Unidad 5

Aplicaciones de las derivadas

Objetivos

Al terminar la unidad, el alumno:

- Resolverá problemas de ingreso utilizando el ingreso marginal.
- Resolverá problemas de costos utilizando el costo marginal y el costo medio marginal.
- Resolverá problemas de utilidad con la utilidad marginal.
- Determinará la elasticidad de la demanda de un producto dado.

Introducción

Después de haber presentado en las unidades anteriores diversos acercamientos al cálculo diferencial, se sabe que éste es un instrumento importante para resolver problemas en economía y administración. Desde esta perspectiva, en la presente unidad se abordan diversas aplicaciones de la derivada en relación con problemas de estas disciplinas, aplicaciones que hacen uso de conceptos como ingreso, costo y utilidad.

Las aplicaciones se abordan desde el análisis marginal, el cual hace referencia al estudio de la razón de cambio de cantidades económicas. Plantear la razón de cambio indica que se hace uso de la derivada. En el ámbito de las aplicaciones que aquí se estudian, la derivada permite aproximar el cambio producido en una variable dependiente, cuando la variable independiente se incrementa en una unidad.

Para complementar el panorama de las aplicaciones de la derivada, se presenta el concepto de elasticidad, que es de importancia en la teoría económica por sus contribuciones para abordar problemas de demanda, oferta y productividad. De forma particular se aborda la elasticidad de la demanda. Este acercamiento incluye la presentación del promedio porcentual y una clasificación de los niveles de elasticidad.

5.1. Ingreso marginal

El concepto de *ingreso marginal* plantea la manera como se afectan los ingresos por cada nueva unidad que se produce y se vende. Esto es, si se asigna la expresión $I(x)$ a los ingresos que se obtienen al vender x número de artículos, lo que muestra el *ingreso marginal* es el ingreso que se obtiene al vender el artículo $x + 1$.

Para conocer el ingreso que se obtiene en la venta de la unidad $x + 1$ se resuelve la siguiente resta:

$$I(x+1) - I(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Lo que se tiene en la expresión anterior son los ingresos de la venta de x artículos incrementada en 1, menos los ingresos de venta de x artículos.

Como caso particular, si se considera el incremento de unidades de artículos de la forma $\Delta x = 1$, entonces el incremento del ingreso ΔI se puede representar como:

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = I(x+1) - I(x)$$

La expresión presentada por la diferencia que se da en **(1)** corresponde a *la razón de cambio de los ingresos cuando se aumenta la producción en una unidad*. En otras palabras, lo que se está diciendo con respecto a la relación entre el ingreso y las unidades de artículos es que:

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = I(x+1) - I(x)$$

La expresión anterior indica la razón entre el incremento del ingreso ΔI con respecto al incremento de Δx y es igual a la diferencia entre el ingreso que produce el aumento **de una unidad** y el ingreso de la unidad x.

Ahora bien, se tiene que la derivada del ingreso $I'(x)$ es el límite de la razón $\frac{\Delta I}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero. Este resultado lo que permite es utilizar la derivada de la función ingreso como una *aproximación del ingreso de producir y vender la unidad* $x+1$.

De forma simbólica se tiene:

$$I'(x) \approx I(x+1) - I(x) \qquad \textbf{(2)}$$

El símbolo $\approx$ indica que son aproximadamente iguales, la derivada de la función ingreso y la diferencia entre el ingreso que produce la unidad x más 1 y el ingreso de la unidad x.

Ahora, con los elementos antes señalados se presenta la definición del *ingreso marginal*:

La función de ingreso marginal es la derivada de la función ingreso $I'(x)$.
El valor que se obtiene de esta derivada es una aproximación del ingreso verdadero cuando se vende una unidad más de cierto producto o servicio.

La definición muestra que el resultado al calcular la derivada de la función ingreso no es un valor exacto, sino una aproximación. Como es una aproximación, nos preguntamos qué tan cercana está al valor exacto. Para tal fin se presenta el siguiente apartado en el que se discute sobre los errores de aproximación que se generan al calcular el ingreso marginal.

Análisis del error de aproximación al ingreso exacto al calcular el ingreso marginal

La exactitud de la aproximación que se da al calcular la derivada de la función ingreso, va a depender de la función y del valor de x. En la determinación de la exactitud de la aproximación se tienen dos tipos de errores:

Error absoluto. Es el valor absoluto de la diferencia entre el ingreso exacto $I(x+1) - I(x)$ y el ingreso aproximado $I'(x)$ que se produce por la unidad incrementada. De forma simbólica, la siguiente resta muestra cómo calcular este error:

$$\left| \left[I(x+1) - I(x) \right] - I'(x) \right|$$

Error relativo. Se refiere al porcentaje que representa el error absoluto respecto al valor verdadero. Se calcula mediante la expresión:

$$Error \quad relativo = \frac{Error \quad absoluto}{Valor \quad verdadero} 100\% \qquad \textbf{(3)}$$

El error absoluto es constante, sin importar la posición que ocupe la nueva unidad. Esta característica del error absoluto hace que el error relativo sea cada vez más pequeño entre mayor sea la posición que ocupe la unidad nueva que se produzca.

De manera general, se considera que el error relativo que se obtiene al aproximar el ingreso a través del ingreso marginal es mucho más pequeño, y se hace menor a medida que se tienen producciones mayores.

Ejemplo 1

El ingreso total mensual de un pequeño industrial está representado por $I(x) = 3\,200x - 0.6x^2$ pesos, cuando produce y vende x unidades mensuales. Actualmente el industrial produce 100 unidades al mes y planea incrementar la producción mensual en 1 unidad.

a) Utilicemos la función de ingreso marginal para estimar el ingreso que generará la producción y venta de la unidad 101.
b) Utilicemos la función ingreso para calcular exactamente el ingreso que genera la producción y venta de la unidad 101.

c) Calculemos el error absoluto y el error relativo que se produce con la aproximación dada por el ingreso marginal.
d) Realicemos un análisis de los resultados obtenidos.

Solución: a) para calcular el ingreso adicional que genera la producción y venta de la unidad 101, hacemos uso de la parte izquierda de la expresión **(2)**, es decir, calculamos la derivada de la función ingreso, que es:

$$I'(x) = 3\,200 - 1.2x$$

Para conocer el caso particular de la unidad 100, evaluamos la derivada de la función en $x = 100$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} I'(100) &= 3\,200 - 1.2(100) \\ &= 3\,200 - 120 = \$3\,080 \end{aligned}$$

Este resultado es una aproximación al ingreso que se genera al producir y vender la unidad 101.

b) El ingreso exacto que se produce por la unidad $x + 1$ lo obtenemos usando la expresión **(1)**:

$$\begin{aligned} I(x+1) - I(x) &= 3\,200\,(x+1) - 0.6(x+1)^2 - (3\,200x - 0.6x^2) \\ &= \cancel{3\,200x} + 3\,200 - 0.6(x+1)^2 - \cancel{3\,200x} + 0.6x^2 \\ &= 3\,200 - 0.6\left[(x+1)^2 - x^2\right] \\ &= 3\,200 - 0.6\left[\cancel{x^2} + 2x + 1 - \cancel{x^2}\right] \\ &= 3\,200 - 0.6\,(2x+1) \\ &= 3\,200 - 1.2x - 0.6 \\ &= 3\,199.4 - 1.2x \end{aligned}$$

Con el procedimiento anterior se determina una expresión, la cual señala el resultado de la diferencia del ingreso de la unidad $x + 1$ y la unidad x. Ahora bien, el propósito es calcular el caso del ingreso cuando se produce y vende la unidad 101. Entonces lo que hacemos es sustituir x por 100 en la expresión encontrada:

$$I(101) - I(100) = I(x+1) - I(x)$$
$$= 3\,199.4 - 1.2x$$
$$= 3\,199.4 - 1.2(100) = \$3\,079.4$$

c) El error absoluto se obtiene con la diferencia entre los resultados obtenidos en b) y a), es decir:

$$|\,3\,079.4 - 3\,080\,| = |-0.60| = 0.60$$

Para obtener el error relativo se sustituyen los valores que ya tenemos en la igualdad **(3):**

$$Error \quad relativo = \frac{0.6}{3\,079.4} 100\% = 0.019\%$$

d) Al observar las expresiones de los apartados a), b) y c) se tiene que el error absoluto cometido es constante, $0.60, sin importar la posición que ocupe la nueva unidad producida.

Otra expresión de la función ingreso

Como el interés de este apartado es estudiar las aplicaciones con respecto a la función de ingreso, se presenta otra forma de expresarla, lo que permite ver mejor el objeto de estudio que se está abordando. En este caso la función de ingreso se relaciona con la función demanda de la siguiente forma:

$$I(x) = xp$$

donde p es el precio de venta unitario por artículo y x el número de artículos vendidos. El precio de venta unitario p se relaciona con la cantidad x demandada del artículo.

Ejemplo 2

En una fábrica de calculadoras digitales la relación del precio unitario p en pesos y la cantidad de la demanda x de la calculadora Tk-85 está dada mediante la ecuación:

$$p = 650 - 0.03x \qquad 0 \leq x \leq 25\,000$$

a) ¿Cuál es la función de ingreso?
b) ¿Cuál es la función del ingreso marginal?
c) Utilicemos la función de ingreso marginal para estimar el ingreso adicional que generará la producción y venta de la unidad 9 001.
d) Utilicemos la función ingreso para calcular exactamente el ingreso que genera la producción y venta de la unidad 9 001.

Solución: a) La función del ingreso la podemos obtener de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I(x) &= xp \\ &= x(650 - 0.03x) \\ &= 650x - 0.03x^2 \qquad 0 \leq x \leq 25\,000 \end{aligned}$$

b) La función de ingreso marginal está dada por la derivada de la función del ingreso:

$$I'(x) = 650 - 0.06x$$

c) Una aproximación al ingreso generado al producir y vender la unidad 9 001 se obtiene al calcular el ingreso marginal en 9 000:

$$I'(9\,000) = 650 - 0.06\,(9\,000) = 110$$

Este resultado muestra el ingreso obtenido por la venta de la unidad 9 001, que es aproximadamente de \$110.

d) El ingreso exacto que se obtiene al producir y vender la unidad 9 001 se determina al realizar la siguiente diferencia:

$$
\begin{aligned}
I(x+1)-I(x) &= I(9\,001)-I(9\,000)\\
&= 650(9\,001)-0.03(9\,001)^2-\left[650(9\,000)-0.03(9\,000)^2\right]\\
&= 650-540.03=109.97
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1

1. En una fábrica se determinó que el ingreso está dado por $I(x) = 2\,300x - 0.8x^2$ pesos, cuando se vende x unidades de un cierto artículo al mes. Actualmente se producen 175 unidades y se planea incrementar la producción en 1 unidad.

a) ¿Cuál es el ingreso marginal al producir la unidad 176?
b) ¿Qué ingreso real adicional generará la venta de la unidad 176?
c) Calcula el error relativo que se produce con la aproximación dada por el ingreso marginal.

2. El ingreso de una pequeña empresa está dado por $I(x) = 4\,400x + 24x^2 + 920$ pesos, cuando se producen x unidades mensuales. Para este tiempo se producen 185 unidades y se proyecta un incremento de la producción en 1 unidad.

a) Calcula la función de ingreso marginal.
b) Utiliza la función de ingreso marginal para determinar el ingreso que se obtendrá al vender la unidad 186.
c) Halla el ingreso real que se obtendrá con la venta de la unidad 186.
d) Calcula el error relativo al realizar la aproximación al ingreso marginal.

3. El ingreso total de una pequeña fábrica de estantes está dado por $I(x) = 480x - 0.1x^2$ pesos, cuando producen x unidades durante un mes. Actualmente se producen 160 unidades al mes y se planea aumentar la producción mensual en 1 unidad. Calcula, utilizando el análisis marginal, el ingreso adicional que genera la producción y venta de la unidad 161.

4. En el departamento de artículos de sonido de una tienda se tiene que el ingreso total por las grabadoras que se venden mensualmente es de $I(x) = -0.04x^2 + 500x$ pesos, donde x es el número de grabadoras vendidas. Actualmente se venden 1 999 unidades y se planea incrementar la producción y venta en 1 unidad cada semana.

a) Calcula la función de ingreso marginal.
b) Utiliza la función de ingreso marginal para determinar el ingreso obtenido de la venta de la unidad 2 000.
c) Halla el ingreso real de la venta de la unidad 2 000.
d) Calcula el error absoluto y relativo que se produce con la aproximación dada por el ingreso marginal.

5. Si la función ingreso total de una empresa está dada por $I(x) = 15x - 0.01x^2$ pesos, donde x es el número de artículos vendidos.

a) Determina el ingreso marginal en $x = 200$, $x = 500$, $x = 750$, $x = 950$ y $x = 1\,350$.
b) Analiza los resultados del ingreso marginal encontrados antes.

6. Una compañía de transporte terrestre tiene un ingreso mensual de $I(x) = 10\,000x - 125x^2$ pesos, cuando el precio por pasajero es x pesos.

a) Determina la función de ingreso marginal.
b) Calcula el ingreso marginal en $x = 38$, $x = 40$ y $x = 42$.
c) Interpreta los resultados.

En los ejercicios 7 a 9, dada la ecuación de demanda:

a) Determina la función de ingreso marginal.
b) Utiliza la función de ingreso marginal para calcular el ingreso obtenido en la venta de la unidad señalada.
c) Calcula el ingreso real obtenido en la venta de la unidad señalada.

Donde x es el número de unidades y p precio:

7. La ecuación de demanda es $x + 25p = 1\,600$ en la unidad 65.

8. La ecuación de demanda es $200p - 2\,000 + x = 0$ en la unidad 300.

9. La ecuación de demanda es $x + 70p = 1\,400$ en la unidad 6.

10. El departamento de promoción y desarrollo de una compañía de artículos para el hogar desarrolla un programa de comercialización de refrigeradores, y se determinó que su demanda es de:

$$p = -0.05x + 900 \qquad 0 \leq x \leq 20\,000$$

donde p denota el precio unitario del refrigerador en pesos y x la cantidad de demanda.

a) ¿Cuál es la función de ingreso?
b) ¿Cuál es la función de ingreso marginal?
c) Calcula el ingreso marginal cuando $x = 7\,500$.

11. Una joyería realizó un estudio sobre relojes y determinó que su demanda mensual está relacionada con el precio unitario de los relojes por medio de la ecuación:

$$p = \frac{60}{0.01x^2 + 1} \qquad 0 \leq x \leq 20$$

p se mide en pesos y x en unidades de millar.

a) Determina la función de ingreso.
b) Halla la función de ingreso marginal y calcula el ingreso marginal cuando $x = 2$.

12. La relación entre el precio unitario p en pesos y la cantidad de la demanda x de los televisores *Arowns* está dada mediante la ecuación:

$$p = 0.03x + 380 \qquad 0 \leq x \leq 20\,000$$

a) Determina la función ingreso.
b) Determina la función de ingreso marginal.
c) Utiliza la función de ingreso marginal para calcular el ingreso obtenido de la venta de la unidad 8 001.
d) Analiza el ingreso real obtenido por la venta de la unidad 8 001.

5.2. Costo marginal

El cálculo de las utilidades de una actividad productiva requiere, además de los ingresos, los costos de producción, razón por la cual es de interés abordar el *costo marginal*.

Al igual que en el ingreso marginal, si la producción se incrementa en una unidad, entonces el incremento de x es $\Delta x = 1$, así se tiene que:

$$\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x) = C(x + 1) - C(x)$$

Es decir, el costo marginal $C'(x)$ es una aproximación al costo de producir la unidad $x+1$, esto es:

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x) \qquad \textbf{(4)}$$

Con los planteamientos anteriores, el costo marginal se define de la siguiente manera:

> La **función de costo marginal** es la derivada de la función de costo: $C'(x)$.
>
> El valor que se obtiene al calcular la derivada de la función costo es una aproximación al costo verdadero cuando se produce una unidad más de cierto producto.

La afirmación anterior señala que si se desea conocer el costo que genera producir x unidades de un artículo más 1 unidad, la manera de estimar el costo de este proceso es haciendo uso de la derivada. Si bien el resultado no es un valor exacto, corresponde a una aproximación muy cercana.

Ejemplo 3

El costo total, en pesos, para producir x metros de cierta tela es:

$$C(x) = 30\,000 + 20x + 0.1x^2 + 0.002x^3$$

a) Encontremos la función de costo marginal.
b) Calculemos $C'(100)$ y analicemos su significado.
c) Comparemos $C'(100)$ con el costo de fabricación del 101- ésimo metros.
d) Calcula el error absoluto y relativo que se cometen en la aproximación que da el costo marginal.

Solución: a) Tenemos que la función de costo marginal es la derivada de la función costo, entonces:

$$C'(x) = 20 + 0.2x + 0.006x^2$$

b) El costo marginal en 100 lo determinamos al evaluar la derivada de la función costo en $x = 100$, por lo que obtenemos la siguiente expresión:

$$C'(100) = 20 + 0.2(100) + 0.006(100)^2 = 100$$

Este resultado es una aproximación del costo de producir el 101-ésimo metro de tela.

c) El costo real de fabricación del 101-ésimo metro de tela es igual al costo de producir 101 metros menos el costo de producir 100 metros de tela, es decir:

$$C(101) - C(100)$$

En lugar de calcular específicamente este valor, se calcula la expresión general del costo de fabricación del $x + 1$-ésimo metro de tela:

$$\begin{aligned} C(x+1) - C(x) &= \left[30\ 000 + 20(x+1) + 0.1(x+1)^2 + 0.002(x+1)^3\right] \\ &\quad - (30\ 000 + 20x + 0.1x^2 + 0.002x^3) \\ &= 20 + 0.1\left[(x+1)^2 - x^2\right] + 0.002\left[(x+1)^3 - x^3\right] \\ &= 20 + 0.1(2x+1) + 0.002(3x^2 + 3x + 1) \\ &= 20 + 0.2x + 0.1 + 0.006x^2 + 0.006x + 0.002 \\ &= 20.102 + 0.206x + 0.006x^2 \end{aligned}$$

De la expresión general sustituimos x por 100, y esta operación nos permite obtener el costo de producción del 101-ésimo metro de tela:

$$C(101) - C(100) = 100.70$$

d) De los resultados obtenidos en b) y c), el error absoluto, que se calcula con el valor absoluto de la diferencia entre el costo de producción del 101-ésimo metro menos el costo de producción de los 100 metros, es:

$$|100.70 - 100| = 0.70.$$

Para determinar el error relativo usamos la expresión **(3)**:

$$\frac{0.70}{100.70} \cdot 100\% = 0.69\%$$

Costo medio marginal (Costo promedio marginal)

Con el propósito de complementar el análisis de la función costo, en este apartado se estudia el costo promedio como otro elemento de discusión del análisis marginal.

El *costo medio* o *promedio* está relacionado con el costo total $C(x)$ de producción de x unidades de un artículo. El costo medio de x unidades de este artículo se obtiene al dividir el costo total de producción entre el número de unidades producidas, esto es:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

La derivada de la función costo medio es llamada la *función de costo medio marginal,* y mide la razón de cambio de la función de costo medio con respecto del número de unidades producidas.

Ejemplo 4

El costo total de producción de x envases esféricos para refrescos, en una compañía embotelladora, está dado por:

$$C(x) = 200 + 20x + 0.5x^2$$

a) Calculemos la función de costo promedio.
b) Determinemos la función costo promedio marginal.

Solución: a) La función de costo medio, para este caso, es:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{200}{x} + 20 + 0.5x$$

b) La derivada de la función costo medio es la *función costo promedio marginal*, esto es:

$$C_m'(x) = -\frac{200}{x^2} + 0.5$$

Ejercicio 2

En los ejercicios 1 a 5 calcula la función de costo marginal de las funciones de costo siguientes:

1. $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 580x + 970$

2. $C(x) = x^3 - 2x^2 + 400x + 2\,000$

3. $C(x) = 320 + 20x^2$

4. $C(x) = 0.006x^3 - 0.2x^2 + 35x + 3\,500$

5. $C(x) = 0.1x^3 - 0.5x^2 + 500x + 200$

6. En una fábrica se determinó que cuando se produce x número de cierto artículo, el costo total es de $C(x) = x^2 + 6x + 128$ pesos.

a) Calcula la función de costo marginal.
b) Emplea la función de costo marginal para calcular el costo de fabricar la cuarta unidad.
c) ¿Cuál es el costo real de producir la cuarta unidad?
d) Determina el error absoluto y relativo que se tiene en la aproximación al costo total.

7. El costo total, en pesos, de fabricar mensualmente x grabadoras en una compañía, está dada por $C(x) = 18\,000 + 480x + 25x^2$

a) Calcula la función de costo marginal.
b) Emplea la función de costo marginal para calcular el costo de fabricar la unidad 101.
c) ¿Cuál es el costo real de fabricar la unidad 101?
d) Determina el error absoluto y relativo que se cometen en la aproximación que da el costo marginal.

8. Una fábrica de partes para juguetes estima que el costo total, en pesos, de producir x unidades de un prototipo está dado por $C(x) = 0.001x^2 + 0.06x + 400$.

a) Calcula la función de costo marginal.
b) Emplea la función de costo marginal para calcular el costo de fabricar 250, 400, 800 y 1 200 unidades.
c) Calcula el error absoluto y relativo que se comete en la aproximación que da el costo marginal de la unidad 1 200.

En los ejercicios 9 a 13 calcula el costo promedio marginal de las funciones costo total siguientes:

9. $C(x) = 0.0004x^2 + 0.06x + 1\,200$

10. $C(x) = 0.0003x^2 + 8.5x + 8\,400$

11. $C(x) = 2\,500 + 130x + 0.001x^3$

12. $C(x) = \dfrac{x}{200} + \dfrac{200}{x} + 400$

13. $C(x) = \dfrac{x}{100} + 50x + \dfrac{100}{x}$

5.3. Utilidades marginales

Luego de conocer los ingresos y el costo de una actividad productiva, se pueden determinar las utilidades que se obtienen.

Utilidad marginal

Como la derivada depende de una variable independiente discreta, la utilidad marginal se determina de igual forma que se hizo con el ingreso y los costos. Se tiene que:

La **función de utilidad marginal** es la derivada de la función utilidad: $U'(x)$.

El resultado de la derivada es una aproximación a la utilidad que se obtiene de la producción y venta de una unidad más de un cierto producto.

Nota que la definición permite ver que la derivada de la función utilidad se aproxima a la utilidad que se obtiene al producir y vender la unidad $x + 1$.

Ejemplo 5

Un fabricante estima que cuando se producen x número de artículos, el costo total en miles de pesos está dado por $C(x) = 0.2x^2 + 4x + 200$, y que el precio por unidad, en miles de pesos, depende del número de unidades producidas y está dado por la función $p(x) = 0.5(100 – x)$. Por ejemplo, si se venden 10 unidades el precio de cada una es de $p(10) = 0.5(100 – 10) = (0.5)(90) = 45$ esto es $45 000.

a) Calculemos la función utilidad.
b) Determinemos la función utilidad marginal.
c) Calculemos la utilidad de producir y vender la novena unidad, con ayuda de la función utilidad marginal.
d) Calculemos los errores cometidos al realizar esta aproximación.

Solución: a) La función utilidad se obtiene restando los costos de los ingresos, es decir:

$$U(x) = I(x) - C(x) \qquad \textbf{(5)}$$

Como los ingresos se calculan multiplicando el número de unidades vendidas por el precio de venta, tenemos que:

$$I(x) = xp(x) = x[0.5(100 - x)]$$

Luego, la utilidad está dada por:

$$\begin{aligned} U(x) &= 0.5x(100 - x) - (0.2x^2 + 4x + 200) \\ &= -0.7x^2 + 46x - 200 \end{aligned}$$

b) La utilidad marginal es la derivada de la utilidad:

$$U'(x) = -1.4x + 46$$

c) Para determinar la utilidad aproximada que se obtiene al producir la novena unidad, basta sustituir x por 8 en $U'(x)$ lo que da:

$$U'(8) = -1.4(8) + 46 = 34.8 \text{ miles de pesos}$$

Esto es, $34 800

d) La utilidad exacta al producir la novena unidad está dada por:

$$U(9) - U(8) = 157.3 - 123.2 = 34.10 \text{ miles de pesos,}$$

es decir, $34 100

El error absoluto cometido es:

$$34.8 - 34.1 = 0.7 \text{ miles de pesos}$$

es decir, \$700

El error relativo es:

$$\frac{0.7}{34.1}100\% = 2.05\%$$

Ejemplo 6

Un fabricante determinó su utilidad mediante la siguiente función:

$$U(x) = 3x^2 + 3\,900x - 130\,000$$

donde x representa el número de artículos producidos y vendidos.

Calculemos el valor exacto, el valor aproximado de la utilidad y los errores de aproximación que se obtienen al producir y vender la unidad 201.

Solución: la utilidad marginal es la derivada de $U(x)$:

$$U'(x) = 6x + 3\,900$$

El valor aproximado de la utilidad al producir y vender la unidad 201 está dado por $U'(200)$ que es igual a:

$$\begin{aligned} U'(200) &= 6(200) + 3\,900 \\ &= 1\,200 + 3\,900 \\ &= 5\,100 \end{aligned}$$

La utilidad exacta que se obtiene al producir y vender la unidad 201

$$U(201) - U(200) = 775\,103 - 770\,000 = 5\,103$$

Por lo tanto, el error absoluto que se produce es 5 103 – 5 100 = 3. Es decir, el error al realizar la aproximación es de \$3.

El error relativo es:

$$\frac{3}{5\,103}100\% = .058\%$$

Ejercicio 3

En los ejercicios 1 a 3, $C(x)$ es el costo total de producir x unidades de un determinado artículo y $p(x)$ es el precio por unidad en que se venderán las x unidades. Determina la función utilidad marginal.

1. $C(x) = 0.4x^2 + 8x + 114$ $\quad$ $p(x) = 0.25(26 - x)$

2. $C(x) = 0.2x^2 + 6x + 230$ $\quad$ $p(x) = 0.4(90 - x)$

3. $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 630$ $\quad$ $p(x) = \frac{1}{2}(78 - x)$

4. Una compañía de televisión por cable, luego de un estudio de sus utilidades ha determinado que la relación que describe su utilidad anual $U(x)$ (en pesos) en función de la tarifa mensual de renta x (en pesos) es la siguiente:

$$U(x) = -60\,000x^2 + 2\,500\,000x - 6\,000\,000$$

a) Calcula la función de utilidad marginal.
b) Utiliza la función de utilidad marginal para calcular la utilidad aproximada cuando la renta es de $10.

5. En una empresa existe el estimativo de que al producir x unidades de determinado artículo el costo total está dado por $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 8x + 320$ pesos. El precio por unidad en miles de pesos depende del número de unidades producidas y está dado por la función $p(x) = \frac{1}{2}(150 - x)$.

a) Calcula la función de utilidad marginal.
b) Emplea la función de utilidad marginal para calcular la utilidad aproximada luego de producir y vender la unidad 15.

6. Una agencia de bienes raíces tiene en renta departamentos de tres habitaciones. La utilidad mensual (en pesos) obtenida por la renta de x departamentos es:

$$U(x) = -10x^2 + 2\,600x - 60\,000$$

a) Calcula la utilidad marginal cuando se han rentado los 50 primeros departamentos.
b) ¿Cuál es la utilidad real obtenida al rentar el departamento 51?

5.4. La elasticidad de la demanda

Con el objeto de completar el estudio del análisis marginal, ya que la técnica de aproximación a través de la derivada que se ha utilizado en las secciones anteriores con referencia al ingreso, al costo y a las utilidades es mucho más general, se discuten en esta sección los conceptos de *cambio porcentual de una función y de la elasticidad de la demanda.*

Es sabido que existe una relación entre el consumo de un producto y su precio; esta relación indica que en la mayoría de los casos la demanda disminuye a medida que el precio se incrementa. Estudiar la elasticidad de la demanda, que es un concepto utilizado en la economía y la administración, permite conocer el porcentaje de cambio de la demanda de un artículo cuando su precio cambia.

Cambio porcentual de una función

Sea la función $f(x)$, que expresa el valor de cierta cantidad en términos de una variable independiente x. Si se aumenta x en una cantidad Δx, la función $f(x)$ aumenta una cantidad $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ y la fórmula para el cambio porcentual tiene la forma:

$$\frac{\Delta f}{f(x)}100\% \qquad \textbf{(7)}$$

Es decir, el *cambio porcentual* de una cantidad expresa la variación en esa cantidad como un porcentaje de su valor antes del cambio.

En los siguientes ejemplos se aplica este concepto en dos situaciones diferentes.

Ejemplo 7

El producto interno bruto (PIB) de un país fue $PIB(t) = 2t^2 + 4t + 150$ mil millones de dólares t años después de 1992. A finales de 1993 el PIB de ese país fue PIB(1) = $2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 150 = 156$ mil millones de dólares. Calculemos el cambio porcentual del PIB en el primer semestre de 1999.

Solución: transcurrieron 6 años desde inicios de 1993 hasta inicios de 1999, y 6.5 años al final del primer semestre de 1999. Por lo tanto, para calcular el valor exacto del cambio porcentual del PIB necesitamos calcular el cambio producido en el primer semestre de 1999: PIB(6.5) – PIB(6) y dividirlo por el valor que se tenía al inicio de 1999: PIB(6). Es decir, nos basta realizar la siguiente operación:

$$\frac{PIB(6.5) - PIB(6)}{PIB(6)} 100\% = \frac{260.5 - 246}{246} 100\% = 5.89\%$$

Elasticidad de la demanda

Por la importancia que tiene la relación entre la demanda de un producto y su precio, se hace necesario estudiar la elasticidad de la demanda, que no es otra cosa que el cálculo de la variación que se produce en la demanda cuando los precios del producto cambian. De hecho, si el precio sube, las ventas disminuyen; si el precio baja, las ventas aumentan. Es una situación que se presenta con mucha frecuencia en la vida real en los supermercados, por ejemplo, se ofrecen regularmente descuentos en algunos productos para atraer a mayor número de compradores.

Una manera de medir los cambios que se dan en la demanda por variaciones en el precio es la razón del cambio porcentual en la demanda al cambio porcentual en el precio. Si q es la cantidad demandada y p es el precio, esta razón es:

$$\frac{\frac{\Delta q}{q} 100}{\frac{\Delta p}{p} 100} \qquad \textbf{(8)}$$

donde Δq representa el cambio en la cantidad que se demanda y Δp representa el cambio en el precio, simplificado la expresión (8) queda:

$$\frac{\frac{\Delta q}{q} 100}{\frac{\Delta p}{p} 100} = \frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p} \qquad \textbf{(9)}$$

Si $q = f(p)$, entonces $\Delta q = f(p + \Delta p) - f(p)$ y $\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{f(p+\Delta p) - f(p)}{f(p)}$, cuando $\Delta p \to 0$, esta expresión es:

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{f(p+\Delta p) - fp}{\Delta p}$$

por lo que: $\lim_{\Delta p \to 0} \frac{p}{q} \bullet \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{p}{q} \bullet \frac{dq}{dp}$

Si p es el precio, q la cantidad de unidades demandadas y Δp representa un cambio pequeño en el precio, por la fórmula **(8)** aplicada a q como una función de p se tiene la expresión aproximada para el cambio porcentual de q:

$$\text{Cambio porcentual en } q \approx \frac{\left(dq/dp\right) \Delta p}{q} 100\%$$

Si, en particular, el cambio en p es un incremento de 1%, es decir, Δp=1%, entonces $\Delta p = 0.01p$ y se tiene:

$$\text{Cambio porcentual en } q \approx \frac{\left(dq/dp\right) 0.01p}{q} 100\% = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

La expresión anterior se conoce en economía como *elasticidad de la demanda*; se acostumbra denotarla con la letra griega η (*eta*), y se expresa mediante la siguiente relación matemática:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \qquad \textbf{(9)}$$

Los elementos conceptuales que se han discutido hasta el momento, permiten dar a la elasticidad de la demanda la siguiente interpretación:

> La **elasticidad de la demanda** η es una aproximación al cambio porcentual de la demanda originado por un incremento de 1% en el precio.

Ejemplo 8

Supongamos que la demanda q y el precio p de cierto artículo se relacionan mediante la ecuación lineal $q = 450 - 3p$ donde el precio está dado en pesos.

a) ¿Cuál es el precio máximo que puede tomar ese producto?
b) Calculemos la elasticidad de la demanda en función del precio p.
c) Calculemos la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 120$, y demos el significado del valor obtenido.
d) Calculemos la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 60$ y expliquemos el resultado.
e) ¿Qué significa que la elasticidad valga -1? ¿Para qué precio la elasticidad de la demanda vale -1?
f) ¿Cómo se calcula el porcentaje de variación de la demanda si se aumenta el precio en 5%?

Solución: a) El precio máximo posible tiene que ser un precio que garantice alguna demanda del producto, es decir, se debe tener $q \geq 1$ o sea:

$$450 - 3p \geq 1$$

$$449 \geq 3p$$

$$p \leq \frac{449}{3} = 149.7$$

$$p \leq 149.7$$

Tenemos que el precio máximo para este producto es \$149.70.

b) La elasticidad de la demanda es:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{450 - 3p}(-3) = -\frac{p}{150 - p}$$

c) Cuando el precio $p = 120$ la elasticidad de la demanda es:

$$\eta = -\frac{120}{150 - 120} = -\ 4\%$$

Cuando el precio es \$120, un aumento de 1% en el precio (aumento de \$1.20 en el precio) producirá una disminución aproximada de 4% en la demanda.

d) Cuando el precio es $p = 60$ la elasticidad de la demanda es:

$$\eta = -\frac{60}{150 - 60} = -\ 0.67\%$$

Cuando el precio por unidad del producto es \$60, un aumento de 1%, esto es de \$0.60, producirá una disminución aproximada de 0.67% en la demanda.

Como la demanda cuando el producto vale \$60 es:

$$q = 450 - 3p = 450 - 3(60) = 450 - 180 = 270$$

El 0.67% de 270 es 270 (0.0067) = 1.809. Es decir, la disminución en las ventas es de prácticamente 2 unidades.

e) Cuando la elasticidad de la demanda es –1 quiere decir que a un aumento de 1% en el precio le corresponde una disminución de 1% en la demanda. En nuestro caso, la elasticidad de la demanda será igual a –1 cuando:

$$-1 = -\frac{p}{150 - p}$$
$$150 - p = p$$
$$2p = 150$$
$$p = 75$$

Cuando el precio es \$75 cualquier incremento porcentual que se haga en el precio del producto se refleja en la misma forma en la demanda del producto.

f) Como el incremento porcentual en la demanda es lineal respecto al incremento en el precio, y como un incremento de 5% en el precio es 5 veces un incremento de 1%, que corresponde con el valor de la elasticidad, entonces el incremento porcentual de la demanda es 5 veces el valor de la elasticidad.

Niveles de elasticidad de la demanda

A continuación se presenta una clasificación de los niveles de la elasticidad de la demanda, que contribuye a una mejor interpretación del tema que se expone.

Si la demanda decrece cuando el precio crece, la elasticidad de la demanda es negativa. Sin embargo, dependiendo de sus valores se puede caracterizar la sensibilidad de la demanda al aumento de precios. Los economistas realizan la siguiente clasificación:

1. Cuando $|\eta|>1$, la disminución porcentual de la demanda es mayor que el incremento porcentual en el precio que la generó, es decir, la demanda es relativamente sensible a los cambios en el precio. En este caso, se dice que la demanda es *elástica* con respecto al precio. Éste es el caso del inciso c) del ejemplo 8.
2. Cuando $|\eta|<1$, la disminución porcentual de la demanda es menor que el incremento porcentual en el precio que la generó, es decir, la demanda es poco sensible a los cambios en el precio y se dice que la demanda es *inelástica* con respecto al precio. Éste es el caso del inciso d) del ejemplo 8.
3. Cuando $|\eta|=1$, los cambios porcentuales en la demanda son iguales a los incrementos en el precio y se dice que la demanda es de *elasticidad unitaria*. Éste es el caso del inciso e) del ejemplo 8.

El nivel de elasticidad no es propio de una función de demanda, sino que depende de los diferentes valores de los precios. El ejemplo 8 evidencia esta situación, con una función de demanda que posee diferentes niveles de elasticidad según el precio que se considere.

Ejemplo 9

Supongamos que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 60 - 0.1p$ para $0 \le p \le 600$. Caractericemos los diferentes niveles de elasticidad de la demanda en función de los precios del artículo en cuestión.

Solución: la elasticidad de la demanda es:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{60-0.1p}(-0.1) = \frac{p}{60-0.1p}\left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{p}{600-p}$$

1. La demanda es elástica si $|\eta| > 1$, es decir, cuando:

$$\left|-\frac{p}{600-p}\right| > 1$$

$$\frac{p}{600-p} > 1$$

$$p > 600 - p$$

$$2p > 600$$

$$p > 300$$

Luego, la demanda es elástica cuando el precio es superior a 300.

2. La demanda es inelástica si $|\eta| < 1$, es decir, cuando:

$$\left| -\frac{p}{600-p} \right| < 1$$

$$\frac{p}{600-p} < 1$$

$$p < 600 - p$$

$$2p < 600$$

$$p < 300$$

Por lo tanto, la demanda es inelástica cuando el precio es inferior a 300.

3. La demanda es de elasticidad unitaria si $|\eta| = 1$, es decir, cuando:

$$\left| -\frac{p}{600-p} \right| = 1$$

$$\frac{p}{600-p} = 1$$

$$p = 600 - p$$

$$2p = 600$$

$$p = 300$$

Los cambios porcentuales en la demanda son iguales a los porcentajes de aumento en el precio cuando éste es igual a 300.

Ejercicio 4

1. Si la ecuación de demanda para cierto artículo es:

$$q = 60 - 0.1p \quad \text{para } 0 \leq p \leq 600$$

a) Expresa la elasticidad de la demanda como una función de p.
b) Calcula la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 200$. Explica la respuesta.
c) ¿A qué precio la elasticidad de la demanda es igual a –1?

2. Si la demanda q y el precio p de cierto artículo están relacionados por la ecuación:

$$q = 600 - 2p \quad \text{para } 0 \leq q \leq 300$$

a) Expresa la elasticidad de la demanda como una función de p.
b) Calcula la elasticidad de la demanda cuando $p = 10$.

3. La ecuación de demanda de cierto artículo es:

$$q = 1\,000 - 4p \quad \text{para } 0 \leq q \leq 500$$

Determina para qué valor de p la demanda es:

a) Elástica.
b) Inelástica.
c) De elasticidad unitaria.

4. La ecuación de demanda de cierto artículo es:

$$q = 600 - 2p \text{ para } 0 \leq q \leq \sqrt{300}$$

a) Expresa la elasticidad de la demanda como una función de p y determina dónde $|\eta|=1$, $|\eta|<1$ y $|\eta|>1$.
b) Encuentra los intervalos en los cuales la demanda es elástica o inelástica.

5. Tomando en cuenta que $q = \sqrt{200 - p}$, $p = 100$ determina si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria.

Ejercicios resueltos

1. Para cada una de las siguientes funciones de ingreso $I(x)$, costo $C(x)$ y utilidades $U(x)$ calcula las funciones de ingreso, costo y utilidad marginales evaluadas en $x = 6$.

a) $I(x) = -x^2 + 60x$
b) $C(x) = 48 + 20x + x^2$
c) $U(x) = 160x - 0.2x^2 - 10\,000$
d) $C(x) = 6x^3 - 7x^2 + 35x + 620$
e) $I(x) = x^3 + 9x^2 + 18x$
f) $U(x) = -400x^2 + 6\,700x - 13\,000$

Solución:

a) $I'(x) = -2x + 60$

$I'(6) = -2(6) + 60 = 48$

b) $C'(x) = 20 + 2x$

$C'(6) = 20 + 2(6) = 32$

c) $U'(x) = 160 - 0.4x$

$U'(6) = 160 - 0.4(6) = 157.6$

d) $C'(x) = 18x^2 - 14x + 35$

$C'(6) = 18(6)^2 - 14(6) + 35 = 599$

e) $I'(x) = 3x^2 + 18x + 18$

$I'(6) = 3(6)^2 + 18(6) + 18 = 234$

f) $U'(x) = -800x + 6\ 700$

$U'(6) = -800(6) + 6\ 700 = 1\ 900$

2. El ingreso total en una fábrica por cierto artículo está dado por $I(x) = 320x + 0.05x^2$ pesos cuando produce x unidades durante un mes. Actualmente la fábrica produce 70 unidades al mes y planea aumentar la producción mensual en 1 unidad.

a) Utilicemos la función de ingreso marginal para encontrar el estimativo del ingreso adicional que genera la producción y venta de la unidad 71.
b) Calculemos el ingreso adicional real que generará la producción y venta de la unidad 71.

Solución: a) Se tiene que la función de ingreso marginal es la derivada de la función ingreso, esto es:

$$I'(x) = 320 + 0.1x$$

Para la aproximación al ingreso generado al producir y vender la unidad 71 se evalúa la derivada en la unidad 70, es decir:

$$I'(70) = 320 + 0.1(70) = 327 \text{ pesos}$$

b) El ingreso adicional real que genera la producción y venta de la unidad 71 está dado por:

$$I(x+1) - I(x) = I(71) - I(70) = 327.05 \text{ pesos}$$

3. Con la siguiente ecuación de demanda $3x + 300p = 3\,000$

a) Calculemos la función de ingreso marginal.
b) Con la función de ingreso marginal calculemos el ingreso obtenido en la venta de la unidad 151.
c) Calculemos el ingreso real obtenido en la venta de la unidad 151.

Solución: a) Como la función ingreso se puede expresar de la forma:

$$I(x) = xp$$

Escribimos la ecuación de demanda de tal manera que p sea una función de x, esto es:

$$300p = 3\,000 - 3x$$
$$p = 10 - 0.01x$$

Con la expresión obtenida tenemos que la función ingreso está dada por:

$$\begin{aligned} I(x) &= x(10 - 0.01x) \\ &= 10x - 0.01x^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, el ingreso marginal, cuando se vende un número x de artículos, es:

$$I'(x) = 10 - 0.02x$$

b) El ingreso marginal obtenido en la venta de la unidad 151 se obtiene evaluando la derivada en 150, esto es:

$$I'(150) = 10 - (0.02)(150) = 10 - 3 = 7$$

Tenemos que el aumento aproximado en los ingresos es de $7 por artículo al incrementar las ventas.

c) El ingreso real resultante de la venta de la unidad 151 es:

$$I(x+1) - I(x) = I(151) - I(150) = 6.99$$

El incremento en la venta genera un aumento real en los ingresos de $6.99 por artículo.

4. En cierta fábrica se estima que cuando se producen x unidades de determinado artículo, el costo total será $C(x) = 0.004x^3 + 0.5x^2 + 3x + 2\,800$ pesos.

a) Calculemos la función de costo marginal.
b) Empleemos la función de costo marginal para calcular el costo que implica fabricar la séptima unidad.
c) ¿Cuál es el costo real de producir la séptima unidad?

Solución: a) El costo marginal es la derivada de la función costo, entonces:

$$C'(x) = 0.012x^2 + x + 3$$

b) El costo de producir la séptima unidad es el cambio del costo a medida que x se incrementa de 6 a 7, y lo obtenemos al evaluar el costo marginal en la unidad 6:

$$C'(6) = 0.012(6)^2 + 6 + 3 = \$9.43$$

c) El costo real de producir la séptima unidad es:

$$C(x + 1) - C(x) = C(7) - C(6) = \$10$$

5. Un fabricante estima que cuando se producen mensualmente x unidades de determinado artículo, el costo total será $C(x) = 0.4x^2 + 12x + 400$ pesos y todas las unidades pueden venderse a un precio de $p(x) = \frac{1}{4}(160 - x)$ pesos por unidad.

a) ¿Cuál es la función de utilidad marginal?
b) Con ayuda de la función de utilidad marginal calculemos la utilidad aproximada de producir la unidad 5.
c) Calculemos los errores cometidos al realizar esta aproximación.

Solución: a) Como la función ingreso está dada por:

$$I(x) = xp(x)$$

Es decir, el número de unidades vendidas x, por el precio de cada unidad $p(x)$.

Tenemos que la función ingreso es:

$$I(x) = x\left[\frac{1}{4}(160 - 4x)\right] = 40x - x^2$$

Recordemos que la función utilidad está dada por la diferencia entre el ingreso cuando se venden x artículos y el costo de producir esos mismos x artículos.

Entonces la utilidad es:

$$U(x) = (40x - x^2) - (0.4x^2 + 12x + 400)$$
$$= -1.4x^2 + 28x - 400$$

Se tiene que la función de utilidad marginal es:

$$U'(x) = -2.8x + 28$$

b) La utilidad aproximada que se obtiene de producir y vender la unidad 5 se halla al evaluar $U'(4)$, es decir:

$$U'(4) = -2.8(4) + 28 = 16.8$$

La utilidad adicional que se tiene al producir la unidad 5 es de $16.80

c) Para calcular los errores cometidos en la anterior aproximación, primero debemos encontrar la utilidad exacta de producir y vender la unidad 5:

$$U(x+1) - U(x) = U(5) - U(4) = \$15.4$$

El error absoluto se calcula con la diferencia de los valores obtenidos en b) y c):

$$16.8 - 15.4 = \$1.4$$

El error relativo es:

$$\frac{1.4}{15.4}100\% = 9.09\%$$

6. Supongamos que la demanda q y el precio p de cierto artículo se relacionan mediante la ecuación lineal $q = 340 - 4p$, donde el precio está dado en pesos.

a) Expresemos la elasticidad de la demanda como una función de p.
b) Calculemos la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 60$ y demos el significado del valor obtenido.
c) Calculemos la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 40$ y analicemos el resultado.
d) ¿Qué significa que la elasticidad valga -1?

Solución: a) La elasticidad de la demanda es:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{q}(-4) = -\frac{4p}{340-4p} = -\frac{p}{85-p}$$

b) Cuando $p = 60$, la elasticidad de la demanda es:

$$\eta = -\frac{60}{85-60} = -2.4$$

Tenemos que cuando el precio es $p = 60$ un incremento de 1% generará una disminución de 2.4% en la demanda, aproximadamente.

c) Cuando $p = 40$, la elasticidad de la demanda es:

$$\eta = -\frac{40}{85-40} = -\ 0.88$$

Esto es, cuando el precio es $p = 40$ un incremento de 1% generará una disminución de 0.88% en la demanda, aproximadamente.

d) La elasticidad de la demanda es igual a –1 cuando:

$$\begin{aligned} -1 &= -\frac{p}{85-p} \\ 85-p &= p \\ 2p &= 85 \\ p &= 42.5 \end{aligned}$$

Con este precio, un incremento de 1% en el precio generará una disminución de la demanda de aproximadamente el mismo porcentaje (1%).

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 5 determina la función de ingreso marginal con las funciones de demanda correspondientes:

1. $p(x) = 4.5 - 0.01x$

2. $p(x) = 350 - \frac{1}{2}x$

3. $p(x) = 180 - 0.04x$

4. $p(x) = 70 - 0.1x - 0.001x^2$

5. $p(x) = \frac{1}{6}(240 - 60x)$

En los ejercicios 6 a 10 calcula la función de costo marginal de las siguientes funciones de costo total:

6. $C(x) = 390x + 4x^2$

7. $C(x) = 86 + 124x - 0.01x^2 + 0.0008x^3$

8. $C(x) = 75\,600 + 15x + 0.06x^2$

9. $C(x) = 4\,000 + 36x + 0.01x^2 + 0.0004x^3$

10. $C(x) = 0.0006x^3 - 0.009x^2 + 0.16x + 840$

En los ejercicios 11 a 14 calcula la función de utilidad marginal con las funciones de costo total y las funciones de ingreso total dadas, respectivamente:

11. La función de costo es $C(x) = 265x + \frac{3}{2}x^2$ y la de ingreso es $I(x) = 350x - \frac{1}{2}x^2$

12. La función de costo es $C(x) = 90x + 0.02x^2 - 320$ y la de ingreso es $I(x) = 180x - 0.04x^2$

13. La función de costo es $C(x) = 100 - 35x + 0.2x^2 + 0.002x^3$ y la de ingreso es $I(x) = 70x - 0.1x^2 - 0.001x^3$

14. La función de costo es $C(x) = 800 + 20x - 5x^2$ y la de ingreso es $I(x) = 140x - 10x^2$

15. Una corporación fabrica grabadoras portátiles. La cantidad (x) de estas grabadoras demandadas cada semana se relaciona con el precio unitario al mayoreo (p) mediante la ecuación:

$$p = \frac{40\,000 - x}{7.5}$$

a) ¿Cuál es la función de ingreso total?
b) Determina la función ingreso marginal.
c) Emplea la función de ingreso marginal para calcular el ingreso obtenido en la venta de la unidad 7 001.
d) Calcula el ingreso real obtenido en la venta de la 7 001-ésima unidad.

16. El costo de producir x unidades de cierto producto está dado por:

$$C(x) = 5\,000\,000 + 300x + 0.01x^2$$

donde $C(x)$ es el costo total expresado en pesos.

a) Calcula la función de costo marginal.
b) Utiliza la función de costo marginal para calcular el costo de fabricar la séptima unidad.
c) ¿Cuál es el costo real de producir la séptima unidad?

17. Una compañía de televisión por cable estima que una relación que describe la utilidad anual $U(x)$ en pesos en función de la tarifa de renta x en pesos es la siguiente:

$$U(x) = -60\,000x^2 + 2\,500\,000x - 600\,000$$

a) Calcula la función de utilidad marginal.
b) Emplea la función de utilidad marginal para calcular la utilidad aproximada de renta en 5 pesos.

18. Las funciones de costo e ingreso total de un artículo son:

$$C(x) = 60\,000 + 30x + 0.0001x^2$$

$$I(x) = 70x - 0.004x^2$$

a) Calcula la función de utilidad marginal.
b) Emplea la función de utilidad marginal para calcular la utilidad aproximada de producir y vender la unidad 50.

19. La ecuación de demanda de cierto artículo es:

$$q = 400 - 2p^2 \qquad \text{para } 0 \leq p \leq 10$$

a) Expresa la elasticidad de la demanda como una función de p.
b) Calcula la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 6$.
c) ¿A qué precio la elasticidad de la demanda es igual a –1?

Autoevaluación

1. En una fábrica de discos compactos se determinó que la demanda semanal está dada por la siguiente ecuación de demanda:

$$p = -0.06x + 900 \qquad 0 \leq x \leq 15\,000$$

donde p denota el precio unitario al mayoreo en pesos, y x la cantidad demandada. La función de costo total semanal relacionada con la fabricación de estos discos compactos es:

$$C(x) = 90\,000 + 600x - 0.012x^2 + 0.000009x^3 \text{ pesos}$$

a) Calcula la función de ingreso y la función utilidad.
b) Determina las funciones de ingreso, costo y utilidad marginales.
c) Evalúa las funciones halladas en b) cuando $x = 1\,000$.

2. Un fabricante estima que cuando se producen x unidades de determinado artículo, el costo total en miles de pesos está dado por $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 12x + 800$, y que el precio por unidad en miles de pesos depende del número de unidades producidas, el cual está dado por la función $p(x) = 0.25(120 - x)$, precio al cual se venderán las x unidades. Emplea la función de utilidad marginal para calcular la utilidad de producir la tercera unidad.

3. La demanda q y el precio p de cierto artículo se relacionan mediante la ecuación lineal:

$$q = 240 - 2p \qquad 0 \leq p \leq 120$$

a) Expresa la elasticidad de la demanda como una función de p.
b) Calcula la elasticidad de la demanda cuando el precio sea $p = 100$
c) ¿A qué precio la elasticidad de la demanda es igual a –1?

4. Supón que la demanda q y el precio p de cierto artículo están relacionados por la ecuación $-300 + q = -p^2$ para $0 \leq p \leq \sqrt{300}$. Determina dónde la demanda es elástica, inelástica o de elasticidad unitaria con respecto al precio.

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

1. a) \$2020.0
b) \$2 019.20
c) 0.04%

2. a) $I'(x) = 4\,400 + 48x$
b) \$13 280
c) Producir la unidad 186 genera \$13 304.
d) 0.18%

3. \$448

4. a) $I'(x) = -0.08x + 500$ pesos
b) \$340.08
c) \$340.04
d) \$0.04 y 0%

5. a) \$11, \$5, \$0, \$– 4 y \$– 12.
b) El ingreso es máximo cuando se venden 750 artículos.

6. a) $I'(x) = 10\,000 - 250x$
b) \$500, \$0, \$ – 500.
c) Los ingresos son máximos cuando la tarifa es aproximadamente \$40 por pasajero.

7. a) $I'(x) = 64 - \dfrac{2x}{25}$
b) 58.88
c) 58.84

8. a) $I'(x) = 10 - \dfrac{x}{100}$
b) 7.01
c) 7.005

9. a) $I'(x) = 20 - \frac{2x}{70}$

b) 19.86

c) 19.84

10. a) $I(x) = -0.05x^2 + 900x$

b) $I'(x) = -0.1x + 900$

c) 150

11. a) $I(x) = \frac{60x}{0.01x^2 + 1}$

b) $53 255

Cuando el nivel de producción es de 2 000 unidades el ingreso crece a razón de $53 225 por cada 1 000 unidades adicionales producidas y vendidas.

12. a) $I(x) = 0.03x^2 + 380x$

b) $I'(x) = 0.06x + 380$

c) $860

d) $860.03

Ejercicio 2

1. $C'(x) = x^2 - 6x + 580$

2. $C'(x) = 3x^2 - 4x + 400$

3. $C'(x) = 40x$

4. $C'(x) = 0.018x^2 - 0.4x + 35$

5. $C'(x) = 0.3x^2 - x + 500$

6. a) $C'(x) = 2x + 6$

b) $12

c) $13

d) $1 y 7.69%

7. a) $C'(x) = 480 + 50x$

b) $5 480

c) $5 505

d) $25 y 0.45%

8. a) $C'(x) = 0.002x + 0.06$
b) $ 0.56, $ 0.86, $ 1.66 y $ 2.46
c) 0.001, 0.041%

9. $\bar{c}_m(x) = 0.0004 - \frac{1\,200}{x^2}$

10. $\bar{c}_m(x) = 0.0003 - \frac{8\,400}{x^2}$

11. $\bar{c}_m(x) = -\frac{2\,500}{x^2} + 0.002x$

12. $\bar{c}'_m(x) = -\frac{400}{x^3} - \frac{400}{x^2}$

13. $\bar{c}_m(x) = -\frac{200}{x^3}$

Ejercicio 3

1. $U'(x) = -1.3x - 1.5$

2. $U'(x) = -1.2x + 30$

3. $U'(x) = -1.66 + 35$

4. a) $U'(x) = -120\,000x + 2\,500\,000$
b) $1 300 000

5. a) $U'(x) = -1.4x + 67$
b) $47.40

6. a) $1 600
b) $1 590

Ejercicio 4

1. a) $\eta = \dfrac{-\ 0.1p}{60 - 0.1p}$

b) $\eta = -0.5$, cuando el precio es \$200 habrá una disminución de 0.5%.

c) \$300

2. a) $\eta = \dfrac{-2p}{600 - 2p}$

b) – 0.03

3. a) $p > 125$

b) $p < 125$

c) $p = 125$

4. a) $\eta = \dfrac{-2p}{600 - 2p}$

$|\eta| = 1$ en $p = 150$

$|\eta| < 1$ en $p < 150$

$|\eta| > 1$ en $p > 150$

b) Elástica en $p > 150$ e inelástica en $p < 150$.

5. La demanda es inelástica.

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. $I'(x) = 45 - 0.02x$

2. $I'(x) = 350 - x$

3. $I'(x) = 180 - 0.08x$

4. $I'(x) = 70 - 0.2x - 0.003x^2$

5. $I'(x) = 40 - 20x$

6. $C'(x) = 390 + 8x$

7. $C'(x) = 124 - 0.02x + 0.0024x^2$

8. $C'(x) = 15 + 0.12x$

9. $C'(x) = 36 + 0.02x + 0.0012x^2$

10. $C'(x) = 0.0018x^2 - 0.018x + 0.16$

11. $U'(x) = 85 - 4x$

12. $U'(x) = 90 - 0.12x$

13. $U'(x) = 105 - 0.6x - 0.009x^2$

14. $U'(x) = 120 - 10x$

15. a) $I(x) = \dfrac{40\,000x - x^2}{7.5}$

b) $I'(x) = \dfrac{40\,000 - 2x}{7.5}$

c) 3 466.66
d) 3 466.53

16. a) $C'(x) = 300 + 0.02x$
b) 300.12
c) 300.13

17. a) $U'(x) = -120\,000x + 2\,500\,000$
b) 1 900 000

18. a) $U'(x) = 40 - 0.0082x$
b) \$39.59

19. a) $\eta = -\dfrac{p^2}{100 - \frac{1}{2}p^2}$

b) $\eta = -0.43$
c) \$8.16

Unidad 5

Respuestas a la autoevaluación

1. a) $U(x) = -0.048x^2 + 300x - 0.000009x^3 - 90\,000$

$I(x) = -0.06x^2 + 900x$

b) $I'(x) = -0.12x + 900$

$C'(x) = 600 - 0.024x + 0.000027x^2$

$U'(x) = -0.096x + 300 - 0.000027x^2$

c) \$780, \$603, \$177

2. \$15 000

3. a) $\eta = \dfrac{-2p}{240 - 2p}$

b) $\eta = -5$

c) $p = \$60$

4. Elástica $p > 10$

Inelástica $p < 10$

Elasticidad unitaria $p = 10$