

He admirado muchas veces el sistema místico de Pitágoras y la magia secreta de los números

Sir Thomas Browne

Unidad 10

Desigualdades en una variable

Parte II

Objetivos:

Al finalizar la unidad el alumno:

- Resolverá desigualdades que incluyan a la variable en el denominador.
- Resolverá sistemas de desigualdades lineales en una variable.
- Resolverá desigualdades cuadráticas en una variable.

Introducción

En la unidad 9 estudiamos la forma de resolver una desigualdad lineal en una variable y aprendimos que es posible sumar o restar un mismo número en ambos lados de la desigualdad sin que ésta se altere. Asimismo, nos dimos cuenta que, con un poco de cuidado, también es posible multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad. Sin embargo, en todos los casos que resolvimos la variable aparecía en el numerador, o los términos cuadráticos se cancelaban. Las preguntas son inmediatas: ¿existen desigualdades con la variable en el denominador?, ¿es posible resolver desigualdades que contengan entre sus términos la variable al cuadrado?, ¿cómo se maneja una desigualdad que involucra el valor absoluto de su variable? Éstos son los tipos de planteamientos que nos haremos a lo largo de esta última unidad, en la que estudiaremos los procedimientos que se deben seguir en cada caso.

10.1. Propiedad del recíproco en desigualdades

Antes de establecer la propiedad en general, analicemos algunos ejemplos:

Ejemplos:

1. Consideremos el caso $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

Multiplicando por 5 ambos lados, obtenemos:

$$\frac{5}{4} > 1$$

Observa que al efectuar esta multiplicación el sentido de la desigualdad no se altera, y 5 ya no es un denominador.

Multiplicando por 4 ambos lados, obtenemos:

$$5 > 4$$

Ahora retomemos la desigualdad $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ y tomemos el recíproco de cada una de las fracciones. Obtenemos: 4 del lado izquierdo y 5 del derecho. Sabemos que $4 < 5$, lo que nos induce a pensar que cuando se toma el recíproco en ambos lados de una desigualdad, cambia el sentido.

Veamos otro ejemplo:

2. Consideremos la desigualdad $\frac{2}{3} \leq 5$. Aplicaremos las propiedades de las desigualdades hasta obtener el recíproco de cada término.

Multiplicando por 3 ambos lados obtenemos:

$$2 \leq 15$$

Dividiendo entre 2 ambos lados, obtenemos:

$$1 \leq \frac{15}{2}$$

Dividiendo entre 5 ambos lados, obtenemos:

$$\frac{1}{5} \leq \frac{3}{2}$$

Ahora retomemos la desigualdad $\frac{2}{3} \leq 5$ y tomemos el recíproco de cada una de las fracciones. Obtenemos: $\frac{3}{2}$ del lado izquierdo y $\frac{1}{5}$ del derecho. Sabemos que $\frac{1}{5} \leq \frac{3}{2}$. Observamos nuevamente que al tomar el recíproco en ambos lados de la desigualdad, cambia el sentido.

¿Será ésta una propiedad que se cumple en general? Veamos otro ejemplo:

3. Consideremos la desigualdad $\frac{2}{3} > \frac{5}{-4}$. Aplicaremos las propiedades de las desigualdades hasta obtener el recíproco de cada término.

Multiplicando por -4 ambos lados, obtenemos:

$$\frac{-8}{3} < 5$$

Cambia el sentido de la desigualdad

Multiplicando por 3 ambos lados, obtenemos:

$$-8 < 15$$

Dividiendo entre 5 ambos lados, obtenemos:

$$\frac{-8}{5} < 3$$

Dividiendo entre 2 ambos lados, obtenemos:

$$\frac{-4}{5} < \frac{3}{2}$$

Ahora retomemos la desigualdad $\frac{2}{3} > \frac{5}{-4}$ y tomemos el recíproco de cada una de las fracciones. Obtenemos: $\frac{3}{2}$ del lado izquierdo y $\frac{-4}{5}$ del derecho. Sabemos que $\frac{-4}{5} < \frac{3}{2}$. Observamos que en este caso nuestra conjetura no funciona, ya que si en la desigualdad $\frac{2}{3} > \frac{5}{-4}$ tomamos el recíproco de cada término y cambiamos el sentido de la desigualdad, obtenemos $\frac{3}{2} < \frac{-4}{5}$, y esto es falso, por lo tanto, no siempre debe cambiarse el sentido de la desigualdad.

Al tomar el recíproco de los términos en una desigualdad, ¿bajo qué condiciones cambia el sentido?

4. Consideremos la desigualdad $\frac{-4}{3} < \frac{5}{3}$. Si tomamos el recíproco de cada término obtenemos del lado izquierdo $\frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$ y del lado derecho $\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$. Sabemos que $-\frac{3}{4} < \frac{3}{5}$. Observamos, entonces, que en este caso tampoco se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

Propiedad del recíproco en desigualdades

Sean a, b, c y d números reales diferentes de cero.

i. Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ y ambas fracciones (términos) son positivas, entonces $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.

Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ y ambas fracciones (términos) son positivas, entonces $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$.

ii. Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ y ambas fracciones (términos) son negativas, entonces $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.

Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ y ambas fracciones (términos) son negativas, entonces $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$.

iii. Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ y una fracción (término) es positiva y la otra negativa, entonces $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$.

Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ y una fracción (término) es positiva y la otra negativa, entonces $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.

Si sustituimos $<$ por \leq y $>$ por \geq la propiedad del recíproco sigue siendo válida.

Ejemplos:

5. Aplica la propiedad del recíproco a la desigualdad $2 < \frac{7}{3}$.

La desigualdad pertenece al caso i., por lo tanto $\frac{1}{2} > \frac{3}{7}$.

6. Aplica la propiedad del recíproco a la desigualdad $-\frac{4}{9} \geq -\frac{7}{2}$.

La desigualdad pertenece al caso ii., por lo tanto $-\frac{9}{4} \leq -\frac{2}{7}$.

7. Aplica la propiedad del recíproco a la desigualdad $-\frac{2}{3} < \frac{1}{5}$.

La desigualdad pertenece al caso iii., por lo tanto $-\frac{3}{2} < 5$.

Ejercicio 1

Aplica la propiedad del recíproco a cada una de las siguientes desigualdades:

1. $12 > 5$

2. $\frac{2}{3} \geq -7$

3. $\frac{3}{5} \leq \frac{7}{4}$

4. $-4 \leq \frac{9}{7}$

5. $-\frac{3}{2} < -\frac{2}{5}$

10.2. Solución de desigualdades que involucran a la variable en el denominador

Ejemplos

8. ¿Para qué valores de x se satisface la desigualdad $\frac{1}{x} > 5$?

Observa que la variable aparece en el denominador; sin embargo, no podemos recurrir a la propiedad de multiplicación de las desigualdades ni a la propiedad del recíproco porque no sabemos si x es un número positivo o negativo. En realidad no hay forma de saberlo, por lo que nos vemos obligados a considerar dos casos. Antes de analizarlos, observa que existe una restricción para los valores de x : como x es un denominador no puede tomar el valor de 0.

Caso 1.

Supongamos que $x > 0$.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por x , obtenemos: $\left(\frac{1}{x}\right)x > 5x$

Simplificando: $1 > 5x$

Dividiendo entre 5 ambos lados de la desigualdad: $\frac{1}{5} > \frac{5x}{5}$

Simplificando: $x < \frac{1}{5}$

Por lo tanto, como primer resultado obtenemos que $x > 0$ y $x < \frac{1}{5}$, aplicando la propiedad transitiva tenemos que el intervalo de solución para el caso 1 es: $\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

Caso 2.

Supongamos que $x < 0$.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por x , obtenemos: $\left(\frac{1}{x}\right)x < 5x$

El signo de la desigualdad cambia al multiplicar por x , que en este caso es negativa.

Simplificando: $1 < 5x$

Dividiendo entre 5 ambos lados de la desigualdad: $\frac{1}{5} < \frac{5x}{5}$

Simplificando: $x > \frac{1}{5}$

Por lo tanto, como segundo resultado obtenemos que $x < 0$ y $x > \frac{1}{5}$. Pero no existe número alguno que sea al mismo tiempo menor que 0 y mayor que $\frac{1}{5}$, por lo que concluimos que el conjunto solución del caso 2 es el conjunto vacío.

Resumiendo, tenemos que la solución de la desigualdad $\frac{1}{x} > 5$ es el intervalo: $\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

9. ¿Para qué valores de x se satisface la desigualdad $\frac{3}{2x} \leq -1$?

Como x es un denominador, no puede tomar el valor de 0.

Caso 1.

Supongamos que $x > 0$.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por x , obtenemos: $\left(\frac{3}{2x}\right)x \leq (-1)x$

Simplificando: $\frac{3}{2} \leq -x$

Multiplicando por -1 ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $\left(\frac{3}{2}\right)(-1) \geq (-x)(-1)$

Simplificando: $-\frac{3}{2} \geq x$

Por lo tanto, como primer resultado obtenemos que $x > 0$ y $x \leq -\frac{3}{2}$. Pero no existe número alguno que sea al mismo tiempo mayor que 0 y menor que $-\frac{3}{2}$, por lo que concluimos que el conjunto solución de este caso es el conjunto vacío.

Caso 2.

Supongamos que $x < 0$.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por x , obtenemos: $\left(\frac{3}{2x}\right)x \geq (-1)x$
como x es negativa el signo de la desigualdad cambia.

Simplificando: $\frac{3}{2} \geq -x$

Multiplicando por -1 ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $\left(\frac{3}{2}\right)(-1) \leq (-x)(-1)$

Simplificando: $-\frac{3}{2} \leq x$

Por lo tanto, como segundo resultado obtenemos que

$$x < 0 \quad \text{y} \quad x \geq -\frac{3}{2}$$

Aplicando la propiedad transitiva tenemos que el intervalo de solución para el caso 2 es:

Resumiendo, tenemos que la solución de la desigualdad $\frac{3}{2x} \leq -1$ es el intervalo: $\left[-\frac{3}{2}, 0\right)$

10. Resuelve: $\frac{3}{2x+1} < 2$.

Como $2x + 1$ es un denominador, no puede tomar el valor de 0; es decir,
 $2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

Caso 1.

Supongamos que $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $2x + 1$, obtenemos:

$$\left(\frac{3}{2x+1}\right)(2x+1) < 2(2x+1)$$

Simplificando: $3 < 4x + 2$

Restando 2 en ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $3 - 2 < 4x + 2 - 2$

Efectuando operaciones: $1 < 4x$

Dividiendo entre 4 ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $\frac{1}{4} < \frac{4x}{4}$

Simplificando: $\frac{1}{4} < x$

Por lo tanto, como primer resultado obtenemos que:

$$x > -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{4} < x$$

es decir, queremos todos los valores de x que sean mayores que $-\frac{1}{2}$ y mayores que $\frac{1}{4}$ al mismo tiempo. Obtenemos que el intervalo de solución para el caso 1 es:

$$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Caso 2.

Supongamos que $2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $2x+1$, obtenemos:

Recuerda que cuando multiplicamos una desigualdad por una cantidad negativa el signo de la desigualdad cambia.

$$\left(\frac{3}{2x+1}\right)(2x+1) > 2(2x+1)$$

Simplificando:

$$3 > 4x + 2$$

Restando 2 en ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $3 - 2 > 4x + 2 - 2$

Efectuando operaciones:

$$1 > 4x$$

Dividiendo entre 4 ambos lados de la desigualdad:

$$\frac{1}{4} > \frac{4x}{4}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{4} > x$$

Por lo tanto, como segundo resultado obtenemos que:

$$x < -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{4} > x$$

es decir, queremos todos los valores de x que sean menores que $-\frac{1}{2}$ y menores que $\frac{1}{4}$ al mismo tiempo. Obtenemos que el intervalo de solución para el caso 2 es:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right).$$

Resumiendo, tenemos que la solución de la desigualdad

$$\frac{3}{2x+1} < 2$$

para el caso 1 es el intervalo $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ y para el caso 2 es:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$

Al ser x una variable, lo mismo puede suceder el caso 1 ó el caso 2, por lo que la solución completa de la desigualdad queda dada a través de la unión de los intervalos de solución de los dos

casos:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Verifica que la restricción no aparece en la respuesta.

11. Resuelve: $\frac{2x}{x-1} < 4$.

Como $x-1$ es un denominador, no puede tomar el valor de 0, es decir, $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Caso 1.

Supongamos que $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $x-1$, obtenemos:

$$\left(\frac{2x}{x-1}\right)(x-1) < 4(x-1)$$

Simplificando: $2x < 4x - 4$

Sumando 4 en ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $2x + 4 < 4x - 4 + 4$

Efectuando operaciones: $2x + 4 < 4x$

Restando $2x$ en ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $2x + 4 - 2x < 4x - 2x$

Efectuando operaciones: $4 < 2x$

Dividiendo entre 2 ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $\frac{4}{2} < \frac{2x}{2}$

Simplificando: $2 < x$

Por lo tanto, como primer resultado obtenemos que $x > 1$ y $2 < x$, es decir, queremos todos los valores de x que sean mayores que 1 y mayores que 2 al mismo tiempo. Obtenemos que el intervalo de solución para el caso 1 es $(2, +\infty)$.

Caso 2.

Supongamos que $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $x-1$, obtenemos:

$$\left(\frac{2x}{x-1}\right)(x-1) > 4(x-1)$$

Simplificando: $2x > 4x - 4$

Sumando 4 en ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $2x + 4 > 4x - 4 + 4$

Efectuando operaciones: $2x + 4 > 4x$

Restando $2x$ en ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $2x + 4 - 2x > 4x - 2x$

Efectuando operaciones: $4 > 2x$

Dividiendo entre 2 ambos lados de la desigualdad: $\frac{4}{2} > \frac{2x}{2}$

Simplificando: $2 > x$

Por lo tanto, como segundo resultado obtenemos que $x < 1$ y $2 > x$, es decir, queremos todos los valores de x que sean menores que 1 y menores que 2 al mismo tiempo. Obtenemos que el intervalo de solución para el caso 2 es $(-\infty, 1)$.

Resumiendo, tenemos que la solución de la desigualdad

$$\frac{2x}{x-1} < 4$$

para el caso 1 es el intervalo $(2, +\infty)$ y para el caso 2 es $(-\infty, 1)$. Al ser x una variable, lo mismo puede suceder el caso 1 ó el caso 2, por lo que la solución completa de la desigualdad queda dada a través de la unión de los intervalos de solución de los dos casos: $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Ejercicio 2

Resuelve cada una de las siguientes desigualdades:

1. $\frac{3}{x} > 2$

2. $-\frac{7}{4x} \leq -1$

3. $\frac{-3}{x-1} \leq 0$

4. $\frac{5}{3x-1} < 4$

5. $\frac{2x}{3x+5} \geq -3$

10.3. Método gráfico

Al resolver algunas de las desigualdades de la sección 10.2 habrás notado que se complicaba un poco tratar de obtener la solución completa. El método que estudiaremos a continuación está basado en la representación gráfica de los intervalos y resulta una magnífica ayuda para agilizar y simplificar los desarrollos en la resolución de desigualdades.

Para poder aplicar el método gráfico es necesario que uno de los lados de la desigualdad sea cero.

10.3.1. Solución de desigualdades que incluyan a la variable en el denominador utilizando el método gráfico

Ejemplos:

12. ¿Cómo se resuelve una desigualdad como $\frac{x+1}{x} > 0$ con el método gráfico?

Empecemos por observar que como x es un denominador $x \neq 0$

Igualando el numerador a cero, obtenemos: $x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Igualando a cero el denominador, obtenemos: $x = 0$

A los valores de x así obtenidos los llamaremos **puntos clave**.

Localizando los puntos clave en la recta numérica, obtenemos 3 regiones: A, B y C.

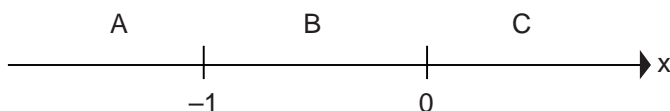


Figura 1

Tomemos un valor en cada región, la única sugerencia es que evites considerar uno de los puntos clave. Éstos se analizarán al final.

Como elemento de la región A, tomamos: -2

$$x = -2, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{x+1}{x} > 0? \quad \frac{-2+1}{-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} > 0$$

Como $x = -2$ satisface la desigualdad, entonces la región A representada por el intervalo

$(-\infty, -1)$ está incluida en la solución.

Como elemento de la región B, tomamos: $-\frac{1}{2}$

$$x = -\frac{1}{2}, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{x+1}{x} > 0? \quad \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} > 0$$

$$\Leftrightarrow -1 > 0$$

Como $x = -\frac{1}{2}$ no satisface la desigualdad, entonces la región B, representada por el intervalo $(-1, 0)$ no está incluida en la solución.

Como elemento de la región C, tomamos: 1

$$x = 1, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{x+1}{x} > 0? \qquad \frac{1+1}{1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 > 0$$

Como $x = 1$ satisface la desigualdad, entonces la región C representada por el intervalo $(0, +\infty)$ está incluida en la solución.

Resumiendo resultados tenemos que el intervalo $(-\infty, -1)$ y el intervalo $(0, +\infty)$ forman parte de la solución. Para terminar de resolver esta desigualdad sólo nos falta analizar los puntos extremos, que son puntos clave, de estas regiones.

$$\text{¿} x = -1 \text{ satisface la desigualdad } \frac{x+1}{x} > 0? \qquad \frac{-1+1}{-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 > 0$$

Como $x = -1$ no satisface la desigualdad, este valor no es parte de la solución.

El valor $x = 0$ no lo analizaremos porque es una restricción, característica que lo excluye de la solución.

Por lo tanto, la solución de la desigualdad $\frac{x+1}{x} > 0$ es $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

13. Resuelve la desigualdad $\frac{x-3}{2x-1} \leq -1$ por el método gráfico.

Como $2x - 1$ es un denominador, no puede tomar el valor de 0, es decir, $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$. Así, $x = \frac{1}{2}$ es una restricción.

$$\text{Sumando 1 en ambos lados de la desigualdad, obtenemos: } \frac{x-3}{2x-1} + 1 \leq 0$$

De esta forma obtenemos 0 en el miembro derecho de la desigualdad, lo cual es necesario para resolverla por el método gráfico.

Efectuando operaciones:

$$\frac{x-3}{2x-1} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3+2x-1}{2x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-4}{2x-1} \leq 0$$

Igualando a cero el numerador, obtenemos:

$$3x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

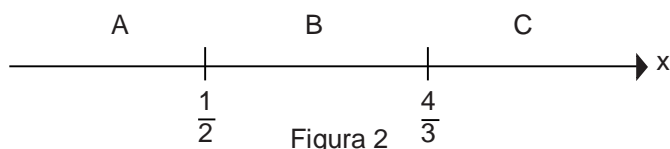
Igualando a cero el denominador, obtenemos:

$$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Los puntos clave son:

$$x=\frac{4}{3}; \quad x=\frac{1}{2}$$

Localizando los puntos clave en la recta numérica, obtenemos 3 regiones: A, B y C



Como elemento de la región A, tomamos: 0.

$$x = 0, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{x-3}{2x-1} \leq -1? \quad \frac{0-3}{2(0)-1} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq -1$$

Como $x = 0$ no satisface la desigualdad, entonces la región A representada por el intervalo

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

no está incluida en la solución.

Como elemento de la región B, tomamos: 1.

$$x = 1, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{x-3}{2x-1} \leq -1? \quad \frac{1-3}{2(1)-1} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{1} \leq -1$$

$$-2 \leq -1$$

Como $x = 1$ satisface la desigualdad, entonces la región B representada por el intervalo

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right) \text{ está incluida en la solución.}$$

Como elemento de la región C, tomamos: 2.

$$x = 2, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{x-3}{2x-1} \leq -1? \quad \frac{2-3}{2(2)-1} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq -1$$

Como $x = 2$, no satisface la desigualdad, entonces la región C representada por el intervalo

$$\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

no está incluida en la solución.

Resumiendo resultados, tenemos que el único intervalo que forma parte de la solución es:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$$

Para terminar de resolver esta desigualdad sólo nos falta analizar los puntos extremos que son puntos clave, de estas regiones.

$$\text{¿}x = \frac{4}{3}\text{ satisface la desigualdad } \frac{x-3}{2x-1} \leq -1? \quad \frac{\left(\frac{4}{3}\right)-3}{2\left(\frac{4}{3}\right)-1} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{-5}{3}\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -1$$

Como $x = \frac{4}{3}$ satisface la desigualdad, este valor es parte de la solución.

El valor $x = \frac{1}{2}$ no lo analizaremos porque es una restricción.

Por lo tanto, la solución de la desigualdad $\frac{x-3}{2x-1} \leq -1$ es $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$.

Ejercicio 3

Resuelve por el método gráfico cada una de las siguientes desigualdades

1. $\frac{2}{x-3} \geq 0$

2. $\frac{5x}{x+4} \leq 0$

3. $\frac{5}{2x-1} < 3$

4. $\frac{4x}{x-3} \geq 1$

5. $\frac{-2x+1}{x+5} \leq -2$

10.3.2. Solución de sistemas de desigualdades en una variable

Un sistema de desigualdades en una variable es un conjunto de desigualdades todas con una misma y única variable que puede representarse por x .

Ejemplos:

14. $\begin{cases} 2x-1 < 3 \\ x > 9 \\ -2x+5 \leq -2 \end{cases}$ es un sistema de tres desigualdades en la variable x .

15. $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$ es un sistema de dos desigualdades en la variable x .

16. $\begin{cases} 4x^2 - 3x + 5 < 8 \\ 7x + 3 > -5 \\ x < 0 \\ 9x^2 - 2 > -1 \end{cases}$ es un sistema de cuatro desigualdades en la variable x .

Observa que cuando resolvíamos por casos las desigualdades de los ejemplos anteriores, se generaba un sistema de dos desigualdades (lineales) en la variable x .

Por otra parte, la solución de un sistema de desigualdades en una variable consiste en encontrar todos los valores que puede tomar la variable de tal forma que satisfaga a todas y cada una de las desigualdades del sistema.

Ejemplos:

17. Resolver el sistema $\begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \end{cases}$ significa encontrar todos los valores para x tales que sean menores que -1 y menores que 2 al mismo tiempo. Obtenemos como intervalo de solución a $(-\infty, -1)$; es decir, cualquier elemento de este intervalo satisface las dos desigualdades.

Verifiquemos esta aseveración con algunos casos particulares:

Sustituyendo x por -3 en el sistema, obtenemos: $\begin{cases} -3 < -1 \\ -3 < 2 \end{cases}$

Como -3 es elemento del intervalo $(-\infty, -1)$, el sistema se satisface.

Sustituyendo x por 0 en el sistema, obtenemos: $\begin{cases} 0 < -1 \\ 0 < 2 \end{cases}$

Como 0 no es elemento del intervalo $(-\infty, -1)$, el sistema no se satisface. Es cierto que la segunda desigualdad es válida, pero como la primera es falsa se dice que el sistema no se satisface con $x = 0$.

18. Resolución del sistema $\begin{cases} x > 3 & (1) \\ x > -5 & (2) \end{cases}$

Graficando la solución de la desigualdad (1), obtenemos:

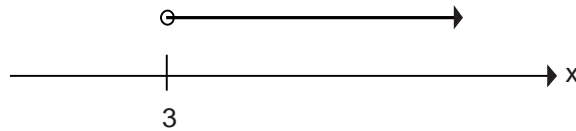


Figura 3

Graficando la solución de la desigualdad (2), obtenemos:



Figura 4

Graficando las dos soluciones en la misma recta numérica:

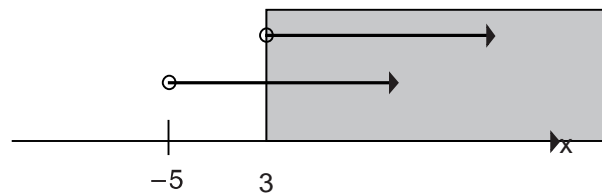


Figura 5

Como resolver un sistema significa encontrar las soluciones en común de las desigualdades que involucra, la solución queda determinada por la intersección de las dos gráficas que se muestra a través del rectángulo sombreado en la figura 5.

Intersectando las gráficas obtenemos que la solución del sistema es:

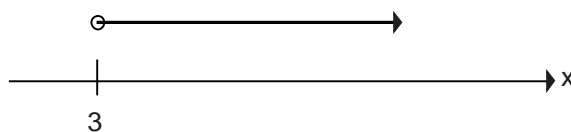


Figura 6

Por lo tanto, el intervalo de solución del sistema de desigualdades es: $(3, +\infty)$.

19. Resuelve el sistema $\begin{cases} x > 1 & (1) \\ x \leq 12 & (2) \end{cases}$

Graficando la solución de la desigualdad (1), obtenemos:

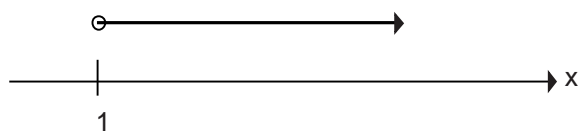


Figura 7

Graficando la solución de la desigualdad (2), obtenemos:

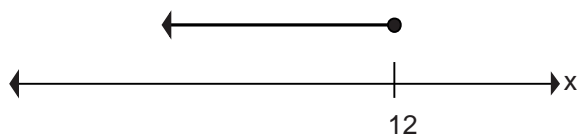


Figura 8

Graficando las dos soluciones en la misma recta numérica:

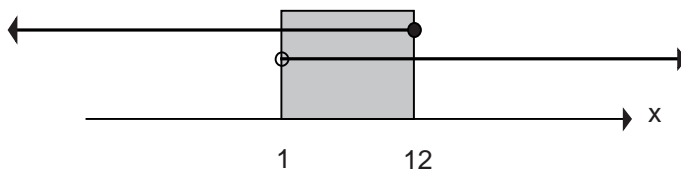


Figura 9

La solución queda determinada por la intersección de las dos gráficas que se muestra a través del rectángulo sombreado en la figura 9. Observa que 12 pertenece a la intersección, pero no el 1.

Intersectando las gráficas obtenemos que la solución del sistema es:

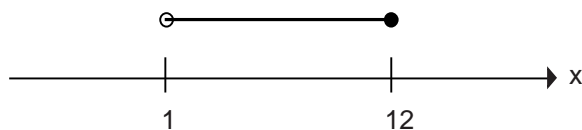


Figura 10

Por lo tanto, el intervalo de solución del sistema de desigualdades es $(1, 12]$.

20. Resuelve el sistema $\begin{cases} 2(15x-1)+5x-7(2x-3)\geq -2 & (1) \\ 3(1-3x)-5(1-x)\geq 2 & (2) \end{cases}$

Resolviendo la desigualdad (1):

Efectuando operaciones: $30x-2+5x-14x+21\geq -2$
 $\Leftrightarrow 21x+19\geq -2$

Restando 19 en ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $21x\geq -21$

Dividiendo entre 21 ambos lados de la desigualdad: $x\geq -1$

Graficando la solución de la desigualdad (1), obtenemos:

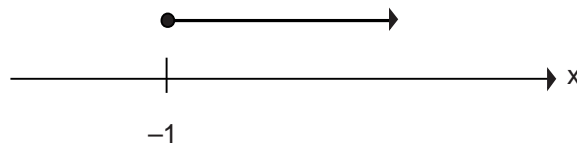


Figura 11

Resolviendo la desigualdad (2):

Efectuando operaciones: $3-9x-5+5x\geq 2$
 $\Leftrightarrow -4x-2\geq 2$

Sumando 2 en ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $-4x\geq 4$

Dividiendo entre -4 ambos lados de la desigualdad, obtenemos: $x\leq -1$

Graficando la solución de la desigualdad (2), obtenemos:

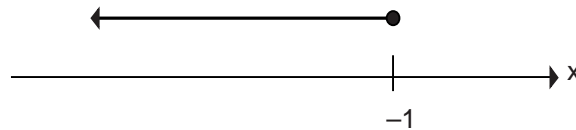


Figura 12

Graficando las dos soluciones en la misma recta numérica:

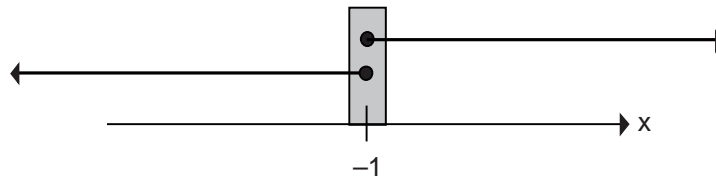


Figura 13

La solución queda determinada por la intersección de las dos gráficas que se muestra a través del rectángulo sombreado en la figura 21. Observa que el único punto en común es -1.

Intersectando las gráficas obtenemos que la solución del sistema es:

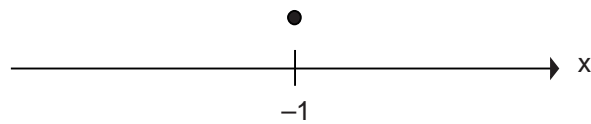


Figura 14

Por lo tanto, el intervalo de solución del sistema de desigualdades es $[-1, -1] = \{-1\}$.

Ejercicio 4

Resuelve los siguientes sistemas de desigualdades:

$$1. \begin{cases} 7x - 6 < 6x + 5 \\ x + 1 \geq -x + 11 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x + 13 > 2x + 4 \\ 5x - 6 \geq 7x - 10 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{9x + 1}{2} < 4 - x \\ 4x - 1 \geq x + 20 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 20x + 1 > x + 51 \\ 3x + 2 < 10x - 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 6x + 1 \geq 3x + 19 \\ 11x - 10 \leq 4(x + 8) \end{cases}$$

10.3.3. Desigualdades cuadráticas

La resolución de desigualdades cuadráticas está basada en el concepto de factorización en la siguiente propiedad de las desigualdades:

Propiedad de los productos

i. $ab > 0$ si y sólo si $a > 0$ y $b > 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$.

ii. $ab < 0$ si y sólo si $a > 0$ y $b < 0$ ó $a < 0$ y $b > 0$.

Si se sustituye el símbolo $>$ por \geq ó el símbolo $<$ por \leq , la propiedad de los productos sigue siendo válida.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

21. Resuelve: $x^2 - x - 12 < 0$.

Factorizando obtenemos:

$$(x-4)(x+3) < 0$$

Tenemos dos casos:

Caso 1.

$$x-4 > 0 \quad \text{y} \quad x+3 < 0$$

Caso 2.

$$x-4 < 0 \quad \text{y} \quad x+3 > 0$$

Sin embargo, como hemos visto que trabajar las desigualdades por casos puede complicar los procedimientos, optamos por aplicar el método gráfico para resolverlas.

Así, una vez que se ha factorizado, cada uno de los factores se iguala a cero para determinar los puntos clave.

Iguando a cero cada factor:

$$x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{y} \quad x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

Los puntos clave son:

$$x = 4; \quad x = -3$$

Localizando los puntos clave en la recta numérica, obtenemos 3 regiones: A, B y C

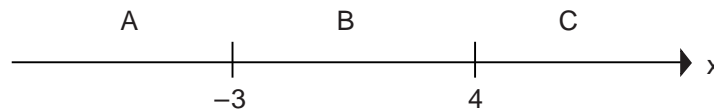


Figura 15

Como elemento de la región A, tomamos: -4 .

$x = -4$, ¿satisface la desigualdad $x^2 - x - 12 < 0$:

$$(-4)^2 - (-4) - 12 < 0$$

$$\Leftrightarrow 8 < 0$$

Como $x = -4$ no satisface la desigualdad, entonces la región A representada por el intervalo $(-\infty, -3)$ queda excluida de la solución.

Como elemento de la región B, tomamos: 0 .

$x = 0$, ¿satisface la desigualdad $x^2 - x - 12 < 0$?

$$(0)^2 - (0) - 12 < 0$$

$$\Leftrightarrow -12 < 0$$

Como $x = 0$ satisface la desigualdad, entonces la región B representada por el intervalo $(-3, 4)$ queda incluida como parte de la solución.

Como elemento de la región C, tomamos: 5.

$$x = 5, \text{ ¿satisface la desigualdad } x^2 - x - 12 < 0? \quad (5)^2 - (5) - 12 < 0$$

$$\Leftrightarrow 8 < 0$$

Como $x = 5$ no satisface la desigualdad, entonces la región C, representada por el intervalo $(4, +\infty)$ queda excluida de la solución.

Si analizamos los puntos clave, observamos que como éstos son las raíces de la ecuación, al sustituirlos en la desigualdad $x^2 - x - 12 < 0$, obtenemos $0 < 0$, por lo que concluimos que tampoco son parte de la solución.

Por lo tanto, el intervalo de solución de la desigualdad cuadrática es $(-3, 4)$.

22. Resuelve: $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16}$

Empecemos por hacer que uno de los lados de la igualdad sea igual a cero.

Restando $\frac{25}{16}$ en cada lado de la desigualdad, obtenemos: $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} \geq 0$

Efectuando operaciones: $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{25}{16} \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \geq 0$$

Multiplicando por 2 ambos lados de la desigualdad: $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$

Factorizando obtenemos: $(2x - 1)(x + 2) \geq 0$

Igualando a cero cada factor: $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

y $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Los puntos clave son: $x = \frac{1}{2}; x = -2$

Localizando los puntos clave en la recta numérica, obtenemos 3 regiones: A, B y C



Figura 16

Como elemento de la región A, tomamos -3

$$x = -3, \text{ ¿satisface la desigualdad } \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16} ? \qquad \left(-3 + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{81}{16} \geq \frac{25}{16}$$

Como $x = -3$ satisface la desigualdad, entonces la región A, representada por el intervalo $(-\infty, -2)$ queda incluida como parte de la solución.

Como elemento de la región B, tomamos: 0

$$x = 0, \text{ ¿satisface la desigualdad } \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16} ? \qquad \left(0 + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{16} \geq \frac{25}{16}$$

Como $x = 0$ no satisface la desigualdad, entonces la región B representada por el intervalo $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ queda excluida de la solución.

Como elemento de la región C, tomamos: 1

$$x = 1, \text{ ¿satisface la desigualdad } \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16} ? \qquad \left(1 + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{49}{16} \geq \frac{25}{16}$$

Como $x = 1$ satisface la desigualdad, entonces la región C representada por el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ queda incluida en la solución.

Si analizamos los puntos clave, observamos lo siguiente:

$$\text{Sustituyendo } x = -2 \text{ en } \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16} \text{ obtenemos: } \left(-2 + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16} \geq \frac{25}{16}$$

Por lo tanto -2 pertenece al conjunto solución.

$$\text{Sustituyendo } x = \frac{1}{2} \text{ en } \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16} \text{ obtenemos: } \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16} \geq \frac{25}{16}$$

Por lo tanto $\frac{1}{2}$ pertenece al conjunto solución.

En consecuencia tenemos que el conjunto solución de la desigualdad cuadrática es:

$$(-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

23. Encuentra todos los valores de x para los cuales

$$\sqrt{4x^2 + 8x + 3}$$

representa un número real.

Para que $\sqrt{4x^2 + 8x + 3}$ sea un número real es necesario que $4x^2 + 8x + 3 \geq 0$.

Factorizando obtenemos:

$$(2x+3)(2x+1) \geq 0$$

Igualando a cero cada factor:

$$2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{y } 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Los puntos clave son:

$$x = -\frac{3}{2}; x = -\frac{1}{2}$$

Localizando los puntos clave en la recta numérica, obtenemos 3 regiones: A, B y C

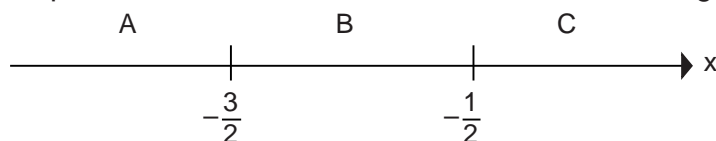


Figura 17

Como elemento de la región A, tomamos -2

$$x = -2, \text{ ¿satisface la desigualdad } 4x^2 + 8x + 3 \geq 0? \quad 4(-2)^2 + 8(-2) + 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow 3 \geq 0$$

Como $x = -2$ satisface la desigualdad, entonces la región A representada por el intervalo

$$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

queda incluida en la solución.

Como elemento de la región B, tomamos -1

$$x = -1, \text{ ¿satisface la desigualdad } 4x^2 + 8x + 3 \geq 0? \quad 4(-1)^2 + 8(-1) + 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow -1 \geq 0$$

Como $x = -1$ no satisface la desigualdad, entonces la región B, representada por el intervalo

$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

queda excluida de la solución.

Como elemento de la región C, tomamos 0

$$x = 0, \text{ ¿satisface la desigualdad } 4x^2 + 8x + 3 \geq 0? \quad 4(0)^2 + 8(0) + 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow 3 \geq 0$$

Como $x = 0$ satisface la desigualdad, entonces la región C, representada por el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ queda incluida en la solución.

Si analizamos los puntos clave, observamos que son raíces de la ecuación $4x^2 + 8x + 3 = 0$, y que al sustituirlos en la desigualdad $4x^2 + 8x + 3 \geq 0$, obtenemos $0 \geq 0$. Por lo tanto, los puntos clave pertenecen al conjunto solución de la desigualdad cuadrática.

En consecuencia, $\sqrt{4x^2 + 8x + 3} \geq 0$ representa un número real cuando x es elemento de

$$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Ejercicio 5

Resuelve:

1. $5x^2 \geq -3$

2. $x^2 + 3x - 4 < 0$

3. $(x + 7)x - 4 > -16$

4. $x(x + 2) \geq 4(x + 2)$

5. ¿Para qué valores de x , $\sqrt{x^2 - 9x + 20}$ representa un número real?

Ejercicios resueltos

1. Aplica la propiedad del recíproco a cada una de las siguientes desigualdades:

a) $-25 < -1$

b) $-\frac{2}{3} \leq \frac{5}{4}$

a) La propiedad del recíproco asegura que $-25 < -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{25} > -1$.

b) La propiedad del recíproco asegura que $-\frac{2}{5} \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{4}{5}$.

2. Resuelve: $\frac{-12}{x} > 5$

x denominador, implica que: $x \neq 0$

Caso 1.

$x > 0$

Multiplicando por x en ambos lados de la desigualdad: $-2 > 5x$

Dividiendo entre 5 ambos lados de la desigualdad: $x < -\frac{2}{5}$

Por lo tanto, el conjunto de solución para el caso 1 es el conjunto vacío, ya que no existen

valores para x que sean al mismo tiempo mayores que cero y menores que $-\frac{2}{5}$.

Caso 2.

$x < 0$

Multiplicando por x en ambos lados de la desigualdad: $-2 < 5x$

Dividiendo entre 5 ambos lados de la desigualdad: $x > -\frac{2}{5}$

Por lo tanto, aplicando la propiedad transitiva obtenemos que el intervalo de solución para

el caso 2 es $\left(-\frac{2}{5}, 0\right)$.

En consecuencia, la solución de $\frac{-2}{x} > 5$ es $\left(-\frac{2}{5}, 0\right)$.

3. $\frac{1}{2x+1} < 2$

$2x+1$ denominador, implica que: $x \neq -\frac{1}{2}$.

Caso 1.

$$2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

Multiplicando por $2x + 1$ en ambos lados de la desigualdad:

$$1 < 4x + 2$$

Restando 2 en ambos lados de la desigualdad:

$$-1 < 4x$$

Dividiendo entre 4 ambos lados de la desigualdad:

$$x > -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, el intervalo de solución para el caso 1 es

$$\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

Caso 2.

$$2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Multiplicando por $2x + 1$ en ambos lados de la desigualdad:

$$1 > 4x + 2$$

Restando 2 en ambos lados de la desigualdad:

$$-1 > 4x$$

Dividiendo entre 4 ambos lados de la desigualdad:

$$x < -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, el intervalo de solución para el caso 2 es

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$

En consecuencia, la solución de $\frac{1}{2x+1} < 2$ es

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

4. Resuelve por el método gráfico $\frac{2x}{3x-5} \geq 3$.

$3x - 5$ denominador, implica que: $x \neq \frac{5}{3}$.

Restando 3 en ambos lados de la desigualdad:

$$\frac{-7x+15}{3x-5} \geq 0$$

Igualando a cero el numerador y el denominador obtenemos los punto clave que son:

$$x = \frac{15}{7}; x = \frac{5}{3}$$

Graficando obtenemos 3 regiones A, B y C :

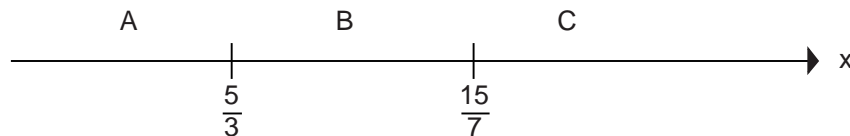


Figura 18

Como elemento de la región A, tomamos 0

$x = 0$, ¿satisface la desigualdad $\frac{2x}{3x-5} \geq 3$? $0 \geq 3$

Por lo tanto, $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ no forma parte de la solución.

Como elemento de la región B, tomamos: 2.

$$x = 2, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{2x}{3x-5} \geq 3? \qquad 4 \geq 3$$

Por lo tanto, $\left(\frac{5}{3}, \frac{15}{7}\right)$ forma parte de la solución.

Como elemento de la región C, tomamos: 3.

$$x = 3, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{2x}{3x-5} \geq 3? \qquad \frac{3}{2} \geq 3$$

Por lo tanto, $\left(\frac{15}{7}, +\infty\right)$ no forma parte de la solución.

Analizando los puntos clave:

$$\text{Sustituyendo } x \text{ por } \frac{15}{7} \text{ obtenemos:} \qquad 3 \geq 3$$

Por lo tanto, $\frac{15}{7}$ forma parte de la solución.

$x = \frac{5}{3}$ queda descartada por ser una restricción.

En consecuencia, la solución de $\frac{2x}{3x-5} \geq 3$ es $\left[\frac{5}{3}, \frac{15}{7}\right]$.

5. Resuelve por el método gráfico $\frac{-x+1}{x-3} < 1$.

$x - 3$ denominador implica que: $x \neq 3$.

Restando 1 en ambos lados de la desigualdad:

$$\begin{aligned} \frac{-x+1}{x-3} - 1 &< 0 \\ \frac{-x+1-(x-3)}{x-3} &< 0 \\ \frac{-2x+4}{x-3} &< 0 \end{aligned}$$

Igualando a cero el numerador y el denominador obtenemos los punto clave que son:

$$x = 2; x = 3$$

Graficando obtenemos 3 regiones A, B y C :

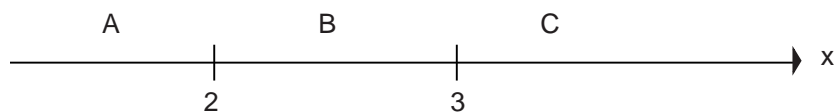


Figura 19

Como elemento de la región A, tomamos: 0

$$x = 0, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{-x+1}{x-3} < 1? \quad -\frac{1}{3} < 1$$

Por lo tanto, $(-\infty, 2)$ forma parte de la solución.

Como elemento de la región B, tomamos: 2.5

$$x = 2.5, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{-x+1}{x-3} < 1? \quad 3 < 1$$

Por lo tanto, $(2, 3)$ no forma parte de la solución.

Como elemento de la región C, tomamos: 4

$$x = 4, \text{ ¿satisface la desigualdad } \frac{-x+1}{x-3} < 1? \quad -3 < 1$$

Por lo tanto, $(3, +\infty)$ forma parte de la solución.

Analizando los puntos clave:

$$\text{Sustituyendo } x \text{ por } 2 \text{ obtenemos:} \quad 1 < 1$$

Por lo tanto, 2 no forma parte de la solución.

$x = 3$, queda descartada por ser una restricción.

En consecuencia, la solución de $\frac{-x+1}{x-3} < 1$ es: $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

6. Resuelve el sistema
$$\begin{cases} 2x-5 \geq -3 & (1) \\ 4x-7 < -2 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo la desigualdad (1):

$$\text{Sumando 5 en ambos lados de la desigualdad, obtenemos:} \quad 2x \geq 2$$

$$\text{Dividiendo entre 2 ambos lados de la desigualdad:} \quad x \geq 1$$

Graficando la solución de la desigualdad (1), obtenemos:

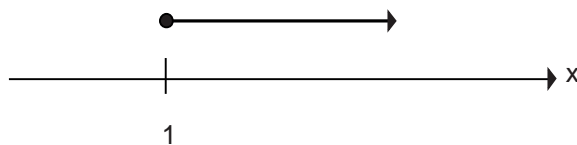


Figura 20

Resolviendo la desigualdad (2):

$$\text{Sumando 7 en ambos lados de la desigualdad, obtenemos:} \quad 4x < 5$$

$$\text{Dividiendo entre 4 ambos lados de la desigualdad:} \quad x < \frac{5}{4}$$

Graficando la solución de la desigualdad (2), obtenemos:

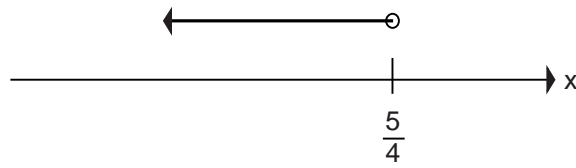


Figura 21

Graficando las dos soluciones en la misma recta numérica:

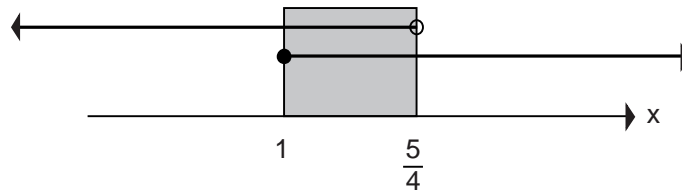


Figura 22

La solución queda determinada por la intersección de las dos gráficas que se muestra a través del rectángulo sombreado en la figura 22. Observa que 1 pertenece a la intersección.

Intersectando las gráficas obtenemos que la solución del sistema es:

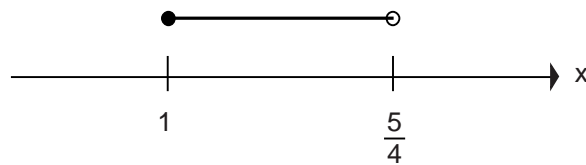


Figura 23

Por lo tanto, el intervalo de solución del sistema de desigualdades es: $\left[1, \frac{5}{4}\right)$

7. Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x-1 \geq 2 & (1) \\ 2x > x-3 & (2) \end{cases}$

Resolviendo la desigualdad (1), obtenemos: $x \geq 1$.

Graficando la solución de la desigualdad (1), obtenemos:

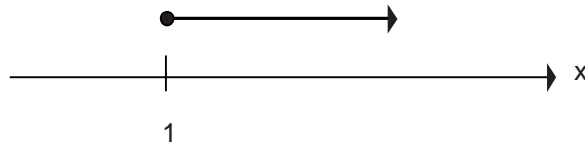


Figura 24

Resolviendo la desigualdad (2), obtenemos: $x > -3$.

Graficando la solución de la desigualdad (2), obtenemos:

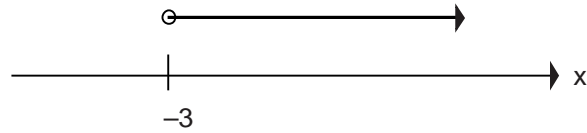


Figura 25

Graficando las dos soluciones en la misma recta numérica:

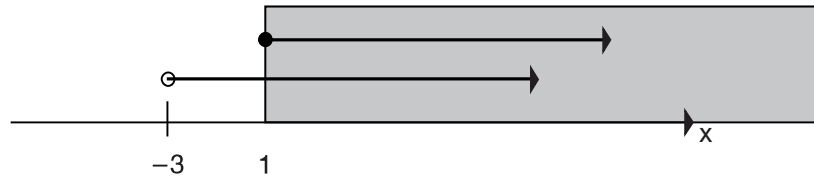


Figura 26

Como resolver un sistema significa encontrar las soluciones en común de las desigualdades que involucra, la solución queda determinada por la intersección de las dos gráficas que se muestra a través del rectángulo sombreado en la figura 26. Observa que 1 pertenece a la intersección.

Intersectando las gráficas obtenemos que la solución del sistema es:

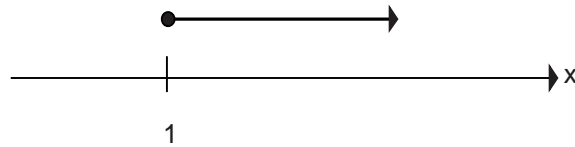


Figura 27

Por lo tanto, el intervalo de solución del sistema de desigualdades es $[1, +\infty)$.

8. Determina si el conjunto $A = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{3} \right\}$ es un subconjunto del conjunto solución del sistema

$$\text{de desigualdades } \begin{cases} \frac{2}{x} - 3 > 0 \\ x - \frac{1}{2} < \frac{1}{x} \\ 2x - 5 < -1 \end{cases}$$

Sustituyendo x por $\frac{1}{5}$ en el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{10}{5} - 3 > 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{2} < 5 \\ \frac{2}{5} - 5 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 > 0 \\ -\frac{3}{10} < 5 \\ -\frac{23}{5} < -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\frac{1}{5}$ pertenece al conjunto solución.

Sustituyendo x por $\frac{2}{3}$ en el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} 3-3 > 0 \\ \frac{2}{3}-\frac{1}{2} < \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3}-5 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > 0 \\ \frac{1}{6} < \frac{3}{2} \\ -\frac{11}{3} < -1 \end{cases}$$

Como $\frac{2}{3}$ no satisface la primera desigualdad, este valor no pertenece al conjunto solución. Por

lo tanto, $A = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{3} \right\}$ no es un subconjunto del conjunto solución del sistema de desigualdades.

9. Resuelve $4x^2 - 12x + 9 > 0$

Factorizando: $(2x - 3)(2x - 3) > 0$

Como los factores son iguales, sólo igualamos a cero uno de ellos: $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

El único punto clave es: $x = \frac{3}{2}$.

Graficando el punto clave obtenemos 2 regiones A y B:

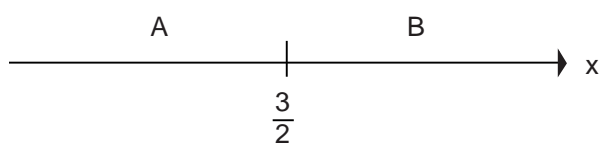


Figura 28

Como elemento de la región A, tomamos: 0

$x = 0$, ¿satisface la desigualdad $4x^2 - 12x + 9 > 0$? $9 > 0$

Como $x = 0$ satisface la desigualdad, entonces la región A representada por el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ queda incluida en la solución.

Como elemento de la región B, tomamos: 2

$x = 2$, ¿satisface la desigualdad $4x^2 - 12x + 9 > 0$? $1 > 0$

Como $x = 2$ satisface la desigualdad, entonces la región B representada por el intervalo $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ queda incluida en la solución.

Por último, analicemos el punto clave. Sustituyendo x por $\frac{3}{2}$ en la desigualdad, obtenemos $0 > 0$. Por lo tanto, $\frac{3}{2}$ no pertenece al conjunto solución.

En consecuencia, la solución de la desigualdad $4x^2 - 12x + 9 > 0$ es $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Gráficamente se representa como:

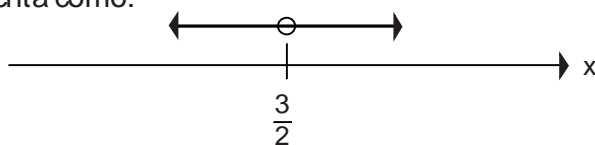


Figura 29

Ejercicios propuestos

1. Aplica la propiedad del recíproco a cada una de las siguientes desigualdades:

a) $5 > -\frac{1}{7}$

b) $-\frac{4}{3} \leq \frac{5}{7}$

2. Resuelve: $-\frac{5}{x} > -7$, sin aplicar el método gráfico.

3. Resuelve: $\frac{11}{5x-6} < -1$, sin aplicar el método gráfico.

4. Resuelve por el método gráfico: $\frac{-5x}{3x+1} > 7$.

5. Resuelve por el método gráfico: $\frac{4x-5}{2x-3} \leq -1$.

6. Resuelve el sistema:
$$\begin{cases} x+4 \leq -3 \\ 3x+11 \geq -1 \end{cases}$$

7. Resuelve el sistema:
$$\begin{cases} 3(4x-1) \geq 3(1+3x) + x \\ 7-4x > 5(x-10) + 3(x-1) \end{cases}$$

8. Determina si el conjunto $A = \{-2, 5\}$ es un subconjunto del conjunto solución del sistema de

desigualdades:
$$\begin{cases} 4x - \frac{4}{3} < -\frac{8}{x} \\ 2x + 3 < -5 \end{cases}$$

9. Resuelve: $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} < \frac{8}{x^2-1}$

10. Resuelve: $\frac{-21x^2 - 18x + 3}{3x+1} \leq -14x + 2$

Autoevaluación

1. Resuelve: $-9 \geq \frac{7}{-x}$

a) $\left(-\frac{7}{9}, 0\right)$

b) $\left(-\infty, \frac{9}{7}\right]$

c) $\left(\frac{7}{9}, +\infty\right)$

d) $\left(0, \frac{7}{9}\right]$

e) $\left[-\frac{7}{9}, \frac{9}{7}\right]$

2. Resuelve: $\frac{4}{6x-7} < -\frac{3}{4}$

a) $\left[-\frac{18}{5}, \frac{6}{7}\right)$

b) $\left(-\infty, \frac{5}{18}\right)$

c) $\left(\frac{7}{6}, +\infty\right)$

d) $\left(\frac{5}{18}, \frac{7}{6}\right)$

e) $\left(-\infty, \frac{5}{18}\right) \cup \left(\frac{7}{6}, +\infty\right)$

3. Resuelve:
$$\begin{cases} 2x-1 > 4-5x \\ x+3 < \frac{5}{2}x \end{cases}$$

a) $(-\infty, -2)$

b) $(0, 2)$

c) $(2, 10)$

d) $(2, +\infty)$

e) $(-2, +\infty)$

4. Resuelve: $9x(2x - 1) + 4 \leq 9$

a) $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$

b) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$

c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]$

d) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]$

e) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$

Respuestas a los ejercicios

Ej. 1

1. $\frac{1}{12} < \frac{1}{5}$

2. $\frac{3}{2} \geq -\frac{1}{7}$

3. $\frac{5}{3} \geq \frac{4}{7}$

4. $-\frac{1}{4} \leq \frac{7}{9}$

5. $-\frac{2}{3} > -\frac{5}{2}$

Ej. 2

1. $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

2. $\left[0, \frac{7}{4}\right]$

3. $(1, +\infty)$

4. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

5. $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup \left[-\frac{15}{11}, +\infty\right)$

Ej. 3

1. $(3, +\infty)$

2. $(-4, 0]$

3. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

4. $(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$

5. $(-\infty, -5)$

Ej. 4

1. $[5, 11)$

2. $(-3, 2]$

3. \emptyset

4. $\left(\frac{50}{19}, +\infty\right)$

5. $\{6\}$

Ej. 5

1. Todos los números reales.

2. $(-4, 1)$

3. $(-\infty, -4) \cup (-3, +\infty)$

4. $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$

5. $(-\infty, 4] \cup [5, +\infty)$

Ejercicios propuestos

1. a) $\frac{1}{5} > -7$ b) $-\frac{3}{4} \leq \frac{7}{5}$

2. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{5}{7}, +\infty\right)$

3. $\left(-1, \frac{6}{5}\right)$

4. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{26}\right)$

5. $\left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$

6. \emptyset

7. $[3, 5)$

8. No.

9. $(-5, -1) \cup (1, 2)$

10. $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right]$

Autoevaluación

1. d)

2. d)

3. d)

4. d)

5. d)

Bibliografía

Bibliografía básica

- Baldor, Aurelio, *Álgebra*, Cultural Centroamericana Ediciones y Distribuciones Códice, Madrid, 1980.
- Lehmann, Charles H., *Álgebra*, Limusa, México, 1981.

Bibliografía complementaria

- Spiegel, Murray, *Álgebra superior*, McGraw-Hill, México, 1988. Serie de compendios Schaum.
- Gobran, Alfonse, *Álgebra elemental*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.
- Barnett, Raymond A., *Álgebra y trigonometría*, McGraw-Hill, México, 1984.
- Phillips, Butts y Shaughnessy, *Álgebra con aplicaciones*, Harla, México, 1995.