UNIDAD 1

PRUEBA DE HIPÓTESIS

Objetivos

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Comprenderá el concepto de prueba de hipótesis.
- Identificará al error de tipo I y II.
- Aplicará prueba de hipótesis para estimar la media poblacional cuando se conoce o desconoce su desviación estándar.
- Aplicará prueba de hipótesis para comparar dos poblaciones independientes.
- Interpretará los resultados de prueba de hipótesis en problemas de aplicación.

Introducción

Actualmente la estadística aplicada ha tomado un papel fundamental como herramienta para la toma de decisiones. El análisis de los sucesos económicos, políticos y sociales en cualquier lugar del mundo tienen relevancia en nuestro entorno, por lo tanto, toda herramienta que sirva para inferir, pronosticar, analizar y resumir información, es considerada como una ventaja competitiva, que es precisamente la labor de la estadística aplicada.

Con la evolución de las computadoras y su fácil manejo, la estadística ha evolucionado gigantescamente, sin embargo, es necesario que el profesionista tenga los conocimientos suficientes para poder interpretar correctamente los resultados de un análisis estadístico, éste es uno de los principales objetivos del presente libro.

Como mencionamos, uno de los propósitos más relevantes de la estadística es describir la información, ya sea proveniente de una muestra o de la población (censo); por razones de costos y tiempo no es común realizar censos para conocer a la población de interés, que puede ser la calidad de un lote de producto, la aceptabilidad de un nuevo antiácido en el mercado mexicano, la intención de voto a favor de un candidato presidencial, etc. *Para conocer a la población se recurre al muestreo*; éste consiste en seleccionar una muestra representativa, evaluarla y, a partir de los resultados obtenidos de la muestra, **inferir** el comportamiento de la población.

En el curso de estadística I adquiriste conocimientos básicos de estadística descriptiva, técnicas de muestreo, distribuciones de probabilidad (normal estándar), así como procedimientos para realizar estimaciones, los cuales se retoman en la presente unidad con la finalidad de estudiar el proceso de **prueba de hipótesis**. *Con la aplicación de pruebas de hipótesis se obtendrá información confiable para tomar decisiones acerca del comportamiento de la población de interés.*

En esta unidad se describirá el procedimiento para realizar pruebas de hipótesis, describir a una población y comparar dos poblaciones; también se discutirá la importancia de conocer el lenguaje utilizado en pruebas de hipótesis, ya que es utilizado en Normas Oficiales Mexicanas, se citarán algunos ejemplos.

1.1. Definición de prueba de hipótesis

Una **prueba de hipótesis** es el procedimiento de la estadística inferencial donde se establece una conjetura acerca de la(s) característica(s) de una población y que permite verificar, si esta(s) característica(s) preestablecida(s) se cumple(n).

El objetivo de este procedimiento es rechazar o aceptar la conjetura inicial, que recibe el nombre de hipótesis; ejemplo: un jefe de gobierno considera que en las próximas elecciones su partido volverá a ganar la jefatura, para lo cual establece (crea una hipótesis) que más de 50% de los ciudadanos votarán a favor de su partido. Para probar si la "hipótesis" del actual jefe de gobierno es correcta, se tomará una muestra representativa de los ciudadanos y a partir de los resultados obtenidos se concluirá si el jefe de gobierno tiene o no razón.

1.1.1. Tipos de errores en el planteamiento de prueba de hipótesis

Al tomar una decisión o conclusión acerca de cualquier tipo de fenómeno existe la posibilidad de cometer error; por ejemplo, en el noticiero de la mañana se pronostica que el día será caluroso y sin lluvia, por lo tanto, **decidimos,** con base en el pronóstico, vestirnos con ropa ligera; pero sucede que el día es frío y con lluvia intensa, esto quiere decir que a pesar de tener elementos de juicio, *existe la posibilidad de cometer error en la toma de decisiones*, por lo tanto, resulta necesario reducir lo más posible este error.

Con el propósito de describir los tipos de errores en el planteamiento de pruebas de hipótesis analizaremos el siguiente ejemplo:

Se trata de un juicio para demostrar si una persona es inocente o culpable de un delito, de tal forma se plantea como hipótesis que la persona es inocente, a esta hipótesis se le conoce como hipótesis nula y se representa por H_0, el término nula se refiere a que hay nulidad de efecto, es decir, se da por hecho que la persona es inocente hasta que se demuestre lo contrario; la hipótesis alternativa (representada por H_1) corresponde a ser culpable.

Juicio

Hipótesis nula	H_0: La persona es inocente
Hipótesis alterna	H_1: La persona es culpable

Después de analizar todas la pruebas y testimonios correspondientes al análisis de la muestra, el jurado indica su veredicto; a continuación se presentan las posibilidades de error de este veredicto, cuando se contrasta con la situación real.

		VEREDICTO	
		Inocente (Aceptar H_o)	**Culpable** (Rechazar H_o)
SITUACIÓN REAL	**Inocente**	**No hay error**	**error de tipo I** α
	Culpable	**Error de tipo II** β	**No hay Error**

Tabla 1.1. Errores en el planteamiento de prueba de hipótesis.

Al analizar la tabla anterior se identifican dos tipos de errores α y β; a estos errores se les conoce como errores tipo I y tipo II, respectivamente. Una de las características de estos errores es que se encuentran relacionados de manera inversamente proporcional, lo que quiere decir que conforme disminuye uno el otro aumenta, de tal forma que es fundamental establecer cuál de estos errores es más importante y reducirlo. En la estadística inferencial, al igual que en el ejemplo del juicio a una persona, el error más importante es el error de tipo I; es decir, concluir que la persona es culpable dado que es inocente. *Imaginemos que la pena sea cadena perpetua,* si se analiza el error de tipo II, éste indica que el veredicto es inocente cuando realmente es culpable; las consecuencias de esto son inciertas debido a que la persona se puede regenerar y convertirse en hombre de bien.

A continuación se define de manera formal (ortodoxa) estos errores con base en la tabla 1.1.

Error de tipo I es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula dado que la hipótesis nula es verdadera.

*Error de tipo II es la probabilidad de aceptar la hipótesis nula dado que la hipótesis nula es falsa.**

*En el lenguaje estadístico para prueba de hipótesis, la palabra “aceptar” generalmente no se utiliza, en su lugar se prefiere decir “no rechazar”; la razón es que decir “aceptar” implica certeza (total certidumbre).

1.2. Prueba de hipótesis para la media de una población μ cuando se conoce la desviación estándar poblacional σ

Para describir una población en estadística se utilizan medidas llamadas *parámetros*; uno de los parámetros más utilizados para describir una población se le conoce como *promedio aritmético* o *media* y se representa por la letra griega μ (ver *Estadística I*, unidad 3), para conocer este valor sería necesario evaluar cada elemento de la población, lo cual resulta muy costoso y requiere mucho tiempo, de tal forma que se prefiere utilizar la información de una muestra que sea representativa y, a partir del promedio muestral $\bar{x}$, inferir el valor de μ.

Para este caso se da por conocido el valor de la dispersión de la población medido en términos de desviación estándar poblacional σ (ver *Estadística I*, unidad 4), este valor se determina con base en estudios estadísticos anteriores (información retrospectiva). Un ejemplo corresponde a la variabilidad en el volumen dosificado en frascos de jarabe para la tos; el jefe de producción conoce la variabilidad de la máquina, ya que se han fabricado muchos lotes anteriores y se tiene esta información, o bien, este valor de desviación estándar puede ser obtenida por medio del proveedor del equipo, artículos científicos o por medio del conocimiento *a priori* del especialista.

A continuación describimos la metodología para la prueba de **hipótesis de μ con desviación estándar poblacional σ conocida**, por medio de un ejemplo:

Ejemplo 1

El gerente de control de calidad desea saber si el último lote fabricado cumple la especificación que dice que el peso promedio (μ) de las cajas de cereal es de 300g; se sabe por experiencia que la desviación estándar poblacional es de 15g. Para esto se toma una muestra aleatoria de 9 cajas de cereal, con los siguientes pesos: 295, 299, 301, 305, 298, 300, 301, 305 y 300g.

Procedimiento

Paso 1

Identificar el modelo probabilístico

El modelo probabilístico se refiere a la distribución de probabilidad a utilizar, esto se define con base en las características del problema, en atención al ***teorema central del límite*** (ver *Estadística I*, unidad 8, tema 8.3) que en síntesis dice "la distribución muestral de la media $\bar{x}$ se aproxima a una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$, a medida de que se incremente el número de elementos n que conforman el tamaño de las muestras posibles que se obtienen de la población, no importando el tipo de distribución de la población", por lo tanto, para este caso de prueba de hipótesis se empleará la distribución normal estándar "Z" (ver *Estadística I*, unidad 7, tema 7.2).

Paso 2

Establecer la hipótesis nula y la alternativa

La hipótesis nula en términos estadísticos, para este ejemplo, es que el promedio del peso de las cajas de cereal del lote (población) sea igual a 300g.

$$H_0: \mu = 300\text{g}$$

Donde μ es el promedio del peso de todas las cajas de cereales del lote a evaluar.

La hipótesis alternativa también debe estar en términos estadísticos y corresponde al complemento de la hipótesis nula; ésta se representa como H_1 (algunos autores la identifican como Ha).

En este ejemplo la hipótesis alternativa es la siguiente:

$$H_1: \mu \neq 300\text{g}$$

Paso 3

Definir el nivel del error de tipo I "α" y determinar el estadístico de prueba

Definir el nivel de error de tipo I es un paso crítico ya que en función de éste se establecerán los criterios para rechazar la hipótesis nula. Debido a lo anterior, en algunas pruebas importantes para establecer la calidad de productos de consumo humano, la Secretaría de Salud (por medio de documentos que son considerados leyes para el gobierno mexicano, tal como la Norma Oficial Mexicana **NOM 177-SSA1-1998**) establece la magnitud del error de tipo I como 0.05. Al error de tipo I en pruebas de hipótesis también se le conoce como *nivel de significancia.*[*]

En general se considera como un nivel de significancia adecuado el valor de 0.05; es decir, cometer un error de 5%. Este valor fue utilizado inicialmente por R. A. Fisher[**]; dependiendo del área de estudio, este valor puede ser modificado ya sea por criterio del investigador o por documentos normativos.

Estadístico de prueba

Como estadístico de prueba se le conoce al valor que es calculado a partir de los datos muestrales considerando la distribución de probabilidad seleccionada; este valor se utilizará para tomar la decisión de *rechazar* o *no* la hipótesis nula.

De acuerdo con el paso 1, la distribución a utilizar es la normal estándar, por lo tanto el estadístico de prueba es el siguiente:

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

A partir de los datos de la muestra se determina el promedio muestral $\bar{x}$ y se calcula el estadístico de prueba Z_c (*Z calculada*).

De acuerdo con los datos del problema, el tamaño de la muestra es $n = 9$, los resultados del peso de cada caja de cereal fueron 295, 299, 301, 305, 298, 300, 301, 305, y 300g. La desviación estándar poblacional σ es de 15g.

Con base en lo anterior:

$$\bar{x} = \frac{295+299+301+305+298+300+301+305+300}{9} = \frac{2\ 704}{9} = 300.4$$

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{300.4 - 300}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = \frac{0.4}{5} = 0.08$$

*Aunque la Real Academia de la Lengua Española adopta el término “significación”, aquí utilizaremos el término “significancia”, del inglés *significance*.

** Fisher es considerado padre de la estadística aplicada.

Paso 4

Establecer las regiones de rechazo para la hipótesis nula

La distribución del estadístico de prueba, en este caso la distribución normal estándar, se divide en 2 regiones, una *región de rechazo* de H_0 y otra de *no rechazo*. (Vease la figura 1.1)

Esto significa que con base en el valor de $\mathbf{Z}_c$, se tomará la decisión de *rechazar* o *aceptar* la hipótesis nula; esta decisión estará en función del nivel de significancia α.

La hipótesis nula para este caso indica que μ es igual a 300g (H_0: μ = 300g), esto quiere decir que se va a rechazar cuando sea diferente de 300g, pero ...

¿qué significa que μ sea diferente de 300g?

... diferente de 300g implica dos alternativas, una que sea mayor que 300g y la otra que sea menor que 300g, por lo tanto se tendrán dos regiones de rechazo (algunos autores llaman a este tipo de prueba de "dos colas" o de "dos extremos").

Las regiones de rechazo indican a partir de qué valor se va a considerar μ mayor o menor que 300g.

Para construir las regiones de rechazo se utiliza la distribución normal estándar (se llama normal estándar porque siempre tendrá como valor de μ cero y desviación estándar 1), esto quiere decir que en el ejemplo la media bajo H_0 toma el valor de 300g, en la distribución normal estándar, $\mathbf{Z}$, este valor equivale a cero.

El área de las regiones de rechazo corresponden al valor del error de tipo I o nivel de significación α; dado que en este ejemplo se tienen dos regiones de rechazo, cada región tendrá $\alpha/2$ de área, para que la suma de las dos regiones de rechazo sea igual a α, tal como se muestra en la siguiente figura:

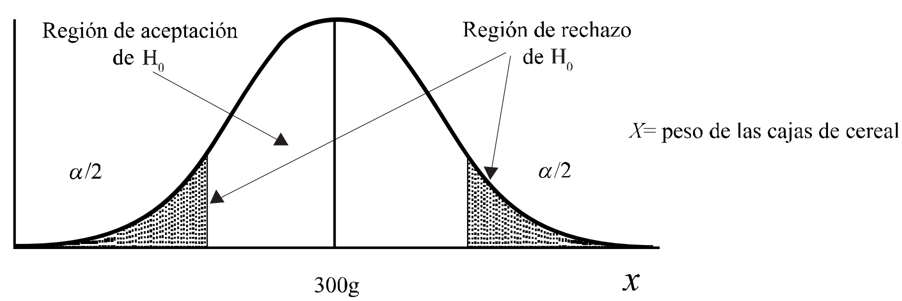


Figura 1.1. Distribución del peso de las cajas de cereal.

Al utilizar la distribución normal estándar, la media de las cajas de cereal se transforma en cero, con desviación estándar 1, tal como se muestra a continuación.

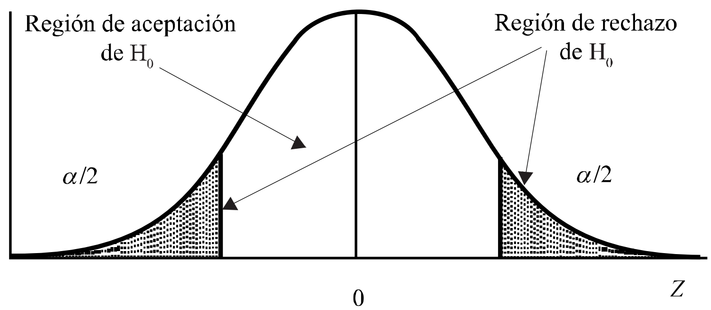


Figura 1.2. Distribución normal estándar.

Los valores de Z que definen el área de rechazo son conocidos como Z_{tablas} (también llamados $Z_{críticos}$); estos valores son definidos a partir del nivel de significancia y su valor se determina con ayuda de la tabla de la distribución normal estándar. (Ver anexo 1.)

Si α tiene un valor de 0.05, los valores de Z_{tablas} que definen las regiones de rechazo son los siguientes:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = -1.96 \quad \text{y} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{1-0.025} = Z_{0.975} = 1.96$$

Lo anterior se observa en la siguiente figura:

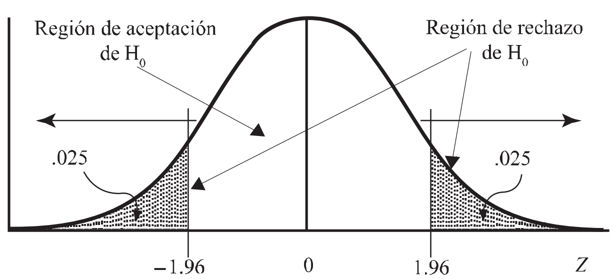


Figura 1.3.

Paso 5

Tomar la decisión de *rechazar* o *aceptar* la hipótesis nula con base en Z_c y Z_{tablas} y concluir

Al retomar las regiones de rechazo observamos que si Z_c mayor que 1.96 o menor que –1.96, la hipótesis nula H_0 se rechazará. En este caso el valor de Z_c es de 0.08, como este valor "cae" en la región de aceptación de H_0, entonces, *se acepta la hipótesis nula.*

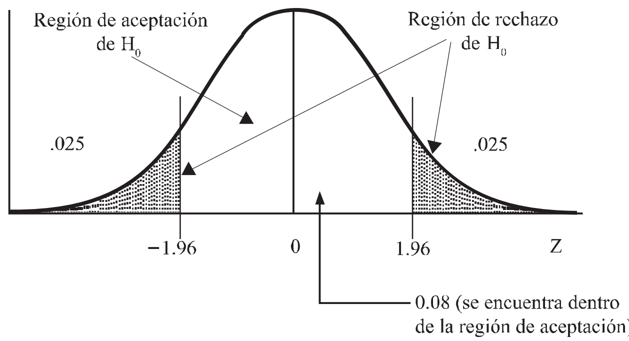


Figura 1.4.

Conclusión

No existe evidencia que indique que el promedio del peso de las cajas de cereal sea diferente de 300 g.

1.3. Prueba de hipótesis para la media de una población μ cuando se desconoce la desviación estándar poblacional σ

El caso más común se presenta cuando no se tiene conocimiento previo de la variabilidad del fenómeno; por ejemplo, la aceptación de un nuevo producto en el mercado, el rendimiento de una máquina nueva, resultado de investigaciones, de tal forma que se desconoce la variabilidad expresada como desviación estándar poblacional σ, por lo tanto, para realizar pruebas de hipótesis *en lugar de* σ, *se utiliza su estimador*, es decir, la desviación estándar muestral representada por S.

La desviación estándar muestral se calcula por medio de la siguiente fórmula (ver *Estadística I*, unidad 4, tema 4.3):

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

La consecuencia de desconocer "σ" y utilizar S como su estimador es que en lugar de utilizar la distribución normal estándar Z, *se utilizará la distribución t-student* (ver *Estadística I*, unidad 9, tema 9.2.2) *como una aproximación a la normal.*

Por lo tanto, el estadístico de prueba t (también llamada t calculada t_c):

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

donde t_c sigue la distribución *t-student* con n–1 grados de libertad (*gl*)

Los grados de libertad (*gl*) se definen numéricamente para este caso como el tamaño de la muestra (n) menos 1.

$$gl = n-1.$$

Para describir el uso de este procedimiento se empleará el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3

El gerente de desarrollo de nuevos productos está interesado en saber si el contenido de shampoo en una nueva presentación individual, es menor o igual a lo indicado en el marbete (5ml), ya que si el contenido es menor que lo indicado, se considera como fraude al consumidor y la empresa puede ser demandada.

Al realizar un muestreo de 9 sobres de shampoo, se observan los siguientes resultados:

4.5, 5.0, 6.0, 5.5, 4.7, 5.8, 5.3, 5.9 y 5.2 ml

El procedimiento seguirá los pasos para prueba de hipótesis:

Paso 1

Identificar el modelo probabilístico

Dado que se desconoce la desviación estándar poblacional σ y se desea inferir sobre el promedio, la distribución utilizada será la *t-student*.

Paso 2

Establecer la hipótesis nula y la alternativa

$$H_0: \mu \leq 5 \text{ ml}$$

$$H_1: \mu > 5 \text{ ml}$$

Donde μ es el promedio del volumen del nuevo producto.

Paso 3

Definir el nivel de error de tipo I "α" y el estadístico de prueba

Se define $\alpha = 0.05$

El estadístico de prueba es:

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

A partir de los datos de la muestra determinar el promedio muestral $\bar{x}$ y la desviación estándar muestral "S"; calcular el estadístico de prueba t_c.

$$\bar{x} = \frac{4.5 + 5.0 + 6.0 + 5.5 + 4.7 + 5.8 + 5.3 + 5.9 + 5.2}{9} = \frac{47.9}{9} = 5.32$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(4.5-5.32)^2 + (5.0-5.32)^2 + (6.0-5.32)^2 + ... + (5.2-5.32)^2}{9-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.6724 + 0.1024 + 0.4624 + ... + 0.0144}{8}} = \sqrt{\frac{2.2356}{8}} = 0.5286$$

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{5.32 - 5.0}{\frac{0.5286}{\sqrt{9}}} = \frac{0.32}{0.1762} = 1.8161$$

Paso 4

Establecer las regiones de rechazo para la hipótesis nula

En este caso existe una región de rechazo que corresponde a los valores de t, que sean significativamente mayores a la media, tal como se muestra a continuación:

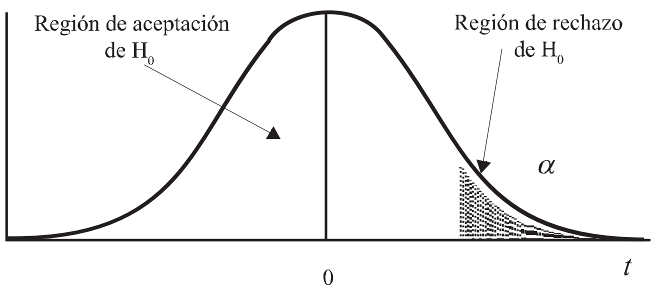


Figura 1.5.

Como α tiene un valor de 0.05, el valor de t_{tablas} que define la región de rechazo es:

$t_{\alpha,\, n-1} = t_{0.05,\; 9-1} = t_{0.05,\; 8} = 1.8595 \approx 1.86$ (tabla de la distribución *t-student*)

Ejemplo para determinar el valor de t_{tablas}.

gl	**Nivel de α (cola superior)**			
	0.1	**0.05**	**0.025**	**0.01**
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646
.				
.				
8		1.8595		

Tabla 1.2. Tabla de la distribución *t-student* (ver anexo 2).

De manera que la región de rechazo es: $t_c > 1.8595$

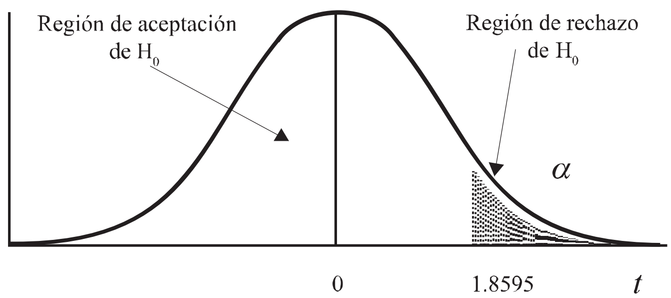


Figura 1.6

Paso 5

Tomar la decisión de *rechazar* o *aceptar* la hipótesis nula, con base en t_c y t_{tablas} y concluir.

Como $t_c = 1.8161$ está en la región de aceptación, se acepta la hipótesis nula.

Conclusión

Se determina que el promedio poblacional (de todo el proceso) es menor o igual que 5 ml*, por lo tanto, la empresa puede ser demandada por el consumidor ya que el contenido promedio puede ser menor que 5* ml.

Ejercicio 1

En una empresa el servicio al cliente se califica en una escala de 0 a 10. El jefe de este servicio considera que, en promedio, los clientes califican el servicio con 9. Para demostrar lo anterior decide seleccionar aleatoriamente 10 clientes y preguntarles la calificación que darían a la empresa, los resultados son los siguientes:

8, 9, 10, 7, 10, 8, 9, 9, 7 y 7.

Con base en esta muestra, ¿se puede concluir que la conjetura del jefe de servicio al cliente es correcta?

1.4. Prueba de hipótesis para comparar dos poblaciones independientes

Un problema común en la industria es comparar la eficiencia de dos proveedores, el rendimiento de dos métodos de fabricación, la velocidad entre dos máquinas, la calidad de egresados en dos instituciones, la aceptación de un producto en dos nichos de mercado, etc. En estos ejemplos se identifica que las poblaciones son independientes, esto quiere decir que los resultados de un consumidor o la eficacia del proveedor A ***no influyen*** en los resultados del otro consumidor o proveedor B.

A continuación se describirá el procedimiento para comparar dos poblaciones independientes.

Para comparar dos poblaciones generalmente se considera que ambas tienen la misma variabilidad; es decir, la amplitud de las distribuciones normales son semejantes; a esta propiedad se le conoce como *homoscedasticidad*.

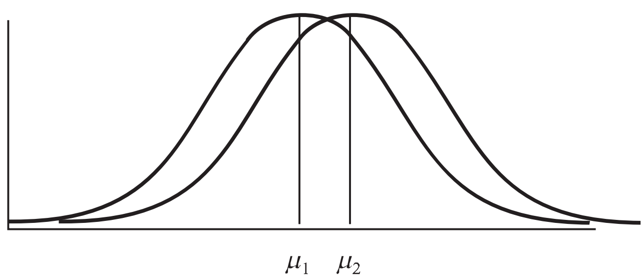


Figura 1.7.

En la figura anterior se observa que la amplitud de las distribuciones, que representa la variabilidad, es semejante, éste es un supuesto que se puede verificar por medio de una prueba de hipótesis con distribución F de Fisher .

El objetivo de comparar dos poblaciones por medio de una prueba de hipótesis consiste en determinar si las medias μ_1 y μ_2 son estadísticamente diferentes; esto se puede evaluar por medio de la diferencia entre éstas, es decir, $\mu_1 - \mu_2 = \delta$, si δ es diferente de cero, querrá decir que las poblaciones son diferentes.

La metodología de prueba de hipótesis es la misma que se empleó anteriormente.

Cuando se conoce la desviación estándar poblacional σ en ambas poblaciones y bajo el supuesto de homoscedasticidad, se utilizará como estadístico de prueba Z_c, que se define como:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

donde:

$\bar{x}_1$ = media de la muestra tomada de la población 1.
$\bar{x}_2$ = media de la muestra tomada de la población 2.
μ_1 =media de la población 1.
μ_2 = media de la población 2.
σ_1^2 = varianza de la población 1.
σ_2^2 = varianza de la población 2.
n_1 = tamaño de la muestra tomada de la población 1.
n_2 = tamaño de la muestra tomada de la población 2.

Sin embargo, en la mayoría de los casos donde se desea comparar dos poblaciones, se desconoce el valor de la varianza, por esta razón se utiliza –bajo el supuesto de homoscedasticidad– un valor que representa la variabilidad de ambas poblaciones a partir de datos muestrales ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$); a esta varianza se le conoce como varianza mancomunada o S_p^2 (*p* proviene del inglés *pooled).*

La hipótesis que se plantea para determinar si dos poblaciones son iguales se describe a continuación:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{o} \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Contra la hipótesis alternativa:

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{o} \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Para evaluar la hipótesis anterior se utiliza el estadístico de prueba t_c para varianza mancomunada S^2_p:

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

y

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

donde:
$\bar{x}_1$ = media de la muestra tomada de la población 1.
$\bar{x}_2$ = media de la muestra tomada de la población 2.
μ_1 = media de la población 1.
μ_2 = media de la población 2.
s_1^2 = varianza de la muestra tomada de la población 1.
s_2^2 = varianza de la muestra tomada de la población 2.
n_1 = tamaño de la muestra tomada de la población 1. ($n_1 < 30$)
n_2 = tamaño de la muestra tomada de la población 2. ($n_2 < 30$)

El valor de t_{tablas} se calcula con el nivel de significancia α y con los grados de libertad

$$gl = n_1 + n_2 - 2$$

El procedimiento se describirá por medio del siguiente ejemplo:

Ejemplo 4

A una muestra aleatoria de vendedores de seguros de dos compañías se les aplica un examen para demostrar sus conocimientos sobre seguros, los resultados son:

Compañía 1	**Compañía 2**
n_1=10	n_2=10
s_1=10.2	s_2=14.14
$\bar{x}_1$=83.3	$\bar{x}_2$=92.4

¿Se puede concluir que los vendedores de ambas compañías tienen en promedio los mismos conocimientos en seguros?

Paso 1

Identificar el modelo probabilístico

Distribución t con varianza mancomunada (ya que no se conocen σ_1 y σ_2)

Paso 2

Establecer la hipótesis nula y la alternativa

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Donde μ es el promedio de conocimientos en seguros para cada población.

Paso 3

Definir el nivel del error de tipo I "α" y el estadístico de prueba

Se define $\alpha = 0.05$

El estadístico de prueba es:

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Con base en la información muestral se calcula el estadístico de prueba.

Compañía 1	Compañía 2
n_1=10 s_1=10.2 $\bar{x}_1$=83.3	n_2=10 s_2=14.14 $\bar{x}_2$=92.4

A partir de las desviaciones estándares "S" se obtienen las varianzas, para esto se eleva al cuadrado cada valor de la desviación estándar.

$S_1^2 = 10.2^2 = 104.04$

$S_2^2 = 14.14^2 = 199.94$

Una vez calculadas las varianzas muestrales se obtiene el valor de la varianza mancomunada y finalmente el estadístico de prueba t_c, tal como se muestra a continuación:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(10-1)104.04 + (10-1)199.94}{10+10-2} = \frac{2\,735.82}{18} = 151.99$$

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{(83.3 - 92.4) - (0)}{\sqrt{151.99(\frac{1}{10} + \frac{1}{10})}} = \frac{-9.1}{\sqrt{30.398}} = \frac{-9.1}{5.513} = -1.65$$

Paso 4

Establecer las regiones de rechazo para la hipótesis nula

En este caso existen dos regiones de rechazo, como se observa en la siguiente gráfica:

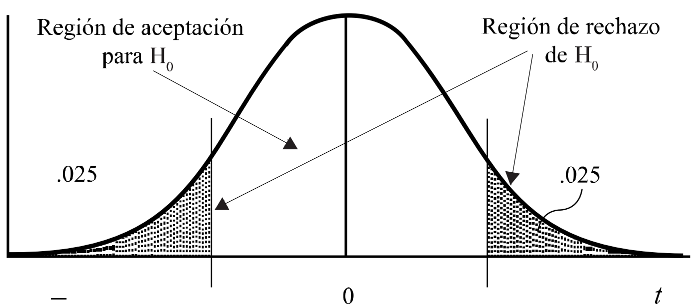


Figura 1.8.

Como α es de 0.05, los valores de t_{tablas} que definen las regiones de rechazo son:

$t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} = t_{0.025, 20-2} = t_{0.025, 18} = 2.1009$ (Valor obtenido de la tabla de la distribución *t-student*)

Para determinar el valor de t_{tablas}.

gl	Nivel de α (cola superior)			
	0.1	**0.05**	**0.025**	**0.01**
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646
.				
.				
18			2.1009	

Tabla 1.3. Tabla de la distribución *t-student* (ver anexo 2).

Por lo anterior, las región de rechazo queda de la siguiente forma:

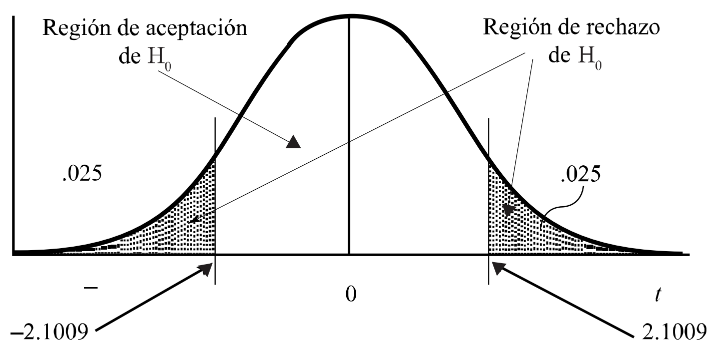


Figura 1.9.

Paso 5

Tomar la decisión de *rechazar* o *aceptar* la hipótesis nula con base en t_c y t_{tablas} y concluir

Como $t_c = -1.65$ está en la región de aceptación, se acepta H_0.

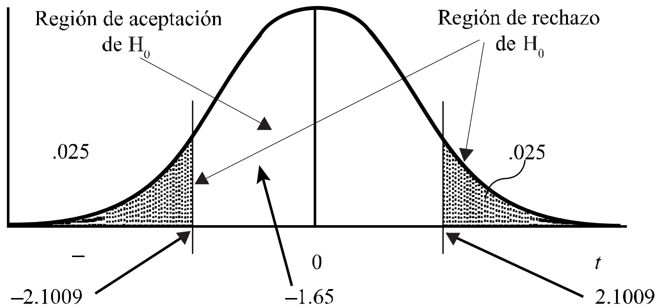


Figura 1.10.

Conclusión

Existe evidencia que demuestra que en promedio, los conocimientos de los vendedores de seguros de las compañías evaluadas son los mismos.

Ejercicio 2

1. Dada una muestra de tamaño n_1=40 que proviene de una población con desviación estándar conocida σ_1=20, y otra muestra independiente n_2=50 que proviene de otra población con desviación estándar conocida σ_2=10, los promedios de cada muestra fueron los siguientes: $\bar{x}_1$=72, $\bar{x}_2$= 66, determinar el estadístico de prueba Z_c.

2. Se desea determinar si existe diferencia entre el tiempo en que los clientes de dos tiendas de ropa casual reciben el catálogo con los nuevos modelos y tendencia en la moda. Los resultados son los siguientes:

Tienda 1	Tienda 2
$\bar{x}_1$=35 días S_1=2.4 n_1=40	$\bar{x}_2$=44 días S_2=3 días n_2=30

Asumiendo que las varianzas poblacionales de ambas tiendas son iguales (homoscedásticas) y α=0.05, ¿se puede concluir que el tiempo en que los clientes reciben el catálogo en ambas tiendas es el mismo?

Ejercicios resueltos

1. Se realizó un estudio de mercado para saber el nivel de ingreso familiar promedio en una zona específica de la ciudad de México; si el nivel de ingreso familiar es mayor o igual que 15 000 pesos, entonces se considerará esta zona como viable para ser un nicho de mercado. Se decide tomar una muestra de 10 familias, con base en estudios anteriores se considera que la **desviación estándar del nivel de ingreso poblacional** σ para esta zona es de 5 000 pesos, los resultados son los siguientes:

$12 000, $17 000, $12 000, $15 000, $16 000, $10 000, $14 000, $16 000, $18 000 y $11 000

¿Se puede concluir con base en esta muestra que el promedio de ingreso familiar es mayor o igual que 15 000 pesos?

Paso 1

Identificar el modelo probabilístico

Dado que se conoce la desviación estándar poblacional σ y se desea inferir sobre el promedio, la distribución apropiada es la normal estándar Z.

Paso 2

Establecer la hipótesis nula y la alternativa

$$H_0: \mu \geq \$15\,000$$

Donde μ es el promedio del ingreso de todas las familias de la zona de interés.

En este ejemplo la hipótesis alternativa es la siguiente:

$$H_1: \mu < \$15\,000$$

Paso 3

Definir el nivel del error de tipo I "α" y determinar el estadístico de prueba

Se define $\alpha = 0.05$

El estadístico de prueba es:

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

A partir de los datos de la muestra, determinar el promedio muestral $\bar{x}$ y calcular el estadístico de prueba Z_c.

$$\bar{x} = \frac{12\,000 + 17\,000 + 12\,000 + 15\,000 + 16\,000 + 10\,000 + 14\,000 + 16\,000 + 18\,000 + 11\,000}{10} =$$

$$\frac{141\,000}{10} = 14\,100$$

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{14\,100 - 15\,000}{\frac{5\,000}{\sqrt{10}}} = \frac{-900}{1\,581.14} = -0.57$$

Paso 4

Establecer las regiones de rechazo para la hipótesis nula

En este caso existe una única región de rechazo (prueba de "una cola"), que corresponde a los valores de Z que sean significativamente menores que la media, tal como se muestra a continuación:

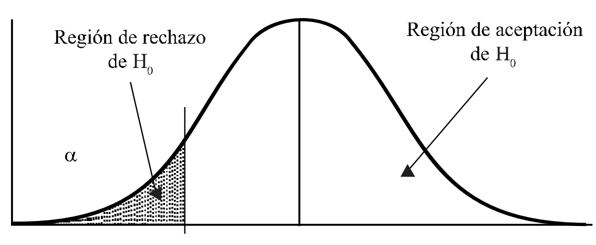


Figura 1.11.

Como α es de 0.05, el valor de Z_{tablas} que define la región de rechazo es:

$$Z_{\alpha} = Z_{0.05} = -1.645$$

Lo anterior se observa en la siguiente figura:

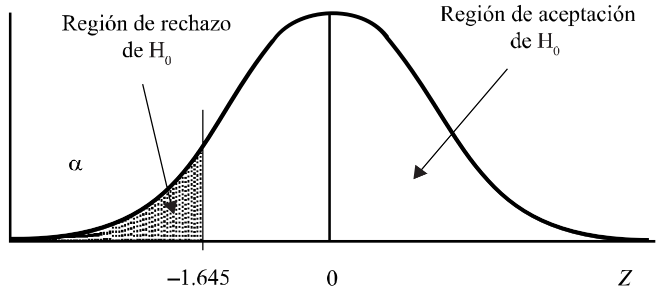


Figura 1.12.

Paso 5

Tomar la decisión de rechazar o aceptar la H_0 con base en Z_c y Z_{tablas} y concluir

Como $Z_c = -0.57$ está dentro de la región de aceptación, se acepta la hipótesis nula.

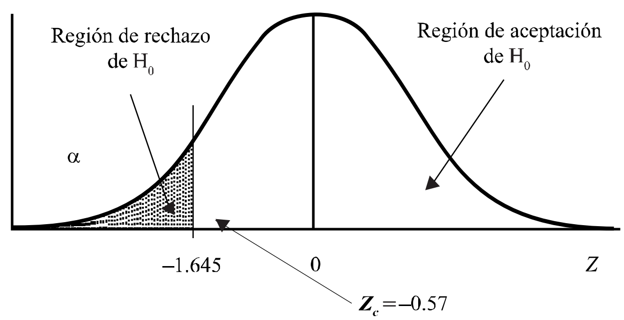


Figura 1.13.

Conclusión

El promedio familiar en la zona (población) de interés es mayor o igual que $15 000, por lo tanto, esta zona puede ser considerada como nicho de mercado.

2. Dada una muestra de tamaño $n_1 = 8$ con media muestral $\bar{x}_1 = 42$ y desviación estándar muestral $s_1 = 4$, y otra muestra independiente de tamaño $n_2=15$ con media muestral $\bar{x}_2 = 34$ y desviación estándar muestral $s_2=5$. ¿Es posible concluir que las dos poblaciones representadas por las muestras son iguales? Considera que las varianzas poblacionales son semejantes y utiliza $\alpha = 0.05$

Paso 1

Identificar el modelo probabilístico

Distribución t con varianza mancomunada.

Paso 2

Establecer la hipótesis nula y la alternativa

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Donde μ es el promedio en cada población.

Paso 3

Definir el nivel del error de tipo I "α" y el estadístico de prueba

Se define $\alpha = 0.05$

El estadístico de prueba es:

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Con base en la información muestral se calcula el estadístico de prueba.

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(7)4^2 + (14)5^2}{8 + 15 - 2} = 22$$

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{(42 - 34) - (0)}{\sqrt{22(\frac{1}{8} + \frac{1}{15})}} = \frac{8}{\sqrt{4.2167}} = \frac{8}{2.0535} = 3.896$$

Paso 4

Establecer las regiones de rechazo para la hipótesis nula

En este caso existen dos regiones de rechazo, como se observa en la siguiente gráfica:

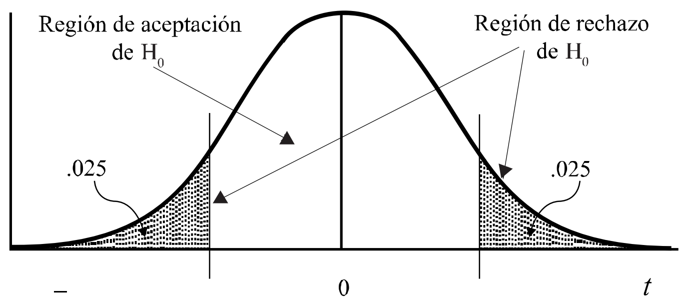


Figura 1.14.

Como α es de 0.05, los valores de t_{tablas} que definen las regiones de rechazo son:

$t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} = t_{0.025,\ 8+15-2} = t_{0.025,\ 21} = 2.5177$ (tabla de la distribución *t-student*)

Para determinar el valor de t_{tablas}.

gl	Nivel de α (cola superior)			
	0.1	**0.05**	**0.025**	**0.01**
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646
.				
.				
21			2.5177	

Tabla 1.4. Tabla de la distribución *t-student* (ver anexo 2).

Por lo anterior, la región de rechazo queda de la siguiente forma:

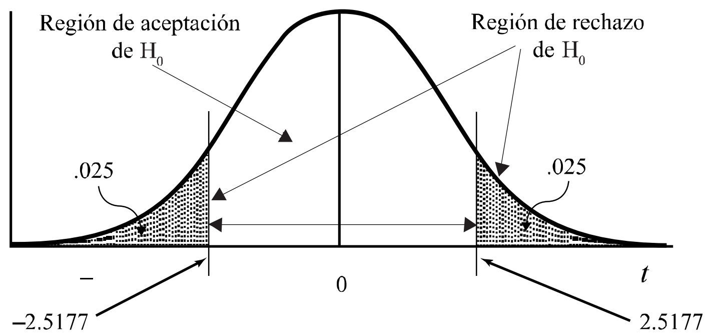


Figura 1.14.

Paso 5

Tomar la decisión de *rechazar* o *aceptar* la hipótesis nula con base en t_c y t_{tablas} y concluir.

Como $t_c = 3.896$ está en la región de rechazo, se rechaza H_0.

Conclusión

Existe evidencia que demuestra que las medias de las poblaciones son diferentes.

Ejercicios propuestos

1. El gerente de recursos humanos quiere demostrar que el rendimiento promedio del personal es de 90%, para esto considera que la desviación estándar poblacional σ es de 10%; decide tomar una muestra de 18 empleado y evaluar su rendimiento, los resultados son los siguientes:

90, 78, 40, 34, 20, 36, 61, 60, 80, 89, 41, 32, 69, 68, 50, 95, 78 y 89%.

Con base en estos resultados, ¿se puede concluir que la hipótesis del gerente es correcta?

Usar α de 0.05

2. Los siguientes datos representan el número de platos lavados antes de que desaparezca la espuma en una prueba de detergente para trastos: 27, 28, 30, 31, 29, 25, 25, 30, 21, 34, 31, 33, 35, 24, 25, 28, 32, 34, 30 y 34. Si la fábrica no puede demostrar que el promedio de platos lavados (antes de que desapareciera la espuma) es de por lo menos 34, ésta tendrá que mejorar su detergente. Basados en esta prueba con $\alpha = 0.05$, ¿qué tiene que hacer la fábrica?

3. Se quiere evaluar dos proveedores. Las calificaciones en los últimos meses fueron:

Proovedor A	**Proovedor B**
35	38
50	22
41	58
30	45
53	30

¿Se puede concluir que hay diferencia entre los proveedores con $\alpha = 0.05$? Considera que las varianzas de las calificaciones en ambos proveedores es la misma.

Autoevaluación

1. ¿Cuál de los siguientes incisos corresponde a la definición del error de tipo I "α"?

a) Probabilidad de rechazar la hipótesis nula dado que la hipótesis nula es verdadera.
b) Probabilidad de aceptar la hipótesis nula dado que la hipótesis nula es falsa.
c) Probabilidad de aceptar la hipótesis nula dado que la hipótesis nula es verdadera.
d) Probabilidad de rechazar la hipótesis nula dado que la hipótesis nula es falsa.

2. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al planteamiento de una prueba de hipótesis?

a) $\mu = 20$
b) $\alpha = 0.05$
c) $\bar{x}_1 = 83.3$
d) $Z = 1.96$

3. El estadístico de prueba t_c se usa para verificar que H_0: $\mu = 280$, cuando se desconoce:

a) σ
b) s
c) n
d) α

4. El gerente de control de calidad desea verificar que el contenido promedio de shampoo en el último lote producido es de 250 ml, para esto toma una muestra aleatoria de 25 botellas, con promedio muestral de 245 ml y desviación estándar s=16 ml. ¿Cuál es la prueba de hipótesis que corresponde a este planteamiento?

a) H_0: $\mu > 250$ ml vs H_1: $\mu \leq 250$ ml
b) H_0: $\mu < 250$ ml vs H_1: $\mu \geq 250$ ml
c) H_0: $\mu = 250$ ml vs H_1: $\mu \leq 250$ ml
d) H_0: $\mu = 250$ ml vs H_1: $\mu \neq 250$ ml

5. Del inciso anterior, ¿qué valor corresponde al estadístico de prueba t_c?

a) –1.56
b) 2.33
c) 1.4
d) 2.56

6. Indica el valor de los grados de libertad (gl) para el enunciado del problema 4.

a) 14
b) 16
c) 24
d) 20

7. Indica el valor de t_{tablas} considerando μ=0.05 en el enunciado del problema 4.

a) 2.064
b) 1.7531
c) 1.3406
d) 0.6912
e) 2.9467

8. Con base en los incisos anteriores, ¿cuál sería la conclusión?

a) Rechazar H_0.
b) Aceptar H_0.
c) Ni aceptar ni rechazar H_0.
d) Rechazar H_1.

9. Se tienen dos poblaciones independientes y es de interés conocer si las poblaciones son similares; para esto se considera que las varianzas poblacionales son iguales y α = 0.05. Después de realizar un muestreo aleatorio en cada población se presentan los resultados.

Población 1	**Población 2**
$\bar{x}_1$=35	$\bar{x}_2$=40
S_1=7	S_2=8
n_1=20	n_2=30

Indica ¿cuál es la hipótesis nula y alternativa?

a) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
b) H_0: $\mu_1 - \mu_2 > 0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$
c) H_0: $\mu_1 - \mu_2 < 0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$
d) H_0: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

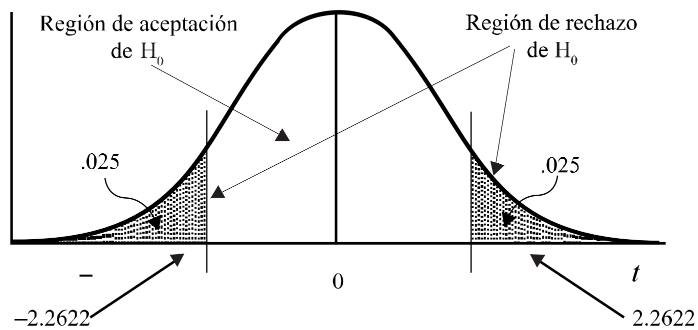
10. ¿Cuál sería la conclusión, considerando los datos del problema 9?

a) Rechazar H_0.
b) Aceptar H_0.
c) Ni aceptar ni rechazar H_0.
d) Rechazar H_1.

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

$H_0: \mu = 9$ vs $H_1: \mu \neq 9$
$t_c = -1.61647$
$gl = 9$, Prueba de dos colas $\alpha/2 = 0.025$, $t_{tablas} = 2.2622$
Zonas de rechazo:

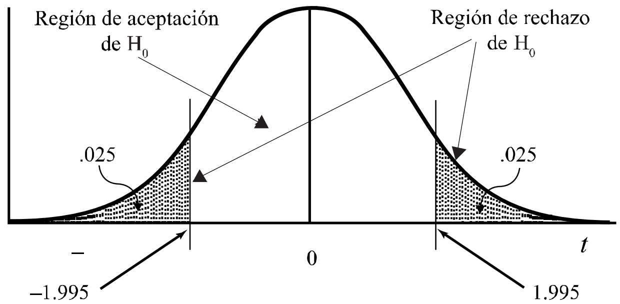


Conclusión: se acepta H_0, por lo tanto, la conjetura realizada por el jefe de servicio al cliente es correcta.

Ejercicio 2

1. $$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(72-76)-(0)}{\sqrt{\dfrac{20^2}{40} + \dfrac{10^2}{50}}} = 1.73$$

2. $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ vs $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
   $t_c = -13.9438$
   $gl = 68$, Prueba de dos colas $\alpha/2 = 0.025$, $t_{tablas} = 1.995$
   Zonas de rechazo:

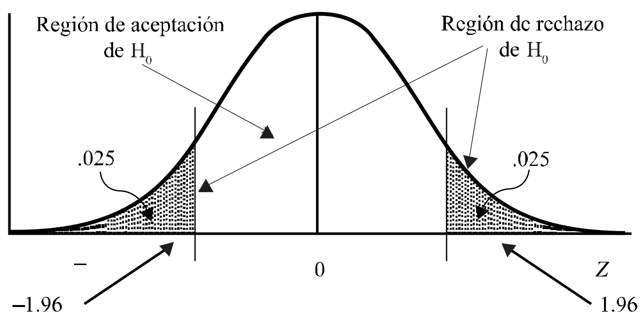


Conclusión: dado que t_c está en la región de rechazo, se rechaza H_0; esto quiere decir que hay diferencia entre el tiempo en que los clientes de cada tienda reciben el catálogo.

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. H_0: $\mu = 90\%$ vs H_1: $\mu \neq 90\%$
   $Z_c = -12.3693$
   $Z_{tablas} = 1.96$

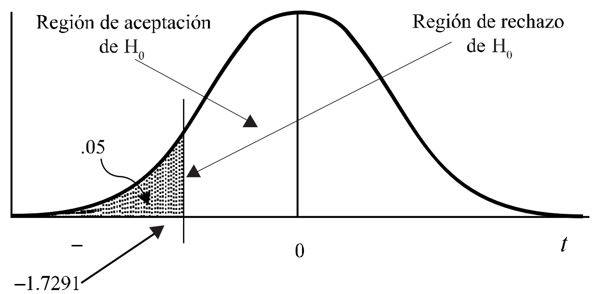
Zonas de rechazo para H_o.



Conclusión: dado que el valor de Z_c se encuentra en la zona de rechazo, se rechaza H_0, por lo tanto, la hipótesis del gerente es incorrecta.

2. H_0: $\mu \geq 34$ platos vs H_1: $\mu < 34$ platos
   $t_c = -5.3968$
   $gl = 19$
   $t_{tablas} = t_{0.05,\,19} = 1.7291$, dado que la zona de rechazo es la izquierda, el valor se considera negativo.

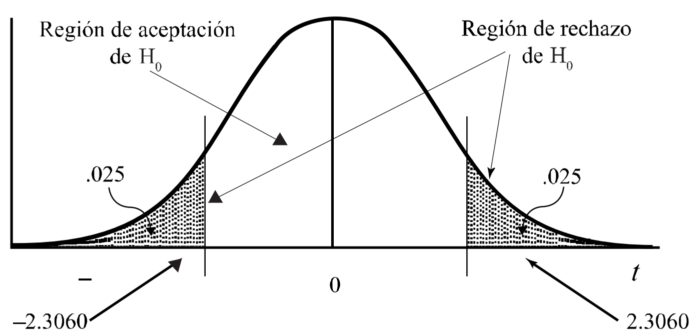
Zona de rechazo para H_0.



Conclusión: dado que el valor de t_c se encuentra en las zona de rechazo, se rechaza H_0, por lo tanto, la compañía tendrá que mejorar su detergente ya que la espuma no dura lo suficiente para lavar más de 34 platos.

3. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
   $t_c = 0.422739$
   $gl = 8$, Prueba de dos colas $\alpha/2 = 0.025$
   $t_{tablas} = t_{0.025,8} = 2.3060$

Zonas de rechazo para H_o.



Conclusión: dado que el valor de t_c se encuentra en la zona de aceptación, se acepta H_0, por lo tanto, no hay evidencia que demuestre diferencia entre los proveedores.

Respuestas a la autoevaluación

1. a)
2. a)
3. a)
4. d)
5. a)
6. c)
7. a)
8. b)
9. a)
10. a)