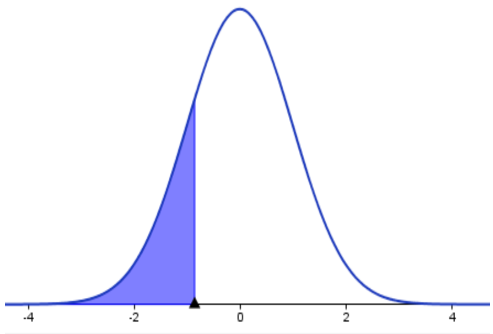


Gráfico 9.1 b. Región de rechazo (una cola) de la H_0 en color azul

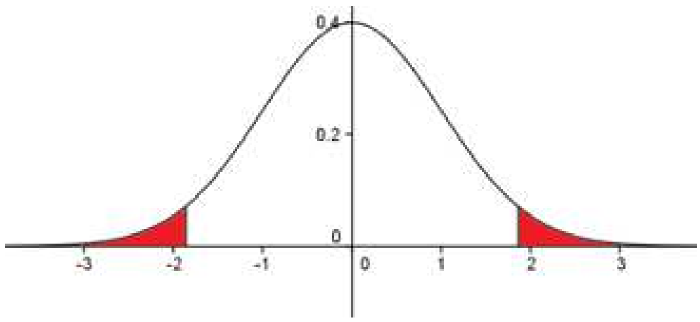


Gráfico 9.1 c. Región de rechazo (dos colas) de la H_0 en color rojo

PRUEBA DE HIPÓTESIS RELACIONADAS CON MEDIAS.

Pruebas para una media problacional

En los problemas relacionados con una población lo que se quiere probar es si la media población μ, con σ^2 conocida, es igual a un valor específico μ_o, en contra de la alternativa que sean diferentes, tomando muestras de tamaño *n*.

Si la prueba es de una cola o unilateral, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0: \ \mu = \mu_0$$
$$H_1: \ \mu < \mu_0$$

Si la región de rechazo está del lado izquierdo de la curva.

$$H_0: \ \mu = \mu_0$$
$$H_1: \ \mu > \mu_0$$

Si la región de rechazo está del lado derecho de la curva.

Si la prueba es de dos colas, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0: \ \mu = \mu_0$$
$$H_1: \ \mu \neq \mu_0$$

Si la región de rechazo esta a ambos lados de la curva.

El estadístico de prueba que se debe calcular, para este caso, con valor de la media muestral $\bar{x}$; y tamaño de la muestra *n*, viene dado por alguna de las siguientes fórmulas, según sea el caso.

Fórmula 9.1. Con σ conocida con $\boldsymbol{n \geq 30}$**.** Utilizando la distribución **Z**.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Fórmula 9.2. Con ν = n-1 grados de libertad σ desconocida con $\boldsymbol{n} < 30$. Utilizando la distribución $\boldsymbol{t}$ de Student.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

<u>*Pruebas para dos medias poblacionales*</u>

En los problemas en donde tenemos muestras independientes, tomadas de dos poblaciones con medias μ_1 y μ_2 y sus respectivas varianzas, la hipótesis estadísticas relacionadas con diferencias de medias poblacionales vienen expresadas como sigue:

Si la prueba es de una cola o unilateral, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \ \mu_1 - \mu_2 < d_0$$

Si la región de rechazo está del lado izquierdo de la curva.

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \ \mu_1 - \mu_2 > d_0$$

Si la región de rechazo está del lado derecho de la curva.

Si la prueba es de dos colas, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$$

Si la región de rechazo esta a ambos lados de la curva.

<u>*Pruebas para diferencias de medias poblacionales en relación a medias muestrales*</u>

El estadístico de prueba relacionado con diferencias de medias poblacionales, con valores de medias muestrales $\bar{x}_1 \ y \ \bar{x}_2$, tamaños de muestras $n_1 \ y \ n_2$ y sus respectivas varianzas; viene dado por alguna de las siguientes fórmulas, según sea el caso.

Fórmula 9.3. Con $\sigma_1 \ y \ \sigma_2$ conocidas. Utilizando la distribución **Z**.

$$z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Fórmula 9.4. Con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ *grados de libertad,* $\sigma_1 = \sigma_2$ *desconocidas.* Utilizando la distribución ***t*** de Student.

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$s_1^2 \ y \ s_2^2 \quad varianzas \ muestrales.$$

Fórmula 9.5. Con grados de libertad ν. Utilizando la distribución ***t*** de Student

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \ y \ desconocidas.$$

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Pruebas para medias poblacionales con análisis de mediciones en pareja

Existen problemas en donde las pruebas se presentan en forma dependiente. Por ejemplo se puede dar el caso en el que se hacen observaciones repetidas en la misma unidad de muestreo y por lo tanto se debe idear un mecanismo de análisis de mediciones que se presentan por parejas.

$$H_0: \ \mu_D = d_0$$
$$H_1: \ \begin{cases} \mu_D < d_0 \\ \mu_D > d_0 \\ \mu_D \neq d_0 \end{cases}$$

Donde μ_D: significa promedio de la diferencia por parejas.

Fórmula 9.6. Utilizando la distribución ***t*** de Student

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

Donde $\bar{d}$ es el promedio de las diferencias de las mediciones muestrales y s_d es la desviación estándar de estas diferencias. Con $\nu = n - 1$ grados de libertad

Ejemplo 9.1. En una planta eléctrica se supone que la presión en cierta línea se mantiene a un promedio de 102 lb/pulg^2 en un período de cuatro horas con una desviación estándar de 3 lb/pulg^2. Si la presión media es mayor que 102 lb/pulg^2 durante un período de 5 horas, podrían surgir problemas graves. Durante un período de 5 horas, se toman 40 mediciones al azar, obteniendo una presión media de 105 lb/pulg^2. Con base a estas mediciones ¿Es probable que se presenten problemas graves en el funcionamiento de la planta eléctrica, a un nivel de significación del 5%?

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que la media se mantenga en 102 lb/pulg^2, en contraposición a la alterna de que sea mayor a 102 lb/pulg^2. La prueba a aplicar es de una cola o unilateral.

$$H_0: \ \mu = 102$$
$$H_1: \ \mu > 102$$

$$\alpha = 5\% \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico de prueba Z, ya que el tamaño de la muestra es de 40 mediciones y desviación estándar conocida $(n = 40 \geq 30)$. Para ello se utiliza la tabla 3 anexa, del área bajo la curva $Z_\alpha = Z_{0,05} = 1{,}645$. Esto delimita el área en dos partes, a la izquierda de 1,645; la cual es el área de aceptación de la hipótesis nula y el área a la derecha que representa el área de rechazo de la hipótesis nula. Ver gráfico 9.1.

Aplicando la fórmula 9.1; sabiendo que:

$$\overline{x} = 105$$

$$n = 40$$

$$\sigma = 3$$

$$z = \frac{105 - 102}{\frac{3}{\sqrt{40}}} = 6{,}32$$

. El valor de Z calculado z = 6,32 es mayor al valor z =1,645; por tanto cae en la región de rechazo; con lo cual se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alterna, la cual argumenta que la presión en línea en cuestión será mayor a 102 lb/pulg^2; con nivel de significación del 5%. Por tanto, es probable que surjan problemas graves.

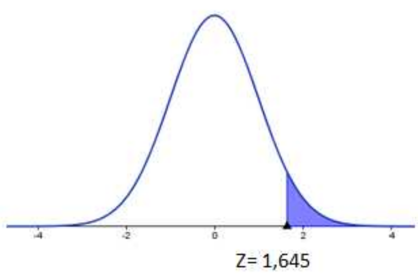


Gráfico 9.2. Región Crítica del problema 9.1.

Ejemplo 9.2. Un fabricante de neumáticos desea saber, si el promedio de vida útil de ciertos tipos de neumáticos es inferior a 30.000 millas. Para verificar esto, se instalan 50 neumáticos en sus vehículos y se obtuvo una vida útil promedio de 29.461 millas con una desviación estándar de 1.342 millas. En base a esta información ¿Se puede concluir que la vida de los neumáticos ha disminuido? Tomar un nivel de significación del 1%.

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que la media se mantenga en 30.000 millas, en contraposición a la alterna de que sea inferior a 30.000 millas. La prueba a aplicar es de una cola o unilateral.

$$H_0: \ \mu = 30000$$
$$H_1: \ \mu < 30000$$

$$\alpha = 1\% \Rightarrow \alpha = 0{,}01$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico de prueba Z, ya que el tamaño de la muestra es de 50 neumáticos $(n = 50 \geq 30)$, su desviación estándar se puede aproximar a través de la muestra; es decir $\sigma \approx s = 1342 \ millas$ Para ello se utiliza la tabla 3 anexa, del área bajo la curva $Z_\alpha = Z_{0,01} = -2{,}33$. Esto delimita el área en dos partes, a la derecha de –2,33; la cual es el área de aceptación de la hipótesis nula y el área a la izquierda que representa el área de rechazo de la hipótesis nula. Ver gráfico 9.2.

Aplicando la fórmula 9.1; sabiendo que:

$$\overline{x} = 29461$$

$$n = 50$$

$$\sigma \approx s = 1342$$

$$z = \frac{29461 - 30000}{\frac{1342}{\sqrt{50}}} = -2{,}84$$

.. El valor de Z calculado z = -2,84 es menor al valor z = - 2,33; por tanto cae en la región de rechazo; con lo cual se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alterna, la cual es que la vida útil de los neumáticos a disminuido; con nivel de significación del 1%.

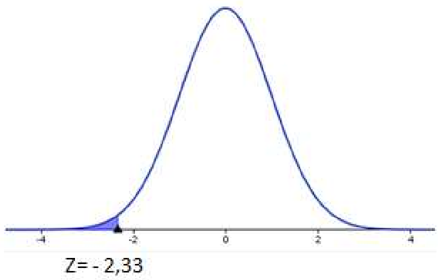


Gráfico 9.3 Región Crítica del problema 9.2.

Ejemplo 9.3. Un fabricante de automóviles de cierta marca, manifiesta que éstos consumen 13 litros de gasolina, en promedio, por cada 90 kilómetros. Para comprobar esta aseveración se realiza una prueba con 39 de estos automóviles y se encontró que el promedio de consumo de esta muestra es de 13,75 litros por cada 90 kilómetros, con una desviación estándar de 2 litros. De acuerdo con este resultado ¿Habría razón para asegurar que el consumo de gasolina es diferente al que menciona el fabricante, a un nivel de significación del 5%?

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que la media de mantenga en 13 litros de gasolina por cada 90 kilómetros, en contraposición a la alterna de que sea diferente de 13 litros por cada 90 kilómetros. La prueba a aplicar es de dos colas o bilateral.

$$H_0: \ \mu = 13$$
$$H_1: \ \ \mu \neq 3$$

$$\alpha = 5\% \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico se prueba Z, ya que el tamaño de la muestra es de 39 automóviles $(n = 39 \geq 30)$, su desviación estándar se puede aproximar a través de la muestra; es decir

$\sigma \approx s = 2$ *litros de gasolina por cada* 90 *kilómetros* . Para ello se utiliza la tabla 3 anexa, del área bajo la curva $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1{,}96$ (Ya que, la prueba es de dos colas o bilateral, el nivel de significación α de se debe dividir por 2). Esto delimita el área en tres partes, un área entre –1,96 y 1,96; la cual es el área de aceptación de la hipótesis nula y el área a la izquierda de –1,96 y a la derecha de 1,96 que representa el área de rechazo de la hipótesis nula. Ver gráfico 9.3.

Aplicando la fórmula 9.1; sabiendo que:

$$\bar{x} = 13{,}75$$

$$n = 39$$

$$\sigma \approx s = 2$$

$$z = \frac{13{,}75 - 13}{\frac{2}{\sqrt{39}}} = 2{,}34$$

. El valor de Z calculado z = 2,34 es mayor al valor z =1,96; por tanto cae en la región de rechazo; con lo cual se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alterna, la cual es, que el consumo de gasolina es diferente de 13 litros de gasolina por cada 90 kilómetros; con nivel de significación del 5%.

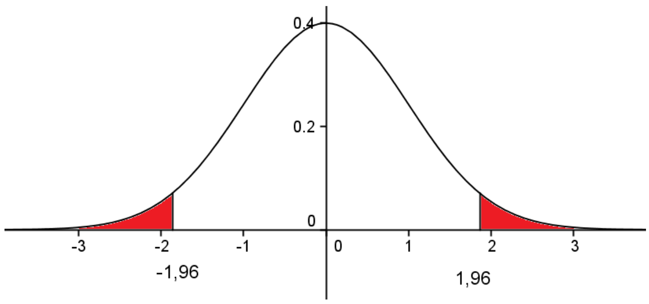


Gráfico 9.4 Región Crítica del problema 9.3.

Ejemplo 9.4. Un tipo de fusible está diseñado para fundirse cuando la corriente llega a 20 amperios. Se toma una muestra de 25 fusibles de un lote de 1000 y se encuentra que el punto promedio de fusión de esta muestra es 20,8 amperios, con una desviación estándar de 1,5 amperios ¿A qué conclusión se puede llegar, con respecto a las especificaciones del lote, a un nivel de significación del 1%? (utilice una prueba de dos colas o bilateral).

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que la media de fusión de los fusibles se mantiene en 20 amperios, en contraposición a la alterna de que sea diferente de 20 amperios. La prueba a aplicar es de dos colas o bilateral.

$$H_0: \ \mu = 20$$
$$H_1: \ \mu \neq 20$$

$$\alpha = 1\% \Rightarrow \alpha = 0{,}01$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico de prueba t, ya que el tamaño de la muestra es de 25 automóviles $(n = 25 < 30)$, su desviación estándar es s = 1,5 amperios. Para ello se utiliza la tabla 4 anexa, del área bajo la curva. $t_{\alpha/2} = t_{0,005} = 2{,}797 \quad \nu = 25 - 1 \ grados \ \ de \ libertad$ (Ya que, la prueba es de dos colas o bilateral, el nivel de significación α de se debe dividir por 2). Esto delimita el área en tres partes, un área entre –2,797 y 2,797; la cual es el área de aceptación de la hipótesis nula y el área a la izquierda de –2,797 y a la derecha de 2,797 que representa el área de rechazo de la hipótesis nula. Ver gráfico 9.4.

Aplicando la fórmula 9.2; sabiendo que:

$$\bar{x} = 20{,}8$$

$$n = 25$$

$$s = 1{,}5$$

$$t = \frac{20{,}8 - 20}{\frac{1{,}5}{\sqrt{25}}} = 2{,}67$$

El valor de t calculado es 2,67 el cual es menor al valor t =2,797; por tanto cae en la región de aceptación; con lo cual se acepta la hipótesis nula. Recuerde que no significa que sea cierta, sino que no hay evidencias suficientes para rechazarla a un nivel de significación del 1%. Se recomienda aumentar el tamaño de la muestra.

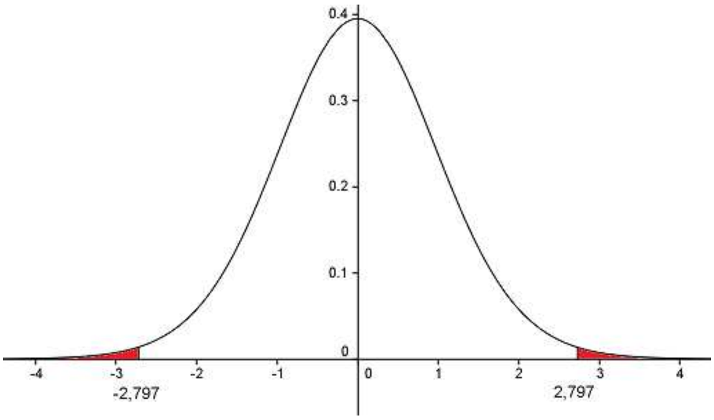


Gráfico 9.5 Región Crítica del problema 9.4.

***Observación 9.1*.**

Análogamente, los problemas relacionados con prueba de hipótesis de una cola o unilateral, se resuelven similarmente a los planteados con el estadístico de prueba Z.

Ejemplo 9.5. Un fabricante afirma que la resistencia de un alambre eléctrico puede reducirse en más de 0,060 ohm mediante aleaciones. Para probar esta afirmación se toman 35 valores obtenidos de alambre ordinario cuyo promedio fue de 0,14 ohm y desviación estándar de 0,002 ohm; y 36 valores obtenidos con el alambre fabricado a base de aleaciones, cuyo promedio fue de 0,079 ohm y desviación estándar 0,003 ohm ¿A qué conclusión se puede llegar, con relación a la afirmación del fabricante, a un nivel de significación de 5%?

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que la diferencia de las medias poblacionales de los dos tipos de alambre se mantenga en 0,060 ohm, en contraposición a la alterna de que la diferencia sea mayor a 0,060 ohm. La prueba a aplicar es de una cola o unilateral.

Sea μ_1: El promedio de resistencia del alambre eléctrico ordinario.

μ_2: El promedio de resistencia del alambre eléctrico sometido a aleación.

$$H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = 0{,}060$$
$$H_1: \ \mu_1 - \mu_2 > 0{,}060$$

$$\alpha = 5\% \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico de prueba Z $(n_1 = 35 \geq 30;\ n_2 = 36 \geq 30)$. Para ello se utiliza la tabla 3 anexa, del área bajo la curva. $z_\alpha = z_{0,05} = 1{,}645$.

Aplicando la fórmula 9.3; sabiendo que:

$$\overline{x}_1 = 0{,}14 \qquad \overline{x}_2 = 0{,}079$$

$$n_1 = 35 \qquad n_2 = 36$$

$$\sigma_1 \approx s_1 = 0{,}002 \qquad \sigma_2 \approx s_2 = 0{,}003$$

$$z = \frac{(0{,}14 - 0{,}079) - 0{,}060}{\sqrt{\frac{(0{,}002)^2}{35} + \frac{(0{,}003)^2}{36}}} = 1{,}657$$

El valor de Z calculado z = 1,657 es mayor al valor z =1,645; por tanto cae en la región de rechazo; con lo cual se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alterna. La cual es, que la resistencia del alambre eléctrico se puede disminuir en más de 0,060 ohm; a un nivel de significación del 5%.

Ejemplo 9.6. Un vendedor de máquinas troqueladoras de lámina, afirma que su máquina puede trabajar con cierto producto con más rapidez que la máquina que está instalada en una fábrica. Se realizaron 10 ensayos independientes troquelando el mismo artículo en cada máquina y se obtuvo que con la máquina instalada el promedio de troquelado fue de 34,21 segundos con una desviación estándar de 4,81 segundos; en tanto que con la nueva máquina fue de 32,56 segundos con una desviación estándar de 4,47 segundos.

Utilizando un nivel de significación del 5% ¿Se puede respaldar la afirmación del vendedor? Suponer que las desviaciones estándar poblacionales, son iguales.

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que la diferencia de las medias poblacionales de las dos máquinas troqueladoras sean iguales o equivalentemente que la diferencia es igual a cero, en contraposición a la alterna de que la diferencia sea mayor a cero. La prueba a aplicar es de una cola o unilateral.

Sea μ_1: El promedio de troquelado de la maquina instalada.

μ_2: El promedio de troquelado de la máquina nueva.

$$H_0:\ \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1:\ \mu_1 - \mu_2 > 0$$

$$\alpha = 5\% \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico de prueba ***t*** $(n_1 = n_2 = 10 < 30)$, con desviaciones estándar poblacionales iguales. Para ello se utiliza la tabla 4 anexa, del área bajo la curva. $t_\alpha = t_{0,05} = 1{,}734$ con $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$ *grados de libertad* .

Aplicando la fórmula 9.4; sabiendo que:

$$\bar{x}_1 = 38{,}21 \qquad \bar{x}_2 = 32{,}56$$

$$n_1 = n_2 = 10$$

$$s_1 = 4{,}81 \qquad s_2 = 4{,}47$$

$$s_p^2 = \frac{9(4{,}81)^2 + 9(4{,}47)^2}{18} = 4{,}643$$

$$t = \frac{(38{,}21 - 32{,}56) - 0}{(4{,}643)\ \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 2{,}721$$

El valor de ***t*** calculado t = 2,721 es menor al valor t =2,797; por tanto cae en la región de aceptación; con lo cual se acepta la hipótesis nula. Recuerde que no significa que sea cierta, sino que no hay evidencias suficientes para rechazarla a un nivel de significación del 5%. Se recomienda aumentar el tamaño de la muestra.

Ejemplo 9.7. A fin de determinar si el uso de empaques de caucho entre las probetas de concreto y la platina de la máquina de prueba afecta la resistencia observada, se hacen dos probetas a partir de seis lotes de concreto (ver tabla 9.1). De cada par de probetas, una fue sometida a prueba con el empaque y otra, sin él ¿Existe una diferencia significativa entre las resistencias obtenidas por ambos métodos de prueba? Utilice nivel de significación del 1%

RESISTENCIA A LA TENSIÓN MN/m².

Lote Nº	Con empaque	Sin empaque
1	3,76	3,48
2	3,72	3,00
3	3,65	3,28
4	3,62	3,10
5	3,96	3,38
6	3,48	3,18

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que no hay diferencia en la resistencia a la tensión, al usar o no empaques de caucho, entre las probetas de concreto y la platina de una máquina; utilizando mediciones muestrales en parejas; en contraposición a la alterna de que si hay diferente. La prueba a aplicar es de dos colas o bilateral.

$$H_0:\ \mu_D = 0$$
$$H_1:\ \mu_D \neq 0$$

$$\alpha = 1\% \Rightarrow \alpha = 0{,}01$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico de prueba *t*. Para ello se utiliza la tabla 4 anexa, del área bajo la curva.

$$t_{\alpha/2} = t_{0,005} = 4{,}032 \qquad \nu = 6 - 1 \textit{ grados de libertad}$$

(Ya que, la prueba es de dos colas o bilateral, el nivel de significación α se debe dividir por 2). Esto delimita el área en tres partes, un área entre –4,032 y 4,032; la cual es el área de aceptación de la hipótesis nula y el área a la izquierda de –4,032 y a la derecha de 4,032 que representa el área de rechazo de la hipótesis nula.

Utilizando la tabla, calculemos la diferencia por parejas, la media y la desviación estándar de estas diferencias.

Lote Nº	Con empaque	Sin empaque	d_i
1	3,76	3,48	0,28
2	3,72	3,00	0,72
3	3,65	3,28	0,37
4	3,62	3,10	0,52
5	3,96	3,38	0,58
6	3,48	3,18	0,30

$$\bar{d} = 0{,}46 \qquad s_d = 0{,}174$$

Aplicando la fórmula 9.6; sabiendo que:

$$\bar{d} = 0{,}46 \qquad n = 6 \quad s_d = 0{,}174$$

$$t = \frac{0{,}46 - 0}{0{,}174/\sqrt{6}} = 6{,}48$$

El valor de *t* calculado es 6,48 el cual es mayor al valor *t* = 4,032; por tanto cae en la región de rechazo; con lo cual se rechaza la hipótesis nula; aceptando la alterna, es decir que la utilización de empaques si afecta significativamente la resistencia a la tensión.

<u>PRUEBA DE HIPOTESIS RELACIONADAS CON PROPORCIONES.</u>

En algunos problemas puede interesar el estudio de las proporciones relacionadas con alguna población. Por ejemplo, se puede requerir determinar si 0,03 es la proporción verdadera de piezas defectuosas que salen de una planta de ensamblaje.

En los problemas relacionados con una población lo que se quiere probar es si la proporción poblacional $\boldsymbol{P}$, es igual a un valor específico p_o, en contra de la alternativa que sean diferentes. Tomando muestras de tamaño n.

<u>Pruebas para una proporción con muestras menores a 30 sujetos.</u>

Si la prueba se basa en muestras pequeñas, o menor de 30 elementos, se procede así:

- Se definen las hipótesis estadísticas.
- Se elige el nivel de significación.
- El estadístico de prueba a utilizar es la variable binomial X con $P=p_0$.
- Se identifica el valor x, el número de éxitos y se calcula el valor de probabilidad apropiado, utilizando la distribución binomial.
- Se rechaza la hipótesis nula si el valor calculado es menor o igual al nivel de significación. De lo contrario se acepta.

Si la prueba es de una cola o unilateral, las hipótesis se expresan como sigue:

En el caso de que

$$H_0:\ P = p_0$$
$$H_1:\ P < p_0$$

La probabilidad a calcular con la Distribución Binomial viene dada por:

Fórmula 9.7

$$P(X \le x) = B(x; n; p_0) = \sum_{k=0}^{x} b(k; n; p_0)$$

En el caso de que

$$H_0:\ P = p_0$$
$$H_1:\ P > p_0$$

La probabilidad a calcular con la Distribución Binomial, viene dada por:

Fórmula 9.8

$$P(X \geq x) = 1 - B(x; n; p_0) = 1 - \sum_{k=0}^{x} b(k; n; p_0)$$

Si la prueba es de dos colas, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0:\ P = p_0$$
$$H_1:\ P \neq p_0$$

En este caso la probabilidad a calcular con la distribución binomial viene dada por:

Fórmula 9.9

$$2P(X \leq x) = 2B(x; n; p_0) = 2\sum_{k=0}^{x} b(k; n; p_0)$$

$$Si\ \ x < np_0$$

Fórmula 9.10

$$2P(X \geq x) = 2\big(1 - B(x; n; p_0)\big) = 2\left(1 - \sum_{k=0}^{x} b(k; n; p_0)\right)$$

$$Si\ \ x > np_0$$

Ejemplo 9.8. Una empresa fabricante de equipos mecánicos patrocina un curso de adiestramiento para su personal de venta y servicio. Los anales del curso demuestran que un 64% de los alumnos, aprueban los exámenes finales. Se efectúan ciertos cambios en el programa de adiestramiento, con objeto de mejorarlo y, al año siguiente de 29 alumnos del curso, 20 aprueban ¿A nivel de significación de 0,01, podría considerarse este hecho como una demostración de la efectividad de las reformas introducidas en el programa?

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que la proporción poblacional es de 0,64; en contraposición a la alterna de que sea diferente. La prueba a aplicar es de dos colas o bilateral.

$$H_0:\ P = p_0 = 0{,}64$$
$$H_1:\ P \neq p_0 = 0{,}64$$

$$\alpha = 1\% \Rightarrow \alpha = 0{,}01$$

Calculemos el valor de probabilidad, utilizando la distribución binomial; sabiendo que:

$$x = 15 \qquad n = 20 \qquad p = 0{,}64 \qquad x > np_0 = 20(0{,}64) = 12{,}8$$

Utilizando la fórmula 9.10 se tiene que:

$$2P(X \geq 15) = 2\big(1 - B(x; 20; 0{,}64)\big) = 2\left(1 - \sum_{k=0}^{x} b(k; 20; 0{,}64)\right) = 2(1 - 0{,}8818)$$
$$= 0{,}2364$$

Ya que el valor calculado es 0,2364>0,01, se acepta la hipótesis nula, es decir que no hay razones suficientes para negarla.

Pruebas para proporciones con muestras mayores o iguales a 30 sujetos.

Si la prueba se basa en muestras donde $n \geq 30$, y tanto $np_0 \geq 5 \quad y \quad n(1-p_0) \geq 5$. Se puede aproximar el valor Binomial con la distribución normal. Donde el valor de Z se calcula por la siguiente fórmula:

Fórmula 9.11. Utilizando la distribución **Z**.

$$z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

Ejemplo 9.9. Un jefe de control de calidad, se plantea la hipótesis de que no más del 7% de las refacciones que se fabrican en un proceso de manufactura tienen defectos.

Para una muestra aleatoria de 90 refacciones, se encuentra que 11 están defectuosas. Someta a prueba esta hipótesis a un nivel de significación del 5%.

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que la proporción poblacional es de 0,07; en contraposición a la alterna de que sea mayor a 0,07. La prueba a aplicar es de una cola o unilateral.

$$H_0:\ P = p_0 = 0{,}07$$
$$H_1:\ P > p_0 = 0{,}07$$

$$\alpha = 5\% \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

Región crítica. Para calcular esta región, se aplica el estadístico de prueba Z, ya que $n = 90 \geq 30 \quad y \quad np_0 = 90.(0{,}07) = 6{,}3 \geq 5 \quad y \quad n(1-p_0) = 90.(1-0{,}07) = 83{,}7 \geq 5$.

Para ello se utiliza la tabla 3 anexa, del área bajo la curva. $z_\alpha = z_{0,05} = 1{,}645$. Esto delimita el área en dos partes, a la izquierda de 1,645; la cual es el área de aceptación de la hipótesis nula y el área a la derecha que representa el área de rechazo de la hipótesis nula.

Aplicando la fórmula 9.11; sabiendo que:

$$x = 11 \qquad n = 90 \qquad p_0 = 0{,}07$$

$$z = \frac{11 - 90(0{,}07)}{\sqrt{90(0{,}07)(1 - 0{,}07)}} = 1{,}94$$

El valor de Z calculado z = 1,94 es mayor al valor z =1,645; por tanto cae en la región de rechazo; con lo cual se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alterna, la cual es que la proporción de las refacciones que se fabrican en un proceso de manufactura es mayor al 7%; con nivel de significación del 5%.

Pruebas para dos proporciones

En los problemas en donde se desea probar la hipótesis nula de que dos proporciones poblacionales P_1 *y* P_2 son iguales o difieren en algún valor específico, en contraposición a que sean diferentes o que su diferencia es distinta a un valor específico, utilizando muestras grandes, se plantean así:

Si la prueba es de una cola o unilateral, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0:\ P_1 - P_2 = d_0$$
$$H_1:\ P_1 - P_2 < d_0$$

Si la región de rechazo está del lado izquierdo de la curva.

$$H_0:\ P_1 - P_2 = d_0$$
$$H_1:\ P_1 - P_2 > d_0$$

Si la región de rechazo está del lado derecho de la curva.

*Si la prueba es de dos colas, las hipótesis se expresan como sigu*e:

$$H_0:\ P_1 - P_2 = d_0$$
$$H_1:\ P_1 - P_2 \neq d_0$$

Si la región de rechazo esta a ambos lados de la curva.

El estadístico de prueba relacionado con proporciones poblacionales, con valores de proporción muestral $p_1 = x_1/n_1$ *y* $p_2 = x_2/n_2$; viene dado por la fórmula.

Fórmula 9.12. Utilizando la distribución **Z**.

$$z = \frac{p_1 - p_2 - d_0}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

Ejemplo 9.10. Un fabricante está evaluando dos tipos de equipo para fabricar un artículo. Se obtiene una muestra aleatoria de n_1=60 para la primera marca de equipo y se encuentra que 8 de ellos tienen defectos. Se obtiene una muestra aleatoria de n_2=90 para la segunda marca y se encuentra que 9 de ellos tienen defectos. Pruebe si existe diferencia significativa entre los dos tipos de equipo para fabricar un artículo. Utilice un nivel de significación del 5%.

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que la diferencia de las proporciones poblacionales de artículos defectuosos producidos por los dos equipos, son iguales; en contraposición a la alterna de que son diferentes. La prueba a aplicar es de dos colas o bilateral.

Sea P_1: La proporción de artículos defectuosos, utilizando la primera marca.

P_2: La proporción de artículos defectuosos, utilizando la segunda marca.

$$H_0:\ P_1 - P_2 = 0$$
$$H_1:\ P_1 - P_2 \neq 0$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico de prueba Z, curva $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$.

Aplicando la fórmula 9.12; sabiendo que:

El estadístico de prueba relacionado con proporciones poblacionales, con valores de proporción muestral

$$p_1 = x_1 / n_1 = 8/60 = 0,13 \quad y \quad p_2 = x_2 / n_2 = 9/90 = 0,1$$

viene dado por:

$$z = \frac{0,13 - 0,1 - 0}{\sqrt{\frac{(0,13)(0,87)}{60} + \frac{(0,1)(0,9)}{90}}} = 0,56$$

El valor de Z calculado z = 0,56 es menor al valor z =1,96; por tanto cae en la región de aceptación; con lo cual se acepta la hipótesis nula o equivalentemente que no hay razones suficientes para rechazarla; a un nivel de significación del 5%. Se sugiere aumentar el tamaño de la muestra.

PRUEBA DE HIPÓTESIS RELACIONADAS CON VARIANZAS.

Se pueden destacar varias razones por las cuales es relevante probar hipótesis relacionadas a las varianzas de poblaciones. En relación a aplicaciones directas, por ejemplo, un fabricante que requiere cumplir especificaciones, tendrá que realizar pruebas de variabilidad de un producto; las pruebas de varianzas a menudo son requisitos de pruebas concernientes a otros parámetros. Es decir, interesa la prueba de hipótesis relacionadas con la uniformidad de una población o, quizás, la comparación de la uniformidad de una población con la de otra segunda población.

Pruebas para una varianza poblacional

Consideremos el problema de probar la hipótesis nula de que la varianza de población σ^2 es igual a un valor específico σ_o^2 en contra de una sean diferentes. Las hipótesis estadísticas vienen dadas por:

Si la prueba es de una cola o unilateral, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \quad \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Si la región de rechazo está del lado Izquierdo de la curva.

$$H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \quad \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Si la región de rechazo está del lado derecho de la curva.

Si la prueba es de dos colas, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Si la región de rechazo esta a ambos lados de la curva.

Fórmula 9.13. Utilizando la Distribución ***ji*** Cuadrada.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Donde s^2 es la varianza muestral y *n* es tamaño muestral.

La región crítica: Una vez establecido el valor de significación α y los grados de libertad $\nu = n-1$; se utiliza la tabla 5 anexa, y se determina la región crítica en los siguientes términos:

- Para la alternativa Unilateral $\sigma^2 < \sigma_0^2$, la región de rechazo de la hipótesis nula es todo valor $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$. De lo contrario se acepta la hipótesis nula.
- Para la alternativa Unilateral $\sigma^2 > \sigma_0^2$, la región de rechazo de la hipótesis nula es todo valor $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$. De lo contrario se acepta la hipótesis nula.
- Para la alternativa bilateral $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, la región de rechazo de la hipótesis nula es todo valor $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$ ó $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$. De lo contrario se acepta la hipótesis nula.

Ejemplo 9.11. Basado en las especificaciones dadas por un ingeniero, se plantea la hipótesis de que la desviación estándar de los diámetros de ciertas piezas es diferente de 4 mm. Para una muestra de 15 piezas, se encontró una desviación estándar muestral de 5,2 mm ¿Se puede afirmar que existe variación significativa en la dispersión de los diámetros de las piezas? Use un nivel de significación del 5%.

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que $\sigma_0^2 = 16$; en contraposición a la alterna de que sea diferente. La prueba a aplicar es de una cola o unilateral.

$$H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 = 16$$
$$H_1: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 16$$

$$\alpha = \% \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico de prueba χ^2, si utilizamos la tabla 5 anexa, con $\nu = n$-1=15-1=14 grados de libertad se tiene que:

$$\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0{,}975} = 5{,}629$$
$$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0{,}025} = 26{,}119$$

el valor a la izquierda de 5,629 y a la derecha de 26,119 representa el área de rechazo de la hipótesis nula y los valores intermedios los de aceptación. Ver Gráfico 9.4.

Aplicando la fórmula 9.13; sabiendo que:

$$n = 15 \qquad s^2 = 33{,}64$$

$$\chi^2 = \frac{(15-1)33{,}64}{16} = 29{,}44$$

El valor calculado de χ^2 = 29,44 es mayor al valor $\chi^2_{0{,}025} = 26{,}119$; por tanto cae en la región de rechazo; con lo cual se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alterna, la cual es que la dispersión poblacional es significativamente diferente a 4 mm; con nivel de significación del 5%.

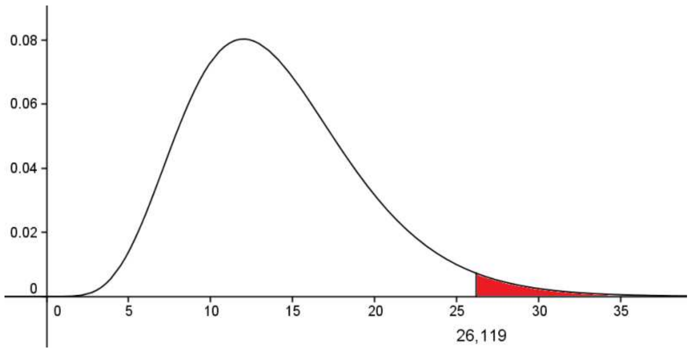


Gráfico 9.6 Región crítica del problema 9.11.

Pruebas para dos varianzas poblacionales

Ahora consideremos el problema de probar la hipótesis nula de que las varianzas de dos poblaciones sean iguales, en contra de que sean diferentes. Las hipótesis estadísticas vienen dadas por:

Si la prueba es de una cola o unilateral, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1:\ \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

Si la región de rechazo está del lado Izquierdo de la curva.

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1:\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

Si la región de rechazo está del lado derecho de la curva.

Si la prueba es de dos colas, las hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1:\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Si la región de rechazo esta a ambos lados de la curva.

Fórmula 9.14. Utilizando la distribución ***F***

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Donde s_1^2 y s_2^2 son las varianzas muestrales.

La región crítica: Una vez establecido el valor de significación α y los grados de libertad $\nu_1 = n_1 - 1$ y $\nu_2 = n_2 - 1$; se utiliza la tabla 6 anexa, y se determina la región crítica en los siguientes términos:

- Para la alternativa Unilateral $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, la región de rechazo de la hipótesis nula es todo valor $F < f_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$. De lo contrario se acepta la hipótesis nula.
- Para la alternativa Unilateral, $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ la región de rechazo de la hipótesis nula es todo valor $F > f_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)$. De lo contrario se acepta la hipótesis nula.
- Para la alternativa bilateral, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ la región de rechazo de la hipótesis nula es todo valor $F < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2)$ y $F > f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2)$. De lo contrario se acepta la hipótesis nula.

Ejemplo 9.12. Supóngase que queremos comparar la variación de los diámetros de una pieza para un tipo de motor que fabrican dos compañías. Se tomaron muestras de piezas de cada compañía y los resultados fueron: para la primera compañía se midieron 19 piezas y se obtuvo una varianza de 0,0002; en tanto que para la segunda compañía 11 piezas tuvieron una varianza de 0,0004 ¿Presentan los datos suficiente información para indicar que la variación de los diámetros de la pieza fabricada por la primera compañía es menor a la fabricada por la segunda compañía? Usar el nivel de significación del 5%.

Solución:

Se debe someter a prueba la hipótesis nula de que las varianzas poblacionales son iguales; en contraposición a la alterna de que la varianza de los diámetros de las piezas fabricados por la primera compañía, sea menor que la varianza de los diámetros de las piezas fabricadas por la segunda compañía. La prueba a aplicar es de una cola o unilateral.

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1:\ \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

$$\alpha = 5\% \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

Región crítica. Para calcular esta región se aplica el estadístico de prueba ***F***, si utilizamos la tabla 6 anexa, con $\nu_1 = n_1$-1=19-1=18 y $\nu_2 = n_2$-1=11-1=10 grados de libertad se tiene que:

$$F_{1-\alpha}(\nu_1;\nu_2) = F_{1-0,05}(18;10) = F_{0,95}(18;10) = \frac{1}{F_{0,05}(10;18)} = \frac{1}{2,41} = 0,41$$

El valor a la izquierda de 0,41, representa el área de rechazo de la hipótesis nula y los valores a la derecha la aceptación.

Aplicando la fórmula 9.14; sabiendo que:

$$s_1^2 = 0,0002 \qquad s_2^2 = 0,0004$$

$$F = \frac{0,0002}{0,0004} = 0,5$$

El valor calculado de ***F***=0,5 es mayor al valor 0,41; por tanto cae en la región de aceptación; con lo cual se acepta la hipótesis nula; a un nivel de significación del 5%. Equivalente a que no suficientes razones para rechazarla, se sugiere aumentar el tamaño de la muestra.

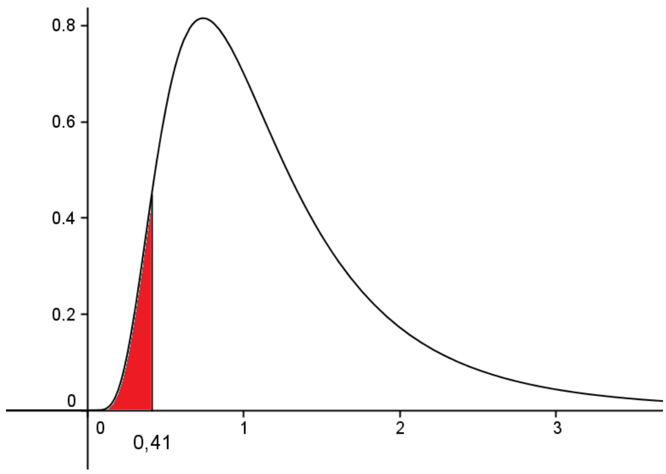


Grafico 9.7. Región crítica del problema 9.12.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El fabricante de un automóvil afirma que el automóvil rendirá cuando menos 10 kilómetros por litro, en promedio. En 50 ensayos de prueba, el promedio de rendimiento de gasolina de los automóviles fue de 9,86 kilómetros por litro, con una desviación estándar de 0,049 kilómetros por litro ¿Puede rechazarse la afirmación del fabricante con un nivel de significación del 5%? Use prueba Unilateral.

2. En una muestra aleatoria de seis varillas de acero se obtuvo una resistencia media a la compresión de 52256 psi (libras por pulgada cuadrada) con una desviación estándar de 648 psi. Pruebe si la media de la resistencia real a la comprensión del acero del cual proviene esta muestra es 57000 psi. Use un nivel de significación del 1%, y prueba bilateral.

3. La tensión de salida de determinado circuito eléctrico debe ser 120, de acuerdo con las especificaciones. Una muestra de 50 mediciones de la tensión de este circuito dio un promedio de 120,8 y una desviación de 2,1. Pruebe si la tensión ha aumentado. Use un nivel de significación del 5%.

4. Se ha ajustado una máquina llenadora de botellas para que introduzca 5 litros de líquido en cada recipiente. Se encuentra que, para una muestra de 15 botellas, la cantidad promedio de líquido introducido es 5,06 litros, con una desviación estándar de 0,12 litros. Se supone que las cantidades con las que se llenan las botellas tienen distribución normal. Quiere decir esto que la máquina esta fuera de control. Use nivel de significación del 5%.

5. La resistencia de determinado plástico a la fatiga debe ser, 25 lb/pulg^2. Los resultados de 12 piezas de plástico muestran un promedio de 25,4 lib/pulg^2 y una desviación estándar de 1,3 lb/pulg^2. Pruebe si la resistencia del plástico ha aumentado. Use nivel de significación del 1%.

6. Un fabricante afirma que la resistencia media de un resistor de 240 Ω. Un comprador pone a prueba 12 y observa los valores siguientes:

256	261	239	255	242
235	231	266	245	234
266	241	256	234	267

¿El lote cumple las especificaciones a un nivel de significación del 10%?

7 Un fabricante afirma que el coeficiente a la tensión de una fibra A excede el coeficiente promedio a la tensión de una fibra B a lo sumo en 12 kilogramos. Para probar tal afirmación se someten a prueba 60 piezas de cada tipo de fibra bajo condiciones similares. La fibra de tipo A tiene un coeficiente promedio a la tensión de 78,9 kilogramos, con una desviación estándar de 5,8 kg; mientras que la fibra de tipo B tiene un coeficiente promedio a la tensión de 66,2 kg, con desviación estándar de 4,67 kg. Probar la afirmación del fabricante, utilizando un nivel de significación del 1%.

8 Un estudio sobre reparaciones de dos tipos de fotocopiadoras reveló que 70 fallas del primer tipo de equipo fueron reparadas en un tiempo promedio de 82,5 minutos con una desviación estándar de 18,9 minutos; mientras que 80 fallas del equipo del segundo tipo fueron reparadas en un tiempo de 93 minutos, con una desviación estándar de 21,2 minutos. Pruebe si existe diferencia significativa entre los promedios poblacionales de los tiempos de reparación de los dos tipos de equipo. Use un nivel de significación del 5%.

9 Los valores de la resistencia (en ohm) de 40 resistores, indicados por dos fabricantes, se presentan en la tabla siguiente.

FABRICANTE A

6040	7000	7160	8000	7360	6800	5680	6320
7240	6160	6120	8240	7760	7040	6720	6920
7600	6600	6920	7280	6400	6200	8120	8000
7800	7320	7560	7200	7560	7520	7689	7869
6640	7178	7234	6680	7040	7688	6456	6000

FABRICANTE B

7520	7520	6320	5680	7440	6960	8920	8600
8520	8880	8440	8400	7320	8800	7800	7720
7659	7569	7720	7840	7600	7345	7360	7320
7240	7240	8640	7456	7320	7080	7320	7720
6680	6600	6040	6080	6720	5960	7040	6280

Pruebe si hay diferencia significativa entre los valores medios de los grupos A y B. Use un nivel de significación del 10%.

10 Una compañía tiene que decidir si el uso de neumáticos radiales en vez de neumáticos normales favorece el ahorro de combustible. Se equiparon 15 automóviles con neumáticos radiales y se hicieron rodar; luego los mismos automóviles se le colocaron neumáticos normales y se hicieron rodar, obteniendo los siguientes resultados:

Automóviles	Kilómetros por litro	
	Neumáticos Radiales	Neumáticos Normales
1	5,2	6,1
2	4,9	7,4
3	6,0	5,7
4	4,5	6,7

5	7,0	6,6
6	7,0	6,6
7	4,7	4,2
8	4,9	6,0
9	4,7	6,9
10	5,8	5,7
11	4,4	6,8
12	6,9	6,2
13	4,9	4,1
14	4,6	6,7
15	6,9	5,6

Con un nivel de significación de 5%, ¿es posible concluir que los automóviles con neumáticos normales economizan más que aquellos equipados con neumáticos radiales? Suponga que las desviaciones poblacionales son diferentes.

11 Se comparan dos procedimientos de sinterización de cobre, aplicando cada procedimiento en 7 tipos de polvo. La medición de interés es la porosidad de cada elemento de prueba. Los resultados de las pruebas son los siguientes:

Polvo	Procedimiento A	Procedimiento B
1	18	23
2	27	26
3	22	16
4	26	24
5	19	21
6	20	23
7	23	25

¿Hay evidencia de que existe diferencia entre las mediciones de porosidad promedio para dos tipos de procedimientos? Use un nivel de significación del 10%. Prueba por parejas.

12 Se tiene que reparar una máquina en cierta fábrica si produce más de 12% de artículos defectuosos del lote producido en un día. Una muestra de 150 artículos de la producción diaria contiene 20 defectuosos, el jefe de control de calidad decide que debe reparar la máquina ¿Es acertada su decisión? Use nivel de significación del 1%.

13 En un estudio para investigar si ciertos detonadores empleados con explosivos en una mina de carbón cumplen con los requerimientos de que al menos el 86% encenderá el explosivo al ser detonado, se encontró que 167 de 199 detonadores funcionaron de manera adecuada. Pruebe si la proporción de detonadores que encenderán los explosivos al ser detonados es inferior a 86%, a un nivel de significación del 5%.

14 Un fabricante de bombas de pozo profundo asegura que el 30% de sus bombas requieren reparaciones en los primeros 4 años. Si en una muestra de 110 bombas se tiene que 46 requirieron reparación en los primeros 4 años. Pruebe si la proporción de bombas difiere del 30%. Use nivel de significación del 5%.

15 Si 28 de 178 neumáticos de la marca A y 24 de 180 neumáticos, no duraron 15000 millas. Pruebe si hay diferencia significativa entre los rendimientos de los dos tipos de neumáticos. Use un nivel de significación del 5%.

16 Un estudio señala que 14 de 150 tractores producidos en una línea de ensamblado requieren ajustes minuciosos antes de ser embarcados, y lo mismo sucede con 15 de 380 tractores producidos en otra línea de ensamblado. Con un nivel de significación del 1%, ¿apoya esto la afirmación de que la segunda línea de producción efectúa un trabajo superior?

17 Un fabricante de cascos de seguridad, desea cuidar la media y la varianza de las fuerzas que trasmiten los cascos a los obreros al ser sometidos a una fuerza externa. El fabricante quiere que la fuerza media trasmitida por los cascos sea de 830 libras(o menos), y que su desviación estándar que sea menor a 40 libras. Se tomó una muestra de 40 cascos, y se encontró que la media fue de 900 libras y su varianza fue de 2450 libras. ¿Proporcionan los datos razones suficientes que indique que la fuerza media trasmitida por los cascos, al ser sometidos a una fuerza externa excede de 830 libras y que la desviación estándar excede de 40 libras? Use un nivel de significación del 5%.

18 Se asegura que las medidas de los diámetros de ciertos tipos de pernos, tienen una desviación estándar de 0,016 pulg. Se tomó una muestra y se encontró que 16 pernos produjeron una varianza de 0,00014 pulg. ¿Hay suficientes razones para asegurar que la desviación estándar es diferente a 0,016 pulg? Use un nivel de significación del 1%.

19 Dos procesos de alumbrado se comparan midiendo la intensidad de la luz en puntos determinados, situados en áreas iluminadas de acuerdo a cada proceso. Si en 18 mediciones, en la primera área, se obtuvo una desviación estándar de 2,9 bujías por pie cuadrado; mientras 23 mediciones en la segunda área su desviación estándar fue de 4,1 bujías por pie cuadrado ¿Se puede concluir que el alumbrado de la segunda área tiene mayor variabilidad? Use un nivel de significación del 1%.

20 La calidad de un producto depende, en parte, de mantener la estabilidad de las mediciones de sus características. Un fabricante de lámparas sospecha que una de sus líneas de producción está fabricando bombillas con una alta variación en su vida útil. Se tomó una muestra de 50 lámparas de la línea que supuestamente esta fuera de control, obteniendo una varianza de 94000; y 50 lámparas de una línea que está bajo control, cuya varianza fue de 39000 ¿Proporciona los datos evidencia suficiente para

indicar que las bombillas, producidas por la línea que esta fuera de control posee mayor variabilidad, en la vida útil, que la que está bajo control? Use un nivel de significación del 5%.

ANEXO 1

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$P(X \leq x) = B(x;n;p) = \sum_{k=0}^{x} b(k;n;p) \qquad donde\ x = 0,12,3,\ldots,n$$

		P																		
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500	0,2025	0,1600	0,1225	0,0900	0,0625	0,0400	0,0225	0,01	0,0025
	1	0,9975	0,9900	0,9775	0,9600	0,9375	0,9100	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500	0,6975	0,6400	0,5775	0,5100	0,4375	0,3600	0,2775	0,1900	0,0975
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,125	0,0911	0,0640	0,0429	0,0270	0,0156	0,0080	0,0034	0,0010	0,0001
	1	0,9927	0,9720	0,9393	0,8960	0,8434	0,7840	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000	0,4252	0,3520	0,2818	0,2160	0,1563	0,1040	0,0607	0,0280	0,0073
	2	0,9999	0,9990	0,9966	0,9920	0,9844	0,9730	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750	0,8336	0,7840	0,7254	0,6570	0,5781	0,4880	0,3859	0,2710	0,1426
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625	0,0410	0,0256	0,0150	0,0081	0,0039	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,9860	0,9477	0,8905	0,8192	0,7383	0,6517	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125	0,2415	0,1792	0,1265	0,0837	0,0508	0,0272	0,1200	0,0037	0,0005
	2	0,9995	0,9963	0,9880	0,9728	0,9492	0,9163	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875	0,6090	0,5248	0,4370	0,3483	0,2617	0,1880	0,1095	0,0523	0,0140
	3	1,0000	0,9999	0,9995	0,9984	0,9961	0,9919	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375	0,9085	0,8704	0,8215	0,7599	0,6836	0,590	0,4780	0,3439	0,1855
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313	0,0185	0,0102	0,0053	0,0024	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,9774	0,9185	0,8352	0,7373	0,6328	0,5282	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875	0,1312	0,0870	0,0540	0,0308	0,0156	0,0067	0,0022	0,0005	0,0000
	2	0,9988	0,9914	0,9734	0,9421	0,8965	0,8369	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000	0,4069	0,3174	0,2352	0,1631	0,1035	0,0579	0,0266	0,0086	0,0012
	3	1,0000	0,9995	0,9978	0,9933	0,9844	0,9692	0,9460	0,9130	0,8388	0,8125	0,7438	0,6630	0,5716	0,4718	0,3672	0,2627	0,1648	0,0815	0,0226
	4	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9976	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688	0,9497	0,9222	0,8840	0,8319	0,7627	0,6723	0,5563	0,4095	0,2262
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156	0,0083	0,0041	0,0018	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9672	0,8857	0,7765	0,6554	0,5339	0,4202	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094	0,0692	0,0410	0,0223	0,0109	0,0046	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000
	2	0,9978	0,9841	0,9527	0,9011	0,8306	0,7443	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438	0,2553	0,1792	0,1174	0,0705	0,0376	0,0170	0,0059	0,0013	0,0001

	3	0,9999	0,9987	0,9941	0,9830	0,9624	0,9295	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563	0,5585	0,4557	0,3529	0,2557	0,1694	0,0989	0,0473	0,0158	0,0022
	4	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9954	0,9891	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906	0,8364	0,7667	0,6809	0,5798	0,4661	0,3446	0,2235	0,1143	0,0328
	5	0,1000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844	0,9723	0,9533	0,9246	0,8824	0,8220	0,7379	0,6229	0,4686	0,2649
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078	0,0037	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9556	0,8503	0,7166	0,5767	0,4449	0,3294	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625	0,0357	0,0188	0,0900	0,0038	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,9962	0,9743	0,9262	0,8520	0,7564	0,6471	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266	0,1529	0,0963	0,0556	0,0288	0,0129	0,0047	0,0012	0,0002	0,0000
	3	0,9998	0,9973	0,9879	0,9667	0,9294	0,8740	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000	0,3917	0,2898	0,1998	0,1260	0,0706	0,0333	0,0121	0,0027	0,0002
	4	0,1000	0,9998	0,9988	0,9953	0,9871	0,9712	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734	0,6836	0,5801	0,4677	0,3529	0,2436	0,1480	0,0738	0,0257	0,0038
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9962	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375	0,8976	0,8414	0,7662	0,6706	0,5551	0,4233	0,2834	0,1497	0,0444
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922	0,9848	0,9720	0,9510	0,9176	0,8665	0,7903	0,6794	0,5217	0,3017

		P																		
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039	0,0017	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9556	0,8503	0,7166	0,5767	0,4449	0,3294	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625	0,0357	0,0188	0,0090	0,0038	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,9942	0,9619	0,8948	0,7969	0,6785	0,5518	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445	0,0885	0,0498	0,0253	0,0113	0,0042	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000
	3	0,9996	0,9950	0,9786	0,9437	0,8862	0,8059	0,7064	0,5941	0,4770	0,363	0,2604	0,1737	0,1061	0,0580	0,0273	0,0104	0,0029	0,0004	0,0000
	4	1,0000	0,9996	0,9971	0,9896	0,9727	0,9420	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367	0,5230	0,4059	0,2936	0,1941	0,1138	0,0563	0,0214	0,0050	0,0004
	5	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9958	0,9887	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555	0,7799	0,6846	0,5722	0,4482	0,3215	0,2031	0,1052	0,0381	0,0058
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648	0,9368	0,8936	0,8309	0,7447	0,6329	0,4967	0,3428	0,1869	0,0572
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961	0,9916	0,9832	0,9681	0,9424	0,8999	0,8322	0,7275	0,5695	0,3366
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020	0,0008	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9288	0,7748	0,5995	0,4362	0,3003	0,1960	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195	0,0091	0,0038	0,0014	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9916	0,9470	0,8591	0,7382	0,6007	0,4628	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898	0,0498	0,0250	0,0112	0,0043	0,0013	0,0030	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9994	0,9917	0,9661	0,9144	0,8343	0,7297	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539	0,1658	0,0994	0,0536	0,0253	0,0100	0,0031	0,0006	0,0001	0,0000
	4	1,0000	0,9991	0,9944	0,9804	0,9511	0,9012	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000	0,3786	0,2666	0,1717	0,0988	0,0489	0,0196	0,0056	0,0009	0,0000
	5	1,0000	0,9999	0,9994	0,9969	0,9900	0,9747	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461	0,6386	0,5174	0,3911	0,2703	0,1657	0,0856	0,0339	0,0083	0,0000
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102	0,8505	0,7682	0,6627	0,5372	0,3993	0,2618	0,1409	0,0530	0,0084
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805	0,9615	0,9295	0,8789	0,8040	0,6997	0,5638	0,4005	0,2252	0,0712
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980	0,9954	0,9899	0,9793	0,9596	0,9249	0,8658	0,7684	0,6126	0,3698
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107	0,0045	0,0017	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
	2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5226	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547	0,0274	0,0123	0,0048	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719	0,1020	0,0548	0,0260	0,0106	0,0035	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770	0,2616	0,1662	0,0949	0,0473	0,0197	0,0064	0,0014	0,0001	0,0000
	5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230	0,4956	0,3669	0,2485	0,1503	0,0781	0,0328	0,0099	0,0016	0,0001
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281	0,7340	0,6177	0,4862	0,3504	0,2241	0,1209	0,0500	0,0128	0,0010
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453	0,9004	0,8327	0,7384	0,6172	0,4744	0,3222	0,1798	0,0702	0,0115
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893	0,9767	0,9536	0,9140	0,8507	0,7560	0,6242	0,4557	0,2639	0,0861
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9975	0,9940	0,9865	0,9718	0,9437	0,8926	0,8031	0,6513	0,4013

		P																		
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8981	0,6974	0,4922	0,3221	0,1971	0,1130	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059	0,0022	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9848	0,9104	0,7788	0,6174	0,4552	0,3127	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327	0,0148	0,0059	0,0020	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9984	0,9815	0,9306	0,8389	0,7133	0,5696	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133	0,0610	0,0293	0,0122	0,0043	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9999	0,9972	0,9841	0,9496	0,8854	0,7897	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744	0,1738	0,0994	0,0501	0,0216	0,0076	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9997	0,9973	0,9883	0,9657	0,9218	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000	0,3669	0,2465	0,1487	0,0782	0,0343	0,0117	0,0027	0,0003	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9924	0,9784	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256	0,6029	0,4672	0,3317	0,2103	0,1146	0,0504	0,0159	0,0028	0,0001
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867	0,8089	0,7037	0,5744	0,4304	0,2867	0,1611	0,0694	0,0185	0,0016
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673	0,9348	0,8811	0,7999	0,6873	0,5448	0,3826	0,2212	0,0896	0,0152
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941	0,9861	0,9698	0,9394	0,8870	0,8029	0,6779	0,5078	0,3026	0,1019
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9986	0,9964	0,9912	0,9802	0,9578	0,9141	0,8327	0,6862	0,4312
12	0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8816	0,6590	0,4435	0,2749	0,1584	0,0850	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9804	0,8891	0,7358	0,5583	0,3907	0,2528	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193	0,0079	0,0028	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9978	0,9744	0,9078	0,7946	0,6488	0,4925	0,3467	0,2253	0,1345	0,0073	0,0356	0,0153	0,0056	0,0017	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9998	0,9957	0,9761	0,9274	0,8424	0,7237	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938	0,1117	0,0573	0,0255	0,0095	0,0028	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9995	0,9954	0,9806	0,9456	0,8822	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872	0,2607	0,1582	0,0846	0,0386	0,0143	0,0039	0,0007	0,0001	0,0000
	6	1,0000	0,9999	0,9993	0,9961	0,9857	0,9614	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128	0,4731	0,3348	0,2127	0,1178	0,0544	0,0194	0,0046	0,0005	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9972	0,9905	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062	0,6956	0,5618	0,4167	0,2763	0,1576	0,0726	0,0239	0,0043	0,0002
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270	0,8655	0,7747	0,6533	0,5075	0,3512	0,2054	0,0922	0,0256	0,0022
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807	0,9579	0,9166	0,8487	0,7472	0,6093	0,4417	0,2642	0,1109	0,0196
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968	0,9917	0,9804	0,9576	0,9150	0,8416	0,7251	0,5565	0,3410	0,1184
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9992	0,9978	0,9943	0,9862	0,9683	0,9313	0,8578	0,7176	0,4596

n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
13	0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8646	0,6213	0,3983	0,2336	0,1267	0,0637	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9755	0,8661	0,6920	0,5017	0,3326	0,2025	0,1132	0,0579	0,0269	0,0122	0,0041	0,0013	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9969	0,9658	0,8820	0,7473	0,5843	0,4206	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461	0,0203	0,0078	0,0025	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9997	0,9935	0,9658	0,9009	0,7940	0,6543	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334	0,0698	0,0321	0,0126	0,0040	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9991	0,9925	0,9700	0,9198	0,8346	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905	0,1788	0,0977	0,0462	0,0182	0,0056	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9999	0,9987	0,9930	0,9757	0,9376	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000	0,3563	0,2288	0,1295	0,0624	0,0243	0,0070	0,0013	0,0001	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9944	0,9818	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095	0,5732	0,4256	0,2841	0,1654	0,0802	0,0300	0,0075	0,0009	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666	0,7721	0,6470	0,4995	0,3457	0,2060	0,0991	0,0342	0,0065	0,0003
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539	0,9071	0,8314	0,7217	0,5794	0,4157	0,2557	0,1180	0,0342	0,0031
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888	0,9731	0,9421	0,8868	0,7975	0,6674	0,4983	0,4983	0,3080	0,0245
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9951	0,9874	0,9704	0,9363	0,8733	0,7664	0,6017	0,3787	0,1354
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9963	0,9903	0,9762	0,9450	0,8791	0,7458	0,4867

		P																		
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8470	0,5846	0,3567	0,1979	0,1010	0,0475	0,0205	0,0081	0,0029	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9699	0,8416	0,6479	0,4481	0,2811	0,1608	0,0839	0,0398	0,0170	0,0065	0,0022	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9958	0,9559	0,8535	0,6982	0,5213	0,3552	0,2205	0,1243	0,0632	0,0287	0,0114	0,0039	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9996	0,9908	0,9533	0,8702	0,7415	0,5842	0,4227	0,2793	0,1672	0,0898	0,0426	0,0175	0,0060	0,0017	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9985	0,9885	0,9561	0,8883	0,7805	0,6405	0,4859	0,3373	0,2120	0,1189	0,0583	0,0243	0,0083	0,0022	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9998	0,9978	0,9884	0,9617	0,9067	0,8164	0,6925	0,5461	0,3953	0,2586	0,1501	0,0753	0,0315	0,0103	0,0024	0,0003	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9997	0,9976	0,9897	0,9685	0,9247	0,8499	0,7414	0,6047	0,4539	0,3075	0,1836	0,0933	0,0383	0,0166	0,0022	0,0002	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9978	0,9917	0,9757	0,9417	0,8811	0,7880	0,6627	0,5141	0,3595	0,2195	0,1117	0,0439	0,0115	0,0015	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9983	0,9940	0,9825	0,9574	0,9102	0,8328	0,7207	0,5773	0,4158	0,2585	0,1298	0,0467	0,0092	0,0004
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9989	0,9961	0,9836	0,9713	0,9368	0,8757	0,7795	0,6448	0,4787	0,3018	0,1465	0,0441	0,0042
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9978	0,9935	0,9830	0,9602	0,9161	0,8392	0,7189	0,5519	0,3521	0,1584	0,0301
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9971	0,9919	0,9795	0,9525	0,8990	0,8021	0,6433	0,4154	0,1530
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9992	0,9976	0,9932	0,9822	0,9560	0,8972	0,7712	0,5123
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8290	0,5490	0,3186	0,1671	0,0353	0,0142	0,0052	0,0017	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	2	0,9638	0,8159	0,6042	0,3980	0,2361	0,1268	0,0617	0,0271	0,0107	0,0037	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9945	0,9444	0,8227	0,6482	0,4613	0,2969	0,1727	0,0905	0,0424	0,0176	0,0063	0,0019	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9994	0,9873	0,9873	0,9383	0,8358	0,6865	0,5155	0,3519	0,2173	0,1204	0,0592	0,0255	0,0093	0,0028	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9999	0,9977	0,9832	0,9389	0,8516	0,7216	0,5643	0,4032	0,2608	0,1509	0,0769	0,0338	0,0124	0,0037	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9997	0,9964	0,9819	0,9434	0,8689	0,7548	0,6098	0,4522	0,3036	0,1818	0,0950	0,0422	0,0152	0,0042	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9994	0,9958	0,9827	0,9500	0,8868	0,7869	0,6535	0,5000	0,3465	0,2131	0,1132	0,0500	0,0173	0,0042	0,0006	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9958	0,9848	0,9578	0,9050	0,8182	0,6964	0,5478	0,3902	0,2452	0,1311	0,0566	0,0181	0,0036	0,0003	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9963	0,9876	0,9662	0,9231	0,8491	0,7392	0,5968	0,4357	0,2784	0,1484	0,0611	0,0168	0,0022	0,0001
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9972	0,9907	0,9745	0,9408	0,8796	0,7827	0,6481	0,4845	0,3135	0,1642	0,0617	0,0127	0,0006
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9972	0,9907	0,9745	0,9408	0,8796	0,7827	0,6481	0,4845	0,3135	0,1642	0,0617	0,0127	0,0006
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9963	0,9893	0,9729	0,9383	0,8732	0,7639	0,6020	0,3958	0,1841	0,0362
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9948	0,9858	0,9647	0,9198	0,8329	0,6814	0,4510	0,1710
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9984	0,9953	0,9866	0,9648	0,9126	0,7941	0,5367

		P																		
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8108	0,5147	0,2839	0,1407	0,0635	0,0261	0,0098	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9571	0,7892	0,5614	0,3518	0,1971	0,0994	0,0451	0,0183	0,0066	0,0021	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9930	0,9316	0,7899	0,5981	0,4050	0,2459	0,1339	0,0651	0,0281	0,0106	0,0035	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9991	0,9830	0,9209	0,7982	0,6302	0,4499	0,2892	0,1666	0,0853	0,0384	0,0149	0,0049	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9999	0,9967	0,9765	0,9183	0,8103	0,6598	0,4900	0,3288	0,1976	0,1051	0,0486	0,0191	0,0062	0,0016	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9995	0,9944	0,9733	0,9204	0,8247	0,6881	0,5272	0,3660	0,2272	0,1241	0,0583	0,0229	0,0071	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9999	0,9989	0,9930	0,9729	0,9256	0,8406	0,7161	0,5629	0,4018	0,2559	0,1423	0,0671	0,0257	0,0075	0,0015	0,0002	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9988	0,9985	0,9925	0,9743	0,9329	0,8577	0,7441	0,5982	0,4371	0,2839	0,1594	0,0744	0,0271	0,0070	0,0011	0,0001	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9984	0,9929	0,9771	0,9417	0,8759	0,7728	0,6340	0,4728	0,3119	0,1753	0,0796	0,0267	0,0056	0,0005	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9938	0,9809	0,9514	0,8949	0,8024	0,6712	0,5100	0,3402	0,1897	0,0817	0,0235	0,0033	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9851	0,9616	0,9147	0,8334	0,7108	0,5501	0,3698	0,2018	0,0791	0,0170	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9991	0,9965	0,9894	0,9719	0,9349	0,8661	0,7541	0,5950	0,4019	0,2101	0,0684	0,0070
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9979	0,9934	0,9817	0,9549	0,9006	0,8029	0,6482	0,4386	0,2108	0,0429
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9967	0,9902	0,9739	0,9365	0,8593	0,7161	0,4853	0,1892
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9967	0,9900	0,9719	0,9257	0,8147	0,5599
17	0	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7922	0,4818	0,5250	0,1182	0,0501	0,0193	0,0067	0,0021	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

2	0,9497	0,7618	0,5198	0,3096	0,1637	0,0774	0,0327	0,0132	0,0041	0,0012	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,9912	0,9174	0,7556	0,5489	0,3530	0,2019	0,1028	0,0464	0,0184	0,0064	0,0019	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,9988	0,9779	0,9013	0,7582	0,5739	0,5739	0,3887	0,2348	0,1260	0,0245	0,0086	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9999	0,9953	0,9681	0,8943	0,7653	0,5968	0,4197	0,2639	0,1471	0,0717	0,0301	0,0106	0,0030	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	1,0000	0,9992	0,9917	0,9623	0,8929	0,7752	0,6188	0,4478	0,2902	0,1662	0,0826	0,0348	0,0120	0,0032	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
7	1,0000	0,9999	0,9983	0,9891	0,9598	0,8954	0,7872	0,6405	0,4743	0,3145	0,1834	0,0919	0,0383	0,0127	0,0031	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
8	1,0000	1,0000	0,9997	0,9974	0,9876	0,9597	0,9006	0,8011	0,6626	0,5000	0,3374	0,1989	0,0994	0,0403	0,0124	0,0026	0,0003	0,0000	0,0000
9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9969	0,9873	0,9617	0,9081	0,8166	0,6855	0,5257	0,3595	0,2128	0,1046	0,0402	0,0109	0,0017	0,0001	0,0000
10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9968	0,9880	0,9652	0,9174	0,8338	0,7098	0,5522	0,3812	0,2248	0,1071	0,0377	0,0083	0,0008	0,0000
11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9997	0,9894	0,9699	0,9283	0,8529	0,7361	0,5803	0,4032	0,2347	0,1057	0,0319	0,0047	0,0001
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9975	0,9914	0,9755	0,9404	0,8740	0,7652	0,6113	0,4261	0,2418	0,0987	0,0221	0,0012
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9981	0,9936	0,9816	0,9536	0,8972	0,7981	0,6470	0,4511	0,2444	0,0826	0,0088
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9988	0,9959	0,9877	0,9673	0,9226	0,8363	0,6904	0,4802	0,2382	0,0503
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9979	0,9933	0,9807	0,9499	0,8818	0,7475	0,5182	0,2078
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993	0,9977	0,9925	0,9775	0,9369	0,8332	0,5819

											P									
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7735	0,4503	0,2241	0,0991	0,0395	0,0142	0,0046	0,0013	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9419	0,7338	0,4797	0,2713	0,1353	0,0600	0,0236	0,0082	0,0025	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9891	0,9018	0,7202	0,5010	0,3057	0,1646	0,0783	0,0328	0,0120	0,0038	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9985	0,9718	0,8794	0,7164	0,5187	0,3327	0,1816	0,0942	0,0411	0,0154	0,0049	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9998	0,9936	0,9581	0,8671	0,7175	0,5344	0,3550	0,2088	0,1077	0,0481	0,0183	0,0058	0,0014	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9988	0,9882	0,9487	0,8610	0,7217	0,5491	0,3743	0,2258	0,1189	0,0537	0,0203	0,0062	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9998	0,9973	0,9837	0,9431	0,8593	0,7283	0,5634	0,3915	0,2403	0,1280	0,0576	0,0212	0,0061	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9995	0,9957	0,9807	0,9404	0,8609	0,7368	0,5778	0,4073	0,2527	0,1347	0,0597	0,0210	0,0054	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9946	0,9790	0,9403	0,8653	0,7473	0,5927	0,4222	0,2632	0,1391	0,0596	0,0193	0,0043	0,0005	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9939	0,9788	0,9424	0,8720	0,7597	0,6085	0,4366	0,2717	0,1407	0,0569	0,0163	0,0027	0,0002	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9938	0,9797	0,9463	0,8811	0,7742	0,6257	0,4509	0,2783	0,1390	0,0513	0,0118	0,0012	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9986	0,9942	0,9817	0,9519	0,8923	0,7912	0,6450	0,4656	0,2825	0,1329	0,0419	0,0064	0,0002
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9846	0,9589	0,9058	0,8114	0,6673	0,4813	0,2836	0,1206	0,0282	0,0015
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9962	0,9880	0,9672	0,9217	0,8354	0,6943	0,4990	0,2798	0,0982	0,0109
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9975	0,9918	0,9764	0,9400	0,8647	0,7287	0,5203	0,2662	0,0581
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9987	0,9954	0,9858	0,9605	0,9009	0,7759	0,5497	0,2265

	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9998	0,9944	0,9820	0,9464	0,8499	0,6028
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7547	0,4203	0,1985	0,0829	0,0310	0,0104	0,0031	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9335	0,7054	0,4413	0,2369	0,1113	0,0462	0,0170	0,0055	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9868	0,8850	0,6841	0,4551	0,2631	0,1332	0,0591	0,0230	0,0077	0,0022	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9980	0,9648	0,8556	0,6733	0,4654	0,2822	0,1500	0,0696	0,0280	0,0096	0,0028	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9998	0,9914	0,9463	0,8369	0,6678	0,4739	0,2968	0,1629	0,0777	0,0318	0,0109	0,0031	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9983	0,9837	0,9324	0,8251	0,6655	0,4812	0,3081	0,1727	0,0835	0,0342	0,0116	0,0031	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9997	0,9959	0,9767	0,9225	0,8180	0,6656	0,4878	0,3169	0,1796	0,0871	0,0352	0,0114	0,0028	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9992	0,9933	0,9713	0,9161	0,8145	0,6675	0,4940	0,3238	0,1841	0,0885	0,0347	0,0105	0,0023	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9911	0,9674	0,9125	0,8139	0,6710	0,5000	0,3290	0,1861	0,0875	0,0326	0,0089	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9977	0,9895	0,9653	0,9115	0,8159	0,6762	0,5060	0,3325	0,1855	0,0839	0,0287	0,0067	0,0008	0,0000	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9972	0,9886	0,9648	0,9129	0,8204	0,6831	0,5122	0,3344	0,1820	0,0775	0,0233	0,0041	0,0003	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9969	0,9884	0,9658	0,9165	0,8273	0,6919	0,5188	0,3345	0,1749	0,0676	0,0163	0,0017	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9969	0,9891	0,9682	0,9223	0,8371	0,7032	0,5261	0,3322	0,1631	0,0537	0,0086	0,0002
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9972	0,9904	0,9720	0,9304	0,8500	0,7178	0,5346	0,3267	0,1444	0,0352	0,0020
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9978	0,9923	0,9770	0,9409	0,8668	0,7369	0,5449	0,3159	0,1150	0,0132
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9985	0,9945	0,9830	0,9538	0,8887	0,7631	0,5587	0,2946	0,0665
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9969	0,9896	0,9690	0,9171	0,8015	0,5797	0,2453
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9958	0,9856	0,9544	0,8649	0,6226

		P																		
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
20	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9974	0,9598	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059	0,0015	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207	0,0064	0,0016	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577	0,0214	0,0065	0,0015	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316	0,0580	0,0210	0,0060	0,0013	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517	0,1308	0,0565	0,0196	0,0051	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119	0,2493	0,1275	0,0532	0,0171	0,0039	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881	0,4086	0,2447	0,1218	0,0480	0,0139	0,0026	0,0002	0,0000	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483	0,5857	0,4044	0,2376	0,1133	0,0409	0,0100	0,0013	0,0001	0,0000

12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684	0,7480	0,5841	0,3990	0,2277	0,1018	0,0321	0,0059	0,0004	0,0000
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423	0,8701	0,7500	0,5834	0,3920	0,2142	0,0867	0,0219	0,0024	0,0000
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793	0,9447	0,8744	0,7546	0,5836	0,3828	0,1958	0,0673	0,0113	0,0003
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941	0,9811	0,9490	0,8818	0,7625	0,5852	0,3704	0,1702	0,0432	0,0026
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9840	0,9556	0,8929	0,7748	0,5886	0,3523	0,1330	0,0159
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9991	0,9964	0,9879	0,9645	0,9087	0,7939	0,5951	0,3231	0,0755
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9979	0,9924	0,9757	0,9308	0,8244	0,6083	0,2642
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9968	0,9885	0,9612	0,8784	0,6415

ANEXO II

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE POISSON

$$P(X \leq x) = P(x;\mu) = \sum_{k=0}^{x} p(k;\mu)$$

x μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,02	0,980	1,000										
0,04	0,961	0,999	1,000									
0,06	0,942	0,998	1,000									
0,08	0,923	0,997	1,000									
0,10	0,905	0,995	1,000									
0,15	0,861	0,990	1,000									
0,20	0,819	0,982	0,999	1,000								
0,25	0,779	0,974	0,998	1,000								
0,30	0,741	0,963	0,996	1,000								
0,35	0,705	0,951	0,994	1,000								
0,40	0,670	0,938	0,992	0,999	1,000							
0,45	0,638	0,925	0,989	0,999	1,000							
0,50	0,607	0,910	0,986	.998	1,000							
0,55	0,577	0,894	0,982	0,998	1,000							
0,60	0,549	0,878	0,977	0,997	1,000							
0,65	0,522	0,861	0,972	0,996	0,999	1,000						
0,70	0,497	0,844	0,966	0,994	1,000	1,000						

0,75	0,472	0,827	0,959	0,993	0,999	1,000							
0,80	0,449	0,809	0,953	0,991	0,999	1,000							
0,85	0,427	0,791	0,945	0,989	0,998	1,000							
0,90	0,407	0,772	0,937	0,987	0,998	1,000							
0,95	0,387	0,754	0,929	0,984	0,997	1,000							
1,00	0,368	0,736	0,920	0,981	0,996	0,999	1,000						
1,10	0,333	0,699	0,900	0,974	0,995	0,999	1,000						
1,20	0,301	0,663	0,879	0,966	0,992	0,998	1,000						
1,30	0,273	0,627	0,857	0,957	0,989	0,998	1,000						
1,40	0,247	0,592	0,833	0,946	0,986	0,997	0,999	1,000					
1,50	0,223	0,558	0,809	0,934	0,981	0,996	0,999	1,000					
1,60	0,202	0,525	0,783	0,921	0,976	0,994	0,999	1,000					
1,70	0,183	0,493	0,757	0,907	0,970	0,992	0,998	1,000					
1,80	0,165	0,463	0,731	0,891	0,964	0,990	0,997	0,999	1,000				
1,90	0,150	0,434	0,704	0,875	0,956	0,987	0,997	0,999	1,000				
2,00	0,135	0,406	0,677	0,857	0,947	0,983	0,995	0,999	1,000				
2,20	0,111	0,355	0,623	0,819	0,928	0,975	0,993	0,998	1,000				
2,40	0,091	0,308	0,570	0,779	0,904	0,964	0,988	0,997	0,999	1,000			
2,60	0,074	0,267	0,518	0,736	0,877	0,951	0,983	0,995	0,999	1,000			
2,80	0,061	0,231	0,469	0,692	0,848	0,935	0,976	0,992	0,998	0,999	1,000		
3,00	0,050	0,199	0,423	0,647	0,815	0,916	0,966	0,988	0,996	0,999	1,000		
3,20	0,041	0,171	0,380	0,603	0,781	0,895	0,955	0,983	0,983	0,994	0,998	1,000	

x μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3,40	0,033	0,147	0,340	0,558	0,744	0,871	0,942	0,977	0,992	0,997	0,999	1,000
3,60	0,027	0,126	0,303	0,515	0,706	0,844	0,927	0,969	0,988	0,996	0,999	1,000
3,80	0,022	0,107	0,269	0,473	0,668	0,816	0,909	0,960	0,984	0,994	0,998	0,999
4,00	0,018	0,092	0,092	0,238	0,433	0,629	0,785	0,949	0,979	0,992	0,997	0,999
4,20	0,015	0,078	0,210	0,395	0,590	0,753	0,867	0,936	0,972	0,989	0,996	0,999
4,40	0,012	0,066	0,185	0,359	0,551	0,720	0,844	0,921	0,964	0,985	0,997	0,999
4,20	0,015	0,078	0,210	0,395	0,590	0,753	0,867	0,936	0,972	0,989	0,996	0,999
4,40	0,012	0,066	0,185	0,359	0,551	0,720	0,844	0,921	0,964	0,985	0,997	0,999
4,60	0,010	0,056	0,163	0,326	0,513	0,686	0,818	0,905	0,955	0,980	0,992	0,997
4,80	0,008	0,048	0,143	0,294	0,476	0,651	0,791	0,887	0,944	0,975	0,990	0,996
5,00	0,007	0,040	0,125	0,265	0,440	0,616	0,762	0,867	0,932	0,968	0,986	0,995
5,20	0,006	0,034	0,109	0,238	0,406	0,581	0,732	0,845	0,918	0,960	0,982	0,997
5,40	0,005	0,029	0,095	0,213	0,373	0,546	0,702	0,822	0,903	0,951	0,977	0,990
5,60	0,004	0,024	0,082	0,191	0,342	0,512	0,67	0,797	0,886	0,941	0,972	0,988
5,80	0,003	0,021	0,072	0,170	0,313	0,478	0,638	0,771	0,867	0,929	0,965	0,984
6,00	0,002	0,017	0,062	0,151	0,285	0,446	0,606	0,744	0,847	0,916	0,957	0,980
6,20	0,002	0,015	0,054	0,134	0,259	0,414	0,574	0,716	0,826	0,902	0,949	0,975
6,40	0,002	0,012	0,046	0,119	0,235	0,384	0,542	0,687	0,803	0,886	0,939	0,969
6,60	0,001	0,010	0,040	0,105	0,213	0,355	0,511	0,658	0,780	0,869	0,927	0,963
7,00	0,001	0,007	0,030	0,082	0,173	0,301	0,450	0,599	0,729	0,830	0,901	0,947
7,20	0,001	0,006	0,025	0,072	0,156	0,276	0,420	0,569	0,703	0,810	0,887	0,937

x / μ	12	13	14	15	16	17
3,80	1,000					
4,00	1,000					
4,20	1,000					
4,40	0,999	1,000				
4,60	0,999	1,000				
4,80	0,999	1,000				
5,00	0,998	0,999	1,000			
5,20	0,997	0,999	1,000			
5,40	0,996	0,999	1,000			
5,60	0,995	0,998	0,999	1,000		
5,80	0,099	0,997	0,999	1,000		
6,00	0,991	0,996	0,999	0,999	1,000	
6,20	0,989	0,995	0,998	0,999	1,000	
6,40	0,986	0,994	0,997	0,999	1,000	
6,60	0,982	0,992	0,997	0,999	0,999	1,000
6,80	0,978	0,990	0,996	0,998	0,999	1,000
7,00	0,973	0,987	0,994	0,998	0,999	1,000
7,20	0,967	0,984	0,993	0,997	0,999	1,000

μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7,4	0,001	0,005	0,022	0,063	0,140	0,253	0,392	0,539	0,676	0,788	0,871	0,926
7,6	0,001	0,004	0,019	0,055	0,125	0,231	0,365	0,510	0,648	0,765	0,854	0,915
7,8	0,000	0,004	0,016	0,048	0,112	0,210	0,338	0,481	0,620	0,741	0,835	0,902
8,0	0,000	0,003	0,014	0,042	0,100	0,191	0,313	0,453	0,593	0,717	0,816	0,888

8,5	0,000	0,002	0,009	0,030	0,074	0,150	0,256	0,386	0,523	0,653	0,763	0,849
9,0	0,000	0,001	0,006	0,021	0,055	0,116	0,207	0,324	0,456	0,587	0,706	0,803
9,5	0,000	0,001	0,004	0,015	0,040	0,089	0,165	0,269	0,392	0,522	0,645	0,752
10,0	0,000	0,000	0,003	0,010	0,029	0,067	0,130	0,220	0,333	0,458	0,583	0,697
10,5	0,000	0,000	0,002	0,007	0,021	0,050	0,102	0,179	0,279	0,397	0,521	0,639
11,0	0,000	0,000	0,001	0,005	0,015	0,038	0,079	0,143	0,232	0,341	0,460	0,579
11,5	0,000	0,000	0,001	0,003	0,011	0,028	0,060	0,144	0,191	0,289	0,402	0,520
12,0	0,000	0,000	0,001	0,002	0,008	0,020	0,046	0,090	0,155	0,242	0,347	0,462
12,5	0,000	0,000	0,000	0,002	0,005	0,015	0,035	0,070	0,125	0,201	0,297	0,406
13,0	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,011	0,026	0,054	0,100	0,166	0,252	0,353
13,5	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,019	0,041	0,079	0,135	0,211	0,304
14,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,006	0,014	0,032	0,062	0,109	0,176	0,260
14,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,010	0,024	0,048	0,088	0,015	0,220
15,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,018	0,037	0,070	0,118	0,185

x μ	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
7,4	0,961	0,980	0,991	0,996	0,998	0,999	1,000					
7,6	0,954	0,976	0,989	0,995	0,998	0,999	1,000					
7,8	0,945	0,971	0,986	0,993	0,997	0,999	1,000					
8,0	0,936	0,966	0,983	0,992	0,996	0,998	0,999	1,000				
8,5	0,909	0,949	0,973	0,986	0,993	0,997	0,999	0,999	1,000			
9,0	0,876	0,926	0,959	0,978	0,989	0,995	0,998	0,999	1,000			
10,0	0,792	0,864	0,917	0,951	0,973	0,986	0,993	0,997	0,998	0,999	1,000	
10,5	0,742	0,825	0,888	0,932	0,960	0,978	0,988	0,994	0,997	0,999	0,999	1,000
11,0	0,689	0,781	0,854	0,907	0,944	0,968	0,982	0,991	0,995	0,998	0,999	1,000
11,5	0,633	0,733	0,815	0,878	0,924	0,954	0,974	0,986	0,992	0,996	0,998	0,999
12,0	0,576	0,682	0,772	0,844	0,899	0,937	0,963	0,979	0,983	0,991	0,995	0,998
12,5	0,519	0,628	0,725	0,806	0,869	0,916	0,948	0,969	0,983	0,991	0,995	0,998
13,0	0,463	0,573	0,675	0,764	0,835	0,890	0,930	0,957	0,975	0,986	0,992	0,996
13,5	0,409	0,518	0,623	0,718	0,798	0,861	0,908	0,942	0,965	0,980	0,989	0,994

14,0	0,358	0,464	0,570	0,669	0,756	0,827	0,883	0,923	0,952	0,971	0,983	0,991
14,5	0,311	0,413	0,518	0,619	0,711	0,79	0,853	0,901	0,936	0,96	0,976	0,986
15,0	0,268	0,363	0,466	0,568	0,664	0,749	0,819	0,875	0,917	0,947	0,967	0,981

x / μ	24	25	26	27	28	29
11,5	1,000					
12,0	0,999	1,000				
12,5	0,999	0,999	1,000			
13,0	0,998	0,999	1,000			
13,5	0,997	0,998	0,999	1,000		
14,0	0,995	0,997	0,999	0,999	1,000	
15,0	0,989	0,994	0,997	0,998	0,999	1,000

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0,000	0,001	0,004	0,010	0,022	0,043	0,077	0,127	0,193	0,275	0,368	0,467	0,566
0,000	0,001	0,002	0,005	0,013	0,026	0,049	0,085	0,135	0,201	0,281	0,371	0,468
0,000	0,000	0,001	0,003	0,007	0,015	0,030	0,055	0,092	0,143	0,208	0,287	0,375
0,000	0,000	0,001	0,000	0,004	0,009	0,018	0,035	0,061	0,098	0,150	0,215	0,292
0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,005	0,011	0,021	0,039	0,066	0,105	0,157	0,221
0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,006	0,013	0,025	0,043	0,072	0,111	0,163
0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,008	0,015	0,028	0,048	0,077	0,117
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,009	0,017	0,031	0,052	0,082
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,005	0,011	0,020	0,034	0,056
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,003	0,006	0,012	0,022	0,038

x / μ	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
16,0	0,659	0,742	0,812	0,868	0,911	0,942	0,963	0,978	0,987	0,993	0,996	0,998	0,999
17,0	0,564	0,655	0,736	0,805	0,861	0,905	0,937	0,959	0,975	0,985	0,991	0,995	0,997
18,0	0,469	0,562	0,651	0,731	0,799	0,855	0,899	0,932	0,955	0,972	0,983	0,990	0,994
19,0	0,378	0,469	0,561	0,647	0,725	0,793	0,849	0,893	0,927	0,951	0,969	0,980	0,988
20,0	0,297	0,381	0,470	0,559	0,644	0,721	0,787	0,843	0,888	0,922	0,948	0,966	0,978
21,0	0,227	0,302	0,384	0,471	0,558	0,640	0,716	0,782	0,838	0,883	0,917	0,944	0,963
22,0	0,169	0,232	0,306	0,387	0,472	0,556	0,637	0,712	0,777	0,832	0,877	0,913	0,940
23,0	0,123	0,175	0,238	0,310	0,889	0,472	0,555	0,635	0,708	0,772	0,827	0,873	0,908
24,0	0,087	0,128	0,180	0,243	0,314	0,392	0,473	0,554	0,632	0,704	0,768	0,823	0,868
25,0	0,060	0,092	0,134	0,185	0,247	0,318	0,394	0,473	0,553	0,629	0,700	0,763	0,818

x / μ	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
16,0	0,999	1,000											
17,0	0,999	0,999	1,000										
18,0	0,997	0,998	0,999	1,000									
19,0	0,993	0,996	0,998	0,999	0,999	1,000							
20,0	0,987	0,992	0,995	0,997	0,999	0,999	1,000						
21,0	0,976	0,985	0,991	0,994	0,997	0,998	0,999	0,999	1,000				
22,0	0,959	0,973	0,983	0,989	0,994	0,996	0,998	0,999	0,999	1,000			
23,0	0,936	0,956	0,971	0,981	0,998	0,993	0,996	0,997	0,999	0,999	1,000		
24,0	0,904	0,932	0,953	0,969	0,979	0,987	0,992	0,995	0,997	0,998	0,999	1,000	
25,0	0,863	0,900	0,929	0,950	0,966	0,978	0,985	0,991	0,994	0,997	0,998	0,999	1,000

ANEXO III

ÁREA BAJO LA CURVA NORMAL

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,80	0,09
3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
2,8	0,0026	0,0024	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,7	0,0035	0,0034	0,0030	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,004	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,5	0,0062	0,006	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-										
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,1	0,0179	0,0179	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,025	0,0244	0,0239	0,0233
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,6180	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823

1,3 -										
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
0,9	0,1871	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,3	0,3821	0,3721	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,0	0,5000	0,4960	0,4960	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	, 8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9278	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9938	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

ANEXO IV

VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN *JI* CUADRADA.

α / ν	0,995	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,001	0,005
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,01	0,0201	0,0506	0,0103	5,991	7,378	9,21	10,597
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	11,07	12,832	15,056	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1.,635	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	15,507	17,535	20,09	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	18,307	20,483	23,209	25,0188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	19,675	21,92	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,60	5,629	6,571	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	26,296	28,845	32	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	27,587	30,191	33,409	35,718
19	6,844	7,633	8,907	10,117	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,26	9,591	10,851	31,41	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	32,671	35,479	38,932	41,401

22	8,643	9,542	10,982	12,338	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,26	10,196	11,689	13,091	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,484	36,415	39,394	42,98	45,558
25	10,52	11,524	13,120	14,611	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,16	12,198	13,844	15,379	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	40,113	43,194	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	42,557	45,772	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	43,773	46,979	50,892	53,672
40	40,706	22,164	24,433	26,509	55,758	29,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	67,505	71,42	76,154	79,49
60	35,535	37,485	40,482	43,118	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,54	57,153	60,391	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,646	69,126	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	124,324	129,561	135,807	140,169

ANEXO V

VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN *t* DE STUDENT

α / ν	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921

17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2.,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
Inf	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

ANEXO VI

VALORES CRÍTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN F

$F_{0,05}$ ν_1:*Grados de libertad para el numerador* ν_2 :*Grados de libertad para el denominador*

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	inf
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,7	8,66	8,64	8,59	8,62	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,8	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,5	4,46	4,43	4,4	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,7	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,38	2,38	2,30	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	3,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,93
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84

21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,4	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,74	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2 ,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
inf	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

$F_{0,01}$ ν_1:Grados de libertad para el numerador ν_2 :Grados de libertad para el denominador

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	inf
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98,50	99,00	99,20	99,20	99,30	99,30	99,40	99,40	99,40	99,40	99,40	99,40	99,40	99,50	99,50	99,50	99,50	99,50	99,50
3	34,10	30,80	29,50	28,70	28,20	27,90	27,70	27,50	27,30	27,20	27,10	26,90	26,70	26,60	26,50	26,40	26,30	26,20	26,10
4	21,20	18,00	16,70	16,00	15,50	15,20	15,00	18,80	14,70	14,50	14,40	14,20	14,00	13,90	13,80	13,70	13,70	13,60	13,50
5	16,30	13,30	12,10	11,40	11,00	10,70	10,50	10,30	10,20	10,10	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,70	10,90	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,20	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,30	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,92	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,83
9	10,60	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,00	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,12	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00

15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3.,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,19	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,53	2,45	2,36	2,27	2,17
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
inf	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

RESPUESTAS A PROBLEMAS PROPUESTOS

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 1

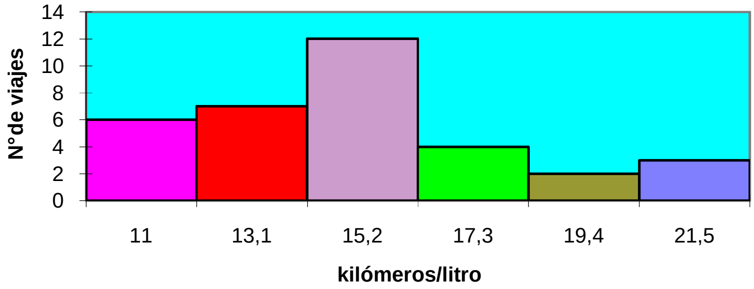
1-

RESISTENCIA A LA RUPTURA DE HILOS DE CÁÑAMO

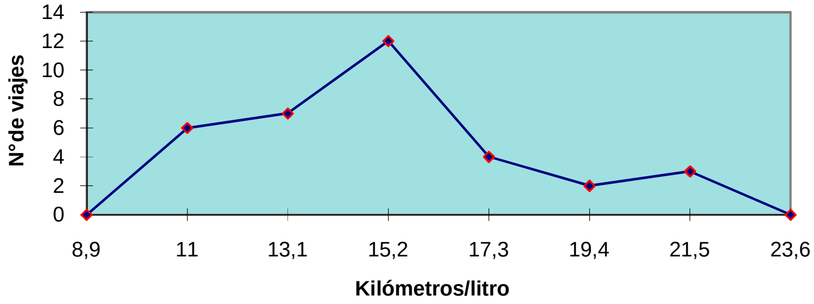
Resistencia (Onzas)	N° de hilos de cáñamo	Promedio de resistencia	N° de hilos acumulados
15,2....25,6	7	20,4	7
25,7....36,1	13	30,9	20
36,2....46,6	10	41,4	30
46,7....57,1	10	51,9	40
57,2....67,6	4	62,4	44

3

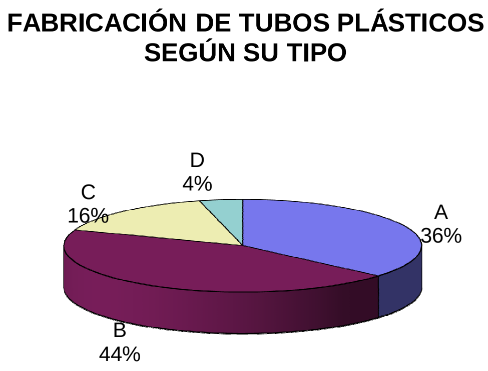
RENDIMIENTO DE 30 VIAJES DE LOS AUTOMÓVILES DE UNA COMPAÑÍA DE TRANSPORTE

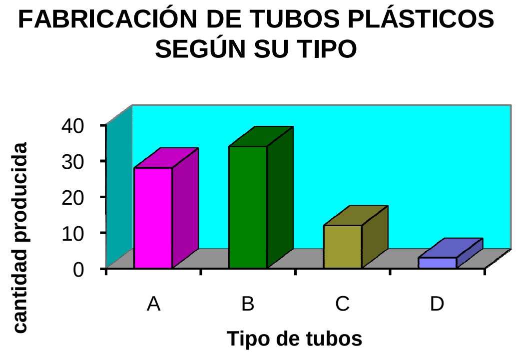


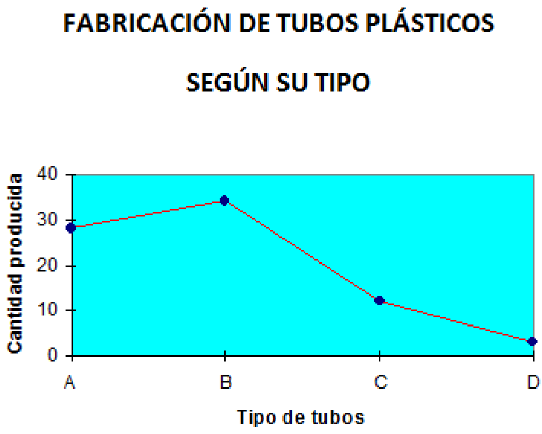
RENDIMIENTO DE 30 VIAJES DE LOS AUTOMÓVILES DE UNA COMPAÑÍA DE TRANSPORTE



5.-


FABRICACIÓN DE TUBOS PLÁSTICOS
SEGÚN SU TIPO
D
4%
C
16%
A
36%
B
44%

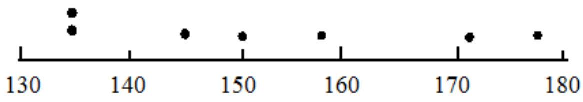

FABRICACIÓN DE TUBOS PLÁSTICOS
SEGÚN SU TIPO
cantidad producida
40
30
20
10
0
A
B
C
D
Tipo de tubos


FABRICACIÓN DE TUBOS PLÁSTICOS
SEGÚN SU TIPO
Cantidad producida
40
30
20
10
0
A
B
C
D
Tipo de tubos

7.

MEDICIONES DE LOS PUNTOS DE EBULLICIÓN DE

UN COMPUESTO DE SILICIO

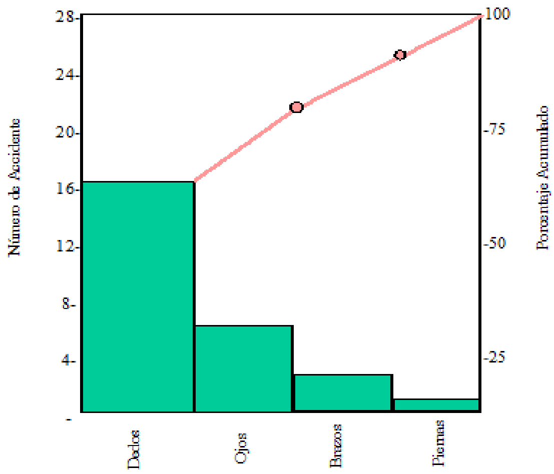


9)y 11)

ACCIDENTES EN UNA EMPRESA QUE SE DEDICA A LA

FABRICACIÓN DE CORREAS PARA DAMAS SEGÚN

ZONA DE DAÑO EN QUE OCURRE



RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 2

1.-

Parte a) 40,72.

Parte b) 37,7

Parte c) σ^2=170,82

σ=13,07.

Parte d) s^2=174,76

s=13,22.

3.-

Parte a) 14,45.

Parte b) 14,58.

Parte c) σ^2 =5,7

σ=2,39.

Parte d) $s^2=5{,}89$

$s=2{,}43$.

Parte e) $P_{50}=14{,}58$

$P_{30}=13{,}04$

$P_{75}=15{,}94$

Parte f) $Rp_{13,8}=38{,}17\%$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 3

1.- Parte a) $S=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

Parte b) $A=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$.

Parte c) $B=\{\{2,3\},\{2,4\}\}$.

Parte d) $A\cup B=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$.

Parte e) $A\cap B=\varnothing$.

Parte f) $A'=\{\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

3.- Parte a) $A\cup B=\{1,2,3,4\}$

Parte b) $A\cap B=\varnothing$.

Parte c) $B'=\{1,2,4,5\}$. $A\cup B'=\{1,2,4,5\}=B'$.

Parte d) $C'=\{1,2,3,4\}=A\cup B$.

5.- 60.

7.- Parte a) 364.

Parte b) 1365.

9.- 15876.

11.- 5040.

13.- $0{,}013\Leftrightarrow 1{,}3\%$.

15.- 0,45.

17.- Parte a) $\frac{1}{5}$

Parte b) $\frac{2}{5}$

Parte c) $\frac{4}{15}$

19.- Parte a) 0,48.

Parte b) 0,7296.

21.- 0,0714

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 4

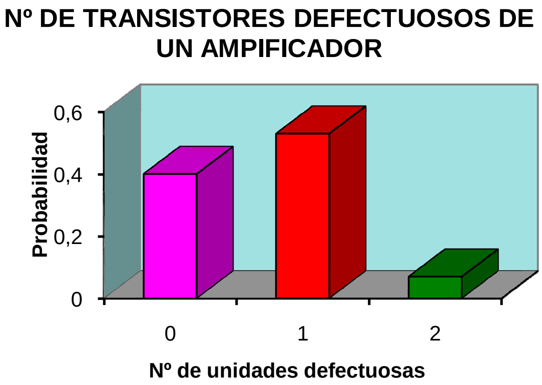
1.- Parte a:

x	**0**	**1**	**2**
Probabilidad	**2/5**	**8/15**	**1/15**

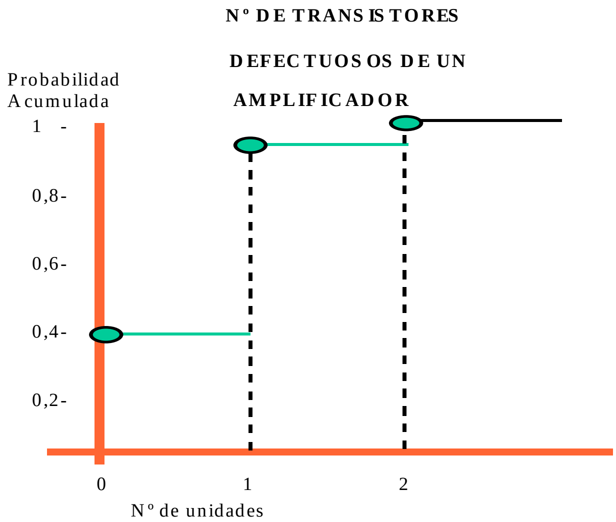
Parte b:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{2}{5} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{14}{15} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Parte c:



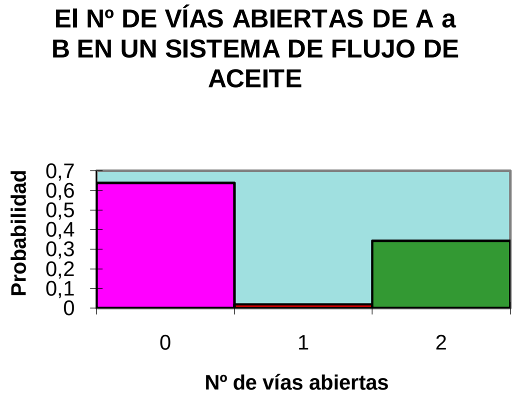
Parte d:



3.-Parte a:

x	0	1	2
Probabilidad	**0,6381**	**0,0189**	**0,343**

Parte b:



5.-

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}05 & 0 \le x < 1 \\ 0{,}21 & 1 \le x < 2 \\ 0{,}58 & 2 \le x < 3 \\ 0{,}99 & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

7.-Parte a: 0,095.
Parte b: 0,073.
Parte c: 0,105.
.....Parte d: 0

9.- Parte a: 0,36925.
Parte b: 0,47971.

11.-

$f(x,y)$		x = 0	1	2	3	Total
	0	0	3/70	9/70	3/70	15/70
y	1	2/70	18/70	18/70	2/70	40/70
	2	3/70	9/70	3/70	0	15/70
Total		5/70	30/70	30/70	5/70	1

13.-Parte a: 0,1319.
Parte b: 1/3.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 5

1.
$$\mu_X = 1{,}83$$
$$\sigma_X^2 = 2{,}4811$$
$$\sigma_X = 1{,}575$$

3.
$$\mu_X = 0{,}56$$
$$\sigma_X^2 = 0{,}24587$$
$$\sigma_X = 0{,}4958$$

5.
$$\mu_{g(X)} = 240$$
$$\sigma_{g(X)}^2 = 36180$$
$$\sigma_{g(X)} = 190{,}21$$

7. $\mu_{g(X,Y)} = 46{,}1$

9. $\mu_X = 3{,}25$

11. $\mu_X = \frac{11}{21}$

13. $\sigma_{XY} = 0$

15. $P(1{,}83 - k(1{,}575) < X < 1{,}83 - k(1{,}575)) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$P(-2{,}895 < X < 6{,}555) \geq 0{,}89$

17. $P(0{,}5642 - k(0{,}24587) < X < 0{,}5642 - k(0{,}24587)) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$P(-0{,}173 < X < 1{,}3) \geq 0{,}89$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6

1. Parte b

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

3. Parte a. 0,088.
Parte b. 0,6242
Parte c. 0,9804.
Parte d. 0,0001.

5. Parte a. 0,36.
   Parte b. 0,9476.
   Parte c. $\mu_X = 0{,}66$, $\sigma_X^2 = 0{,}6204$, $\sigma_X = 0{,}788$

7. Parte a. 0,046.
   Parte b. 0,985.
   Parte c. $\mu_X = 40$, $\sigma_X^2 = 24$, $\sigma_X = 4{,}899$

9. Parte a. 0,2544.
   Parte b. 0,2502.

11. Parte a. 0,6852.
    Parte b. 0,9161.
    Parte c. $\mu_X = 13{,}11$, $\sigma_X^2 = 4{,}06$, $\sigma_X = 2{,}01$

13. Parte a. 0,063.
    Parte b. $\mu_X = 11{,}43$, $\sigma_X^2 = 21{,}22$, $\sigma_X = 4{,}61$

15. Parte a. 0,105.
    Parte b. $\mu_X = 4$, $\sigma_X^2 = 12$, $\sigma_X = 3{,}46$

17. Parte a. 0,463.

19. Parte a. 0,071.
    Parte b. 0,45.
    Parte c. 0,993.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 7

1 a) 0,62%
 b) 0,7492.
 c) 183 vasos
 d) 140 vasos.
3) 6,14 años.
5) 1,965 pulg.
7) 0,1562.
9) 0,5679.
11) 0,7697.
13 a) 0,0308.
 b) 0,9236
15) 0,0341.
17) 0,407.
19) 0,982.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 8

1. $534{,}54 < \mu < 545{,}46$.
3 $39{,}27 < \mu < 40{,}73$

15 a) n=76,56 días

b) n=46,74 días.

c) n=29,74 días.

7 $10{,}57 < \mu < 11{,}03$.

9 $-0{,}07 < \mu < -0{,}049$

11 a) $-1{,}94 < \mu_1 - \mu_2 < 3{,}28$.

b) $-1{,}94 < \mu_1 - \mu_2 < 3{,}282$.

13 $0{,}0215 < P < 0{,}0745$.

15 a) n=30625 días.

b) n=1154,75 días.

c) n=49,92 días.

17 $-0{,}104 < P_1 - P_2 < 0{,}012$

19 $0{,}3979 < \sigma^2 < 17{,}22$.

21 $8177{,}27 < \sigma^2 < 19652{,}13$.

23 $0{,}148 < \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3{,}862$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 9

1 Se rechaza la hipótesis nula.
3 Se rechaza la hipótesis nula.
5 Se acepta la hipótesis nula.
7 Se rechaza la hipótesis nula.
9 Se rechaza la hipótesis nula.
11 Se acepta la hipótesis nula.
13 Se acepta la hipótesis nula.
15 Se acepta la hipótesis nula.
17 Se rechaza la hipótesis nula. (Hipótesis referente a la media).
Se acepta la hipótesis nula. (Hipótesis referente a varianza).
19 Se acepta la hipótesis nula.

BIBLIOGRAFÍA

CHAO, C. (1985). *Estadística para las Ciencias Administrativas*. McGRAW-HILL.

DEVORE, J. (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros y Ciencias.* Cergage Learning Editors S.A.

FREUND, J. (2002). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros.* Reverté.

GOMEZ, F. (1993). *Estadística Metodológica*. Fragor. 1993.

JOHNSON, R. (2012). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros.* Pearson Education.

KAZMIER, L.; DIAZ A. (1991). *Estadística Aplicada a Administración y Economía.* Mc GRAW HILL.

KENNEDY, J.; NEVILLE, A. (1974). *Estadística para Ciencias e Ingeniería.* Harla.

MAISEL, L. (1973). *Probabilidad y Estadística.* Fondo Educativo Interamericano.

MENDENHALL, W.; SCHEFFER, R.; WACKERLY, D. (1986). *Estadística Matemática con Aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamericano.

MENDELHALL W. (1990). *Estadística para la Administración.* Grupo Editorial Iberoamericano.

MENDELHALL W. (2007). *Introducción a la Probabilidad y Estadística*. Cergage Learning Editors S.A.

MILLER, I.; FREUND, J.; JOHNSON, R. (1992). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros.* Prestice Hall.

PROAÑO, H. (1975). *Estadística Aplicada a la Mercadotecnia*. Diana

SCHEAFFER, R.; McCLAVE, J. (1990). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería.* Grupo Editorial Iberoamericano.

TRIOLA, M. (2007). *Probabilidad y Estadística.* Pearson Education.

VELASCO, G. (2001). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros.* I.T.P. Latín América.

WALPOLE, R.; MYERS, R. (2007). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros.* Pearson Education.