Unidad 5

Modelo de transporte

Objetivos:

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Construirá el modelo de transporte asociado a un problema.
- Resolverá problemas de transporte con los métodos de la esquina noroeste, método de aproximación de Vogel y el método Modi.
- Resolverá problemas de asignación aplicando el Método Húngaro.
- Resolverá problemas de aplicación de maximización de tiempos y movimientos.

Introducción

En los capítulos anteriores se han mencionado diferentes tipos de problemas para los cuales la investigación de operaciones, a través de la solución de modelos matemáticos, apoya la toma de decisiones. En este capítulo ampliamos el catálogo del tipo de problemas que al finalizar el curso podremos resolver, introduciendo los algoritmos de solución del **Problema de transporte** y del **Problema de asignación**, ambos con alta presencia en cualquier tipo de negocio.

El problema de transporte está relacionado principalmente con determinar la manera óptima de transportar bienes, mientras que en el problema de asignación se persigue realizar la asignación óptima de personas a ciertas tareas; además, se verá que el problema de asignación es en realidad un caso especial del modelo de transporte.

Asociados a los dos problemas antes descritos, se obtendrán los modelos correspondientes para ser resueltos mediante el método de la esquina noroeste, método de Vogel y método de Modi para el problema de transporte; mientras que utilizaremos el Método Húngaro para el problema de asignación.

5.1. Definición del modelo

Si observamos cualquier tipo de industria, empresa o negocio, podemos llegar a la conclusión de que en cualquier actividad de las mencionadas se encuentra presente el transporte de bienes o productos desde los centros de producción denominados *orígenes* a los centros de consumo llamados *destinos*: por lo que el llevar a cabo esta actividad de manera óptima, es decir, al menor costo posible, nos representará ventajas económicas y competitivas. El transporte de bienes o productos, materia prima, equipos, etc., está inmerso en la tendencia actual de la globalización, por ejemplo, los productos textiles que se manufacturan en un país, se etiquetan en otro y tienen una distribución a nivel internacional como productos terminados.

En la construcción de todo modelo es necesario contar con información, por esto suponemos que conocemos los costos unitarios de transporte desde cada uno de los *orígenes* a cada uno de los *destinos* del problema de transporte, así como la *oferta* y *demanda* de cada centro. Utilizamos el término *oferta* (a) como la cantidad de bienes o productos disponibles en cada *origen*, centro de producción, fábrica o taller, es decir, del centro de producción, y el término *demanda* (d) lo asociamos con la cantidad de bienes o productos que cada *destino* requiere.

Con la información anterior es evidente que las variables de decisión son la cantidad de productos que se envían del *origen i* al *destino j*, lo cual denotamos por x_{ij}. Los costos unitarios por transportar un producto del *i-ésimo origen* al *j-ésimo destino* se denotan como c_{ij}. Entonces, la función objetivo asociada al problema de transporte representa el costo total de transporte.

La función objetivo se obtiene de la suma de todos los productos del costo unitario por el número de bienes enviados desde cada *origen* a cada *destino*, es decir:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ con } i = 1,2,\ldots,n \quad (1)$$ Restricción de la oferta (a) de cada *origen.*

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \text{ con } j = 1,2,\ldots,m \quad (2)$$ Restricción de la demanda (d) de cada *destino.*

Para este modelo se supone que existe el equilibrio entre la oferta y la demanda, es decir, que se cumple la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Si no se cumple esta igualdad, se anexa un origen o destino *artificial*, según sea el caso, donde se producirá o recibirá, según corresponda el exceso de productos, ya sea para la oferta en el primer caso o para la demanda en el segundo.

También está presente en este modelo la condición de no negatividad, expresada como a continuación se presenta:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para toda } i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$$

En resumen, el modelo de transporte de forma general se puede escribir como:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \text{ con } \ i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \ \text{ con } \ j = 1,2,\ldots,m$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \text{ para toda } j = 1,2,\ldots,m \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Este modelo tiene como objetivo *minimizar* el costo total de transportar los productos desde cada *origen* a cada *destino*, satisfaciendo la demanda en todo momento. De manera esquemática, el problema de transporte se puede representar como en la figura 5.1.

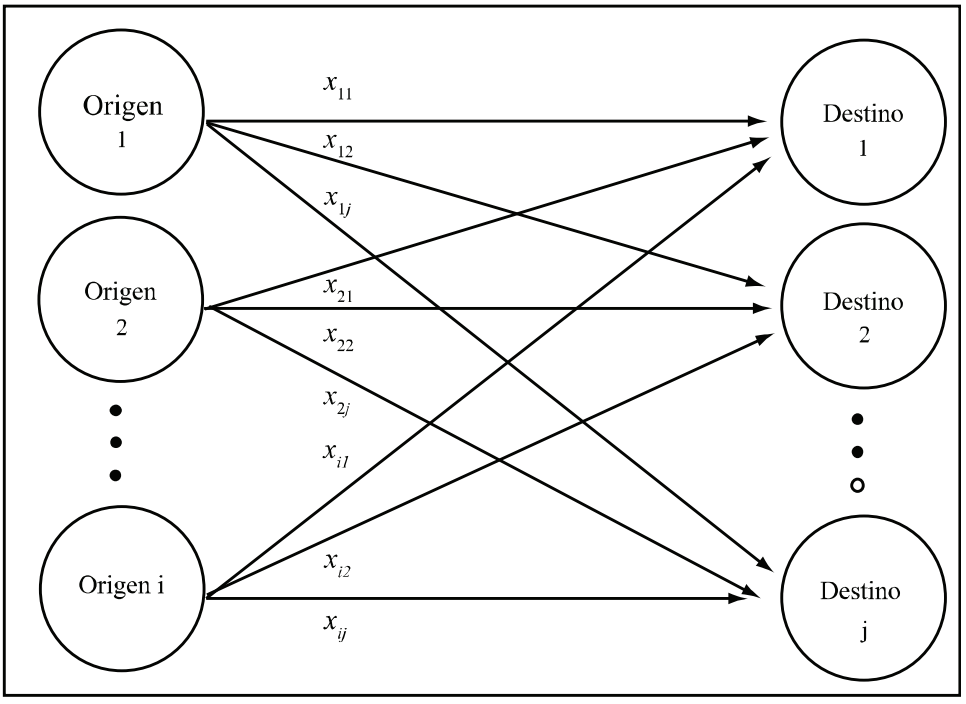

Figura 5.1. Representación esquemática del problema de transporte.

Para mostrar el uso del modelo de transporte se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1 Una empresa dedicada a la importación y distribución de computadoras cuenta con socios en Inglaterra y Alemania como países proveedores, y tres puntos de distribución, identificados como Región 1, Región 2 y Región 3. Por su parte, Inglaterra tiene disponibles 7200 computadoras, mientras que en Alemania la existencia alcanza las 5300. Se sabe que la Región 1 requiere de 5500 computadoras, mientras que tanto Región 2 como Región 3 necesitan 3500 computadoras cada una. Los costos de transporte unitarios asociados desde cada *origen* a cada *destino*, se muestran en la siguiente tabla:

	Región 1	**Región 2**	**Región 3**
Inglaterra	\$12	\$7	\$10
Alemania	\$8	\$11	\$9

Se desea conocer de qué país y en qué cantidad deben enviarse las computadoras a cada Región, al menor costo posible.

Las variables x_{ij} representan el número de unidades que se envían del *i*-ésimo origen al *j-ésimo* destino. En este caso, el número de orígenes es $i = 1,2$ y tres destinos $j = 1,2,3$.

De la tabla de costos presentada, se obtienen los costos c_{ij} y con éstos se forma la función objetivo:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 12x_{11} + 7x_{12} + 10x_{13} + 8x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23}$$

Por otra parte, se comprueba que la oferta (a) sea igual a la demanda (d), es decir:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 7200 + 5300 = 12500$$
$$\sum_{j=1}^{3} d_j = 5500 + 3500 + 3500 = 12500$$

El número de computadoras que pueden ser enviadas desde cada país a cada una de las regiones de distribución x_{ij}, debe cumplir con las cantidades limitantes:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} = 7200$$
$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} = 5300$$

Por otro lado, las restricciones de demanda que tiene cada país se expresan con las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i1} = x_{11} + x_{21} = 5500$$
$$\sum_{i=1}^{2} x_{i2} = x_{12} + x_{22} = 3500$$
$$\sum_{i=1}^{2} x_{i3} = x_{13} + x_{23} = 3500$$

En resumen, el Modelo de transporte está dado por:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 12x_{11} + 7x_{12} + 10x_{13} + 8x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} = 7200$$
$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} = 5300$$
$$\sum_{i=1}^{2} x_{i1} = x_{11} + x_{21} = 5500$$
$$\sum_{i=1}^{2} x_{i2} = x_{12} + x_{22} = 3500$$
$$\sum_{i=1}^{2} x_{i3} = x_{13} + x_{23} = 3500$$

$x_{ij} \geq 0$ para toda $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$

5.2. Algoritmo de transporte

El modelo de transporte es un caso particular de programación lineal, sin embargo, su solución por los métodos que hasta el momento hemos estudiado, representa una gran inversión de tiempo y poder de cómputo, motivo por lo que se han propuesto otros métodos para resolver el problema de transporte. Estudiaremos los siguientes: Método de la esquina noroeste, Método de aproximación de Vogel y Método de Modi, para resolver los modelos asociados al problema de transporte.

Tabla inicial y algoritmo de transporte

Cualquiera que sea el método por el cual se resuelva el problema de transporte, primero es necesario construir lo que denominaremos *Tabla inicial*; en ésta se concentra la información de los costos unitarios de transporte de todos los orígenes a todos los destinos, así como la oferta y la demanda de cada uno de ellos; sobre la tabla inicial, se opera para determinar el valor de las variables de decisión. Los pasos a seguir para la construcción de la tabla se muestran a continuación.

Construcción de la tabla inicial:

1. Verificar que *oferta total = demanda total* .

2. Construir una tabla de *r* filas y *s* columnas. Donde *r* es el número de orígenes más dos y *s* es el número de destinos más dos.

3. En la primera fila, a partir de la segunda columna, escribir el nombre de todos los destinos o una etiqueta que los identifique claramente. En la última celda de esta fila escribir la etiqueta *oferta*.

4. En la primera columna, a partir de la segunda fila, escribir el nombre de todos los orígenes o una etiqueta que los identifique claramente. En la última celda de esta columna escribir la etiqueta *demanda*.

5. En las intersecciones de cada fila y columna, escribir el costo de transportar una unidad desde el origen asociado a esa fila hasta el destino asociado a esa columna.

6. En la columna *oferta* se coloca la oferta del origen asociado al origen en cada fila.

7. En la fila *demanda* se coloca la demanda requerida asociada al destino en cada columna.

Con estos siete pasos se obtiene la tabla inicial del problema de transporte. Diferentes autores utilizan diversos formatos de la tabla inicial; sin embargo, debido a la experiencia que se ha acumulado en la investigación de operaciones, se propone utilizar el formato de tabla inicial que se observará en los siguientes ejemplos y ejercicios.

Ejemplo 2 Utilizando los datos del ejemplo 1, se tiene la siguiente tabla inicial:

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12	7	10	7200
Alemania	8	11	9	5300
Demanda	5500	3500	3500	

Con la tabla inicial planteada para un problema de transporte, es momento de aplicar alguno de los métodos de solución. Así que a continuación se presenta el algoritmo general para resolver problemas de transporte.

Algoritmo general

1. Construir la tabla inicial del problema de transporte.

2. Buscar una solución inicial y verificar que sea óptima mediante las herramientas matemáticas:

   - Método de la esquina noroeste.
   - Método de Vogel.
   - Método de Modi.

Y si se encontrara la solución óptima termina el proceso; en caso contrario, continúa.

3. Realizar los ajustes necesarios para encontrar una mejor solución y continuar desde el paso 2.

Enseguida se presenta el desarrollo de las herramientas antes mencionadas:

5.2.1. Método de la esquina noroeste

El método de la esquina noroeste consta, de manera resumida, de los siguientes pasos:

1. Obtener la tabla inicial del problema de transporte.

2. Asignar en la celda de la esquina noroeste de la tabla, celda (1,1), tantas unidades de producto como sea posible.

3. Ajustar la *oferta* y *demanda* según corresponda y cancelar las celdas restantes de la fila o columna que ya está satisfecha.

4. Trasladarse hacia la celda de la derecha (si se canceló la columna) o hacia la celda de abajo (si se canceló la fila) y asignar tantas unidades como sea posible. Si es la última celda disponible termina, en otro caso, continuar en el paso tres.

5. Interpretar la solución factible del modelo con el valor de las variables x_{ij}.

6. Calcular los costos marginales de las celdas no básicas. Si los costos marginales son cantidades positivas, la solución es óptima y el proceso termina. Si los costos marginales son cantidades negativas, se requiere formar otra tabla.

Ejemplo 3 Aplicar el método de la esquina noroeste al problema de transporte del ejemplo de las computadoras (ejemplo 1).

1. Obtener la tabla inicial del problema de transporte.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12	7	10	7200
Alemania	8	11	9	5300
Demanda	5500	3500	3500	

2. Colocar en la celda de la esquina noroeste de la tabla, celda (1,1), tantas unidades de producto como sea posible.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 5500	7	10	7200
Alemania	8	11	9	5300
Demanda	5500	3500	3500	

Para realizar la asignación se compara el valor de la demanda y la oferta que corresponde a la celda y se coloca en máximo valor posible entre la oferta y la demanda, es decir, el menor valor de los dos comparados.

3. Ajustar la *oferta* y *demanda* según corresponda y cancelar la fila o columna que ya está satisfecha.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 5500	7	10	7200 1700
Alemania	8	11	9	5300
Demanda	5500 0	3500	3500	

En este caso, se canceló la primera columna, y la nueva oferta ajustada de Inglaterra es de 1700, lo cual se indica en la celda correspondiente.

4. Trasladarse hacia la celda de la derecha (si se canceló la columna) o hacia la celda de abajo (si se canceló la fila) y asignar tantas unidades como sea posible. Si es la última celda disponible termina, en otro caso, continuar en el paso tres.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 5500	7 1700	10	7200 0
Alemania	8	11	9	5300
Demanda	5500 0	3500 1800	3500	

Como se canceló la primera columna, se avanza hacia la derecha en la primera fila y se asignan 1700 unidades. Se ajusta la oferta y la demanda. Debido a que ésta no es la última celda disponible, continuamos.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 5500	7 1700	10	7200 0
Alemania	8	11 1800	9	5300 3500
Demanda	5500 0	3500 0	3500	

Observamos que es necesario continuar con el algoritmo, entonces:

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 5500	7 1700	10	7200 0
Alemania	8	11 1800	9 3500	5300 0
Demanda	5500 0	3500 0	3500 0	

En la última tabla obtenida, ya no hay celdas disponibles, ya que cada celda o bien tiene cierta cantidad de unidades asignadas o fue cancelada. Las celdas con unidades asignadas se conocen como **celdas básicas** y a las celdas canceladas se les llama **celdas no básicas**.

5. Interpretar la solución factible del modelo con el valor de las variables x_{ij}.

   Para interpretar la solución del modelo se recupera el valor de cada variable x_{ij}, las cuales corresponden a las celdas básicas C(*i, j*).

   Para este problema las celdas básicas con sus respectivas variables de decisión, son:

   C(1,1) con $x_{11} = 5500$
   C(1,2) con $x_{12} = 1700$
   C(2,2) con $x_{22} = 1800$
   C(2,3) con $x_{23} = 3500$

   Entonces, el costo del modelo de transporte está dado por la suma de los productos del costo unitario por el número de unidades asignadas en cada celda básica.

   $$Z = 5500(12) + 1700(7) + 1800(11) + 3500(9)$$
   $$Z = 129200$$

   Por lo tanto, la primera solución factible significa que se deben enviar 5500 y 1700 computadoras desde Inglaterra a la Región 1 y Región 2, respectivamente. Desde Alemania, 1800 y 3500 computadoras a la Región 2 y Región 3, respectivamente, con un costo total de transporte de $129,200.00.

6. Calcular los costos marginales[1] de las celdas no básicas. Si los costos marginales son cantidades positivas, la solución es óptima y el proceso termina. Si los costos marginales son cantidades negativas, se requiere formar otra tabla.

   Para este caso, las celdas no básicas son C(1,3) y C(2,1). En este momento decidimos presentar hasta la primera solución factible, ya que si bien pueden calcularse los costos marginales en este punto, posteriormente se presentará el método Modi para este efecto.

[1] Un costo marginal representa el aumento en los costos totales que resulta de la producción o trasporte de una unidad adicional.

5.2.2. Método de Vogel

El método de aproximación de Vogel o simplemete Método de Vogel, tiene la siguiente estructura:

1. Obtener la tabla inicial del problema de transporte.

2. Anexar a la tabla inicial una fila y una columna con la etiqueta *Penalidad i* en ambas.

3. Calcular la penalidad para toda fila y columna colocando este valor en la columna y fila anexadas.

   a) La penalidad es el valor absoluto de la diferencia de los dos costos menores por cada fila y cada columna.

4. Seleccionar la *penalidad* mayor de todas las calculadas y ubicar la celda con el menor costo de la fila o columna de la penalidad seleccionada (*los empates entre penalidades de mayor valor se rompen arbitrariamente*). En la celda de menor costo ubicada, asignar tantas unidades como sea posible y ajustar la oferta y demanda correspondientes.

5. Cancelar la fila o columna que se haya satisfecho. Si sólo queda una fila o columna sin asignación, distribuir las cantidades restantes de la oferta en las celdas disponibles. En caso contrario, volver al paso 3.

6. Toda vez concluida la asignación de todas las unidades disponibles, calcular el costo del modelo de transporte e interpretar la solución.

7. Calcular los costos marginales de las celdas no básicas. Si se tienen costos marginales mayores o iguales a cero, la solución es óptima. En otro caso, se requiere ajustar la asignación con otra tabla.

Ejemplo 4 Aplicar el método Vogel al problema de transporte del ejemplo de las computadoras (ejemplo 1).

1. Obtener la tabla inicial del problema de transporte.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12	7	10	7200
Alemania	8	11	9	5300
Demanda	5500	3500	3500	

2. Anexar a la tabla inicial una fila y una columna con la etiqueta *Penalidad i* en ambas.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta	Penalidad 1
Inglaterra	12	7	10	7200	
Alemania	8	11	9	5300	
Demanda	5500	3500	3500	12500	
Penalidad 1					

El formato de la tabla sólo es una recomendación para la fácil aplicación del método de Vogel.

3. Calcular la penalidad para toda fila y columna colocando este valor en la columna y fila anexadas.

   a) La penalidad es el valor absoluto de la diferencia de los dos costos menores por cada fila y cada columna.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta	Penalidad 1
Inglaterra	12	7	10	7200	|7-10|=3
Alemania	8	11	9	5300	|8-9|=1
Demanda	5500	3500	3500	12500	
Penalidad 1	|12-8|=4	|7-11|=4	|10-9|=1		

4. Seleccionar la *penalidad* mayor de todas las calculadas y ubicar la celda con el menor costo de la fila o columna de la penalidad seleccionada (*los empates entre penalidades de mayor valor se rompen arbitrariamente*). En la celda de menor costo ubicada, asignar tantas unidades como sea posible y ajustar la oferta y demanda correspondientes.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta	Penalidad 1
Inglaterra	12	7 3500	10	7200 3700	|7-10|=3
Alemania	8	11	9	5300	|8-9|=1
Demanda	5500	3500 0	3500	12500	
Penalidad 1	|12-8|=4	|7-11|=4	|10-9|=1		

Aunque existe un empate en el valor de la penalidad mayor, el mismo se rompe arbitrariamente y para este caso, de la columna se selecciona la celda (1,2) para la primera asignación de 3500.

5. Cancelar la fila o columna que se haya satisfecho. Si sólo queda una fila o columna sin asignación, distribuir las cantidades restantes de la oferta en las celdas disponibles. En otro caso, volver al paso 3.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta	Penalidad 1
Inglaterra	12	7 3500	10	7200 3700	|7-10|=3
Alemania	8	11	9	5300	|8-9|=1
Demanda	5500	3500 0	3500	12500	
Penalidad 1	|12-8|=4	|7-11|=4	|10-9|=1		

Como todavía quedan más de una fila o columna sin asignación es necesario calcular una nueva penalidad, por lo que volvemos al paso 3. A partir de este momento abreviaremos el término penalidad con una "P" en las tablas.

Entonces, se anexan una columna y fila más para calcular la penalidad 2, de las cuales se selecciona la mayor.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta	P 1	P 2
Inglaterra	12	7 3500	10	7200 3700	|7-10|=3	|12-10|=2
Alemania	8	11	9	5300	|8-9|=1	|8-9|=1
Demanda	5500	3500 0	3500	12500		
P1	|12-8|=4	|7-11|=4	|10-9|=1			
P2	|12-8|=4		|10-9|=1			

A continuación se asignan las unidades y se ajustan la oferta y demanda correspondientes.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta	P 1	P 2
Inglaterra	12	7 3500	10	7200 3700	|7-10|=3	|12-10|=2
Alemania	8 5300	11	9	5300 0	|8-9|=1	|8-9|=1
Demanda	5500 200	3500 0	3500	12500		
P1	|12-8|=4	|7-11|=4	|10-9|=1			
P2	|12-8|=4		|10-9|=1			

Ahora es necesario cancelar la fila de Alemania:

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta	P 1	P 2
Inglaterra	12	7 3500	10	7200 3700	|7-10|=3	|12-10|=2
Alemania	8 5300	11	9	5300 0	|8-9|=1	|8-9|=1
Demanda	5500 200	3500 0	3500	12500		
P1	|12-8|=4	|7-11|=4	|10-9|=1			
P2	|12-8|=4		|10-9|=1			

Como sólo queda una fila sin asignar en la tabla, ya no calculamos otra penalidad, simplemente asignamos las unidades en las celdas cumpliendo tanto con la restricción de oferta como con la de la demanda.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta	P 1	P 2
Inglaterra	12 200	7 3500	10 3500	7200 0	|7-10|=3	|12-10|=2
Alemania	8 5300	11	9	5300 0	|8-9|=1	|8-9|=1
Demanda	5500 0	3500 0	3500 0	12500		
P1	|12-8|=4	|7-11|=4	|10-9|=1			
P2	|12-8|=4		|10-9|=1			

6. Toda vez concluida la asignación de todas las unidades disponibles, calcular el costo del modelo de transporte e interpretar la solución.

   El costo asociado a este modelo de transporte se calcula con el valor de las celdas básicas como:

   $x_{11} = 200$, $x_{12} = 3500$, $x_{13} = 3500$ y $x_{21} = 5300$, con un costo de
   $Z = 200(12) + 3500(7) + 3500(10) + 5300(8)$
   $Z = 104300$

   Esto quiere decir que deben enviarse 200, 3500 y 3500 computadoras desde Inglaterra a la Región 1, Región 2 y Región 3, respectivamente. Desde Alemania, 5300 computadoras a la Región 1, con un costo de transporte total de $104,300.00.

7. Calcular los costos marginales de las celdas no básicas. Si se tienen costos marginales mayores o iguales a cero, la solución es óptima. En otro caso se requiere ajustar la asignación con otra tabla.

   Para este caso las celdas no básicas son C(2,2) y C(2,3) y para calcular sus costos marginales se presentará enseguida el Método de Modi.

5.2.3. Método de Modi

El Método de Modi nos ofrece la oportunidad de calcular costos marginales basados en los valores de las variables de decisión del modelo, pero aunado a esto también nos indica la celda no básica en la cual se deben realizar los ajustes para obtener una mejor solución. Es por esta razón que después de presentar los métodos de la esquina noroeste y de Vogel, cerramos este capítulo con el Método de Modi.

Método de Modi

A partir de una tabla inicial con la primera solución factible calculada por cualquier método (esquina noroeste o Vogel):

Paso 1. Calcular los multiplicadores (u_i, v_j) y los costos marginales $(c.m.)$.

Los multiplicadores (u_i, v_j) están asociados a toda celda básica y su expresión es:

$$Celda(i, j);\ u_i + v_j = c_{ij}$$

Esto es un sistema de *m+n–1* ecuaciones y *m+n* incógnitas. Los valores de los multiplicadores se obtienen suponiendo un valor *arbitrario* para uno de los multiplicadores y se calcula el resto, resolviendo los *m+n–1* multiplicadores restantes.

Los costos marginales están asociados a toda celda no básica, con la expresión:

$$Celda(i, j);\quad c.m. = c_{ij} - u_i - v_j$$

Si todos los costos marginales son *no negativos*, la solución es óptima. Termina.

Paso 2. Si existe por lo menos un c.m. negativo, tomar la celda con mayor valor negativo. Crear un circuito con todos los vértices en celdas de variables básicas. Es decir, encontrar la trayectoria de la variable "no básica" que entrará a la solución.

Paso 3. Ajustar el valor de x_{ij} en las celdas del circuito, comenzando por sumar la variable θ a la celda seleccionada en el Paso 2, en el sentido de las manecillas del reloj, y alternando una resta y suma de θ en cada celda de la trayectoria hasta regresar a la celda primera, resolver una desigualdad (≥ 0) para θ y ajustar la solución. En todo caso volver al Paso 1.

Ejemplo 5 La solución inicial obtenida al problema de las computadoras con el método de la esquina noroeste se muestra en la siguiente tabla:

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 5500	7 1700	10	7200 0
Alemania	8	11 1800	9 3500	5300 0
Demanda	5500 0	3500 0	3500 0	

$x_{11} = 5500$, $x_{12} = 1700$, $x_{22} = 1800$ y $x_{23} = 3500$; con $Z = 129200$.

Para determinar si es óptima esta solución inicial, o bien para hacerla óptima, se aplicará el Método de Modi:

Paso 1. Calcular los multiplicadores (u_i, v_j) y los costos marginales $(c.m.)$.

Los multiplicadores (u_i, v_j) están asociados a toda celda básica y su expresión es:

$$\begin{aligned} &Celda(i,j); && u_i + v_j = c_{ij} \\ &Celda(1,1); && u_1 + v_1 = c_{11}; \\ &Celda(1,2); && u_1 + v_2 = c_{12} \\ &Celda(2,2); && u_2 + v_2 = c_{22} \\ &Celda(2,3); && u_2 + v_3 = c_{23} \end{aligned}$$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 12 \\ u_1 + v_2 &= 7 \\ u_2 + v_2 &= 11 \\ u_2 + v_3 &= 9 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, suponiendo $u_1 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 + v_1 &= 12 \\ 0 + v_2 &= 7 \\ u_2 + 7 &= 11 \\ 4 + v_3 &= 9 \end{aligned}$$

Los multiplicadores asociados a las celdas básicas son:

$$u_1 = 0$$
$$v_1 = 12$$
$$v_2 = 7$$
$$u_2 = 4$$
$$v_3 = 5$$

Los costos marginales están asociados a toda celda no básica, con la expresión:

$$Celda(i,j); \qquad c.m. = c_{ij} - u_i - v_j$$
$$Celda(1,3); \qquad c.m. = c_{13} - u_1 - v_3$$
$$Celda(2,1); \qquad c.m. = c_{21} - u_2 - v_1$$

Utilizando el valor calculado de los multiplicadores, encontramos los costos marginales de la primera solución factible:

$$Celda(1,3) \qquad c.m. = 10 - 0 - 5 = 5$$
$$Celda(2,1) \qquad c.m. = 8 - 4 - 12 = -8$$

Como el costo marginal de la celda (2,1) es negativo, generamos otra solución ya que ésta no es óptima.

Paso 2. Si existe por lo menos un c.m. negativo, tomar la celda con mayor valor negativo. Crear un circuito con todos los vértices en celdas de variables básicas (el más simple posible). Es decir, encontrar la trayectoria de la variable "no básica" que entrará a la solución.

Para este caso la celda con mayor valor negativo es C(2,1), por lo que el circuito es:

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 → 5500	7 ↓ 1700	10	7200 → 0
Alemania	8 ↑	11 ← 1800 ↓	9 3500	5300 → 0
Demanda	5500 → 0	3500 → 0	3500 → 0	

Observe el circuito señalado por las flechas en la tabla.

Paso 3. Ajustar el valor de x_{ij} en las celdas del circuito, comenzando por sumar la variable θ a la celda seleccionada en el Paso 2, en el sentido de las manecillas del reloj, y alternar una resta y suma de θ en cada celda de la trayectoria hasta regresar a la celda primera. Resolver para θ y ajustar la solución. En todo caso volver al Paso 1.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 5500-θ →	7 1700+θ ↓	10	7200 0
Alemania	8 θ ↑	11 ← 1800-θ	9 3500	5300 0
Demanda	5500 0	3500 0	3500 0	

Ahora se plantea el sistema de desigualdades para obtener el valor de θ y ajustar los valores:

$$\theta \geq 0$$
$$5500 - \theta \geq 0$$
$$1700 + \theta \geq 0$$
$$1800 - \theta \geq 0$$

El valor máximo posible de θ que resuelve el sistema es:

$$\theta = 1800$$

Entonces la tabla ajustada es:

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 3700	7 3500	10	7200 0
Alemania	8 1800	11 0	9 3500	5300 0
Demanda	5500 0	3500 0	3500 0	

De donde se desprende la solución inicial:

$x_{11} = 3700$, $x_{12} = 3500$, $x_{21} = 1800$ y $x_{23} = 3500$; con $Z = 114800$.

Para determinar si es óptima esta solución inicial, o bien para hacerla óptima, se aplicará el Método de Modi:

1. Calcular los multiplicadores (u_i, v_j) y los costos marginales $(c.m.)$.

   Los multiplicadores (u_i, v_j) están asociados a toda celda básica y su expresión es:

$Celda(i,j);\quad u_i + v_j = c_{ij}$
$Celda(1,1);\quad u_1 + v_1 = c_{11}$;
$Celda(1,2);\quad u_1 + v_2 = c_{12}$
$Celda(2,1);\quad u_2 + v_1 = c_{21}$
$Celda(2,3);\quad u_2 + v_3 = c_{23}$

Se obtiene el sistema:

$u_1 + v_1 = 12$
$u_1 + v_2 = 7$
$u_2 + v_1 = 8$
$u_2 + v_3 = 9$

Resolviendo el sistema suponiendo $u_1 = 0$:

$0 + v_1 = 12$
$0 + v_2 = 7$
$u_2 + 12 = 8$
$-4 + v_3 = 9$

Los multiplicadores asociados a las celdas básicas son:

$u_1 = 0$
$v_1 = 12$
$v_2 = 7$
$u_2 = -4$
$v_3 = 13$

Los costos marginales están asociados a toda celda no básica, con la expresión:

$Celda(i,j);\quad c.m. = c_{ij} - u_i - v_j$
$Celda(1,3);\quad c.m. = c_{13} - u_1 - v_3$
$Celda(2,2);\quad c.m. = c_{22} - u_2 - v_2$

Utilizando el valor de los multiplicadores calculado, encontramos los costos marginales de la primera solución factible:

$Celda(1,3)\quad c.m. = 10 - 0 - 13 = -3$
$Celda(2,2)\quad c.m. = 11 - (-4) - 7 = 8$

Como el costo marginal de la celda (1,3) es negativo, generamos otra solución ya que ésta no es óptima.

2. Si existe por lo menos un c.m. negativo tomar la celda con mayor valor negativo. Crear un circuito con todos los vértices en celdas de variables básicas. Es decir, encontrar la trayectoria de la variable "no básica" que entrará a la solución. Para este caso, la celda con mayor valor negativo es C(1,3), por lo que el circuito es:

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 3700	7 3500	10	7200 0
Alemania	8 1800	11 0	9 3500	5300 0
Demanda	5500 0	3500 0	3500 0	

Observa el circuito señalado por las flechas en la tabla.

3. Ajustar el valor de x_{ij} en las celdas del circuito, comenzando por sumar la variable θ a la celda seleccionada en el Paso 2, en el sentido de las manecillas del reloj, y alternando una resta y suma de θ en cada celda de la trayectoria hasta regresar a la celda primera. Resolver para θ y ajustar la solución. En todo caso volver al Paso 1.

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 3700-θ	7 3500	10 θ	7200 0
Alemania	8 1800+θ	11 0	9 3500-θ	5300 0
Demanda	5500 0	3500 0	3500 0	

Ahora se plantea el sistema de desigualdades para obtener el valor de θ y ajustar los valores:

$$\begin{aligned} \theta &\geq 0 \\ 3500 - \theta &\geq 0 \\ 1800 + \theta &\geq 0 \\ 3700 - \theta &\geq 0 \end{aligned}$$

El valor máximo posible de θ que resuelve el sistema es:

$$\theta = 3500$$

Entonces la tabla ajustada es:

	Región 1	Región 2	Región 3	Oferta
Inglaterra	12 200	7 3500	10 3500	7200 0
Alemania	8 5300	11 0	9 0	5300 0
Demanda	5500 0	3500 0	3500 0	

De donde se desprende la solución inicial:

Para determinar si es óptima esta solución inicial, o bien para hacerla óptima, se aplicará el Método de Modi:

$x_{11} = 200$, $x_{12} = 3500$, $x_{13} = 3500$ y $x_{21} = 5300$; con $Z = 104300$.

Los multiplicadores (u_i, v_j) están asociados a toda celda básica y su expresión es:

$Celda(i, j)$; $u_i + v_j = c_{ij}$
$Celda(1,1)$; $u_1 + v_1 = c_{11}$
$Celda(1,2)$; $u_1 + v_2 = c_{12}$
$Celda(1,3)$; $u_1 + v_3 = c_{13}$
$Celda(2,1)$; $u_2 + v_1 = c_{21}$

Se obtiene el sistema:

$$u_1 + v_1 = 12$$
$$u_1 + v_2 = 7$$
$$u_1 + v_3 = 10$$
$$u_2 + v_1 = 8$$

Resolviendo el sistema, suponiendo $u_1 = 0$:

$$0 + v_1 = 12$$
$$0 + v_2 = 7$$
$$0 + v_3 = 10$$
$$u_2 + 12 = 8$$

Los multiplicadores asociados a las celdas básicas son:

$$u_1 = 0$$
$$v_1 = 12$$
$$v_2 = 7$$
$$v_3 = 10$$
$$u_2 = -4$$

Los costos marginales están asociados a toda celda no básica, con la expresión:

$$\begin{aligned} &Celda(i,j); && c.m. = c_{ij} - u_i - v_j \\ &Celda(2,2); && c.m. = c_{22} - u_2 - v_2 \\ &Celda(2,3); && c.m. = c_{23} - u_2 - v_3 \end{aligned}$$

Utilizando el valor de los multiplicadores calculado, encontramos los costos marginales de la primera solución factible:

$$\begin{aligned} &Celda(2,2) && c.m. = 11 - (-4) - 7 = 8 \\ &Celda(2,3) && c.m. = 8 - (-4) - 10 = 2 \end{aligned}$$

Como todos los costos marginales son no negativos, la solución es óptima.

Es decir que:

Con $x_{11} = 200$, $x_{12} = 3500$, $x_{13} = 3500$ y $x_{21} = 5300$; con $Z = 104300$.

Esto quiere decir que deben enviarse 200, 3500 y 3500 computadoras desde Inglaterra a la Región 1, Región 2 y Región 3, respectivamente. Desde Alemania, 5300 computadoras a la Región 1, con un costo de transporte total de $104,300.00, que es la misma solución que obtuvimos para este problema con el Método de Vogel.

5.3. Modelo de asignación

Una de las actividades más comunes en los negocios es la asignación de la persona "ideal" para la eficiente realización de una tarea en particular; sin embargo, la manera de realizar esta asignación presenta ciertas dificultades implícitas, por ejemplo, ¿quién es la persona indicada para cada tarea?, ¿es mínimo el costo de esta asignación?, así como ¿qué tipo de información soporta la asignación realizada? Estas preguntas encuentran respuesta en el Modelo de asignación y su solución.

En general, la asignación tiene que ver con personas, pero también se utiliza para asignar plantas industriales, vehículos e incluso periodos de tiempo con tareas específicas.

La importancia de presentar y resolver el modelo de asignación radica en que se busca optimizar algún objetivo como:

- Minimizar tiempos de producción.
- Minimizar costos de asignación.
- Minimizar defectos de producción.

Debido a que el modelo de asignación es un caso particular del modelo de transporte; habitualmente, el primero se resolvía con las herramientas del segundo, pero dadas las características del modelo de asignación, la inversión en cálculos y tiempo de cómputo era demasiado alta. En consecuencia, dos matemáticos húngaros desarrollaron un algoritmo para resolver de manera eficiente el modelo de asignación, siendo éste conocido como el Método Húngaro.

Definición del modelo de asignación

La definición de un problema de asignación requiere que se cumplan las siguientes condiciones:

- El número de asignados es igual al número de tareas (este número se denota por *n*)
- A cada elegido se le asigna sólo a una tarea.
- Cada tarea debe realizarla sólo un asignado.
- Existe un costo c_{ij} asociado con el asignado i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ que realiza la tarea j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.
- El objetivo es determinar la asignación óptima que minimiza los costos totales.

Como para todo problema de programación lineal, es necesario definir las variables de decisión del problema y en este caso particular del modelo de asignación, las variables son:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si el asignado i realiza la tarea } j, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Las variables de decisión pueden tomar valores de 0 o 1 (binario).

El costo total y las restricciones del modelo están dados por las funciones:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeta a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

x_{ij} para toda i y j.

El modelo de asignación recién presentado es similar al modelo de transporte y bien podría resolverse con las mismas herramientas, pero, como ya lo hicimos notar, utilizaremos para resolverlo el Método Húngaro. En este sentido cabe mencionar que para este método se utiliza una representación tabular del problema de asignación en lugar del modelo matemático, razón por la cual presentamos directamente el algoritmo general.

Algoritmo general del método húngaro

Una vez definido el problema de asignación, se siguen los pasos:

1. Construir una tabla de $n+1$ por $n+1$ filas y columnas. En la primera columna, a partir de la segunda fila, colocar las etiquetas de los candidatos a asignar. En la primera fila, a partir de la segunda columna, colocar las etiquetas de las tareas. Los costos de la asignación i a la tarea j se colocan en la intersección de la fila con la columna correspondiente.

2. Identificar el costo menor por fila y restarlo a todos los elementos de la fila correspondiente.

3. En la tabla que resulte del punto anterior, identificar el costo menor por columna y restarlo a todos los elementos de la columna correspondiente.

4. Identificar los *ceros de asignación*, que son únicos en su fila y columna (puede haber más ceros en la fila o columna, pero sólo uno es de asignación). Los ceros de asignación son aquellos que forman una diagonal (como la diagonal principal de una matriz cuadrada) aunque para obtenerla se cambie la posición de una o varias columnas. La *posición de los ceros de asignación* indica la tarea que le corresponde a cada candidato de asignación. Si el número de *ceros de asignación* es igual al número de tareas, termina y calcula el costo del modelo. En caso contrario, continúa.

5. Cuando no es posible obtener todos los ceros de asignación se procede a:

   a) *Cubrir* todos los ceros de la tabla con el *menor* número de líneas verticales y horizontales.
   b) Seleccionar el costo menor *no cubierto* por línea alguna y *restarlo* a todos los costos no cubiertos. Sumar a los costos donde haya una intersección de las líneas, el costo menor seleccionado.
   c) Los costos cubiertos por una *sola* línea permanecen iguales.
   d) Volver al paso 4.

A continuación resolvemos el modelo de asignación, en un ejercicio simple, con la finalidad de ejemplificar el algoritmo para resolver el problema de asignación.

Ejemplo 6 Supón que a tres personas A, B y C se les deben asignar las tareas TI, TII y TIII. Sabiendo que los costos de asignar a la persona A en las tareas TI, TII y TIII, son \$11, \$9 y \$7, respectivamente; de igual forma para B, los costos son \$9, \$6 y \$12, para TI, TII y TIII; mientras que para C los costos son de \$8, \$12 y \$6 para las mismas tareas, determina la asignación para obtener el costo mínimo.

Con el problema de asignación definido se siguen los pasos:

1. Para este caso: construir una tabla de $3+1=4$ por $3+1=4$ filas y columnas.

	TI	TII	TIII
A	\$11	\$9	\$7
B	\$9	\$6	\$12
C	\$8	\$12	\$6

Ésta es la tabla del modelo de asignación correspondiente al problema planteado.

2. Identificar el costo menor por fila y restarlo a todos los elementos de la fila correspondiente.

	TI	TII	TIII	Costo menor
A	\$11	\$9	\$7	\$7
B	\$9	\$6	\$12	\$6
C	\$8	\$12	\$6	\$6

El costo en la última columna del lado derecho de la tabla se escribe para mostrar el procedimiento, pero puede omitirse siempre y cuando se sigan todos los pasos del algoritmo.

El resultado de restar el costo menor por fila, se muestra en la siguiente tabla:

	TI	TII	TIII
A	\$4	\$2	\$0
B	\$3	\$0	\$6
C	\$2	\$6	\$0

3. En la tabla que resulte del punto anterior, identificar el costo menor por columna y restarlo a todos los elementos de la columna correspondiente.

	TI	TII	TIII
A	\$4	\$2	\$0
B	\$3	\$0	\$6
C	\$2	\$6	\$0
Costo menor	\$2	\$0	\$0

Observa que el costo menor por columna para TII y TIII es cero. El resultado de la resta del costo menor por columna es:

	TI	TII	TIII
A	$2	$2	$0
B	$1	$0	$6
C	$0	$6	$0

4. Identificar los *ceros de asignación* que son únicos en su fila y columna (puede haber más ceros en la fila o columna, pero sólo uno es de asignación).

	TI	TII	TIII
A	$2	$2	$0
B	$1	$0	$6
C	$0	$6	$0

Para esta tabla se observa que los ceros de asignación están en las celdas (1,3), (2,2) y (3,1); para mostrar con más claridad la posición de los ceros de asignación, el Método Húngaro permite intercambiar columnas o filas para intentar encontrar una diagonal principal con todas las entradas igual a cero, como a continuación se muestra:

	TIII	TII	TI
A	$0	$2	$2
B	$6	$0	$1
C	$0	$6	$0

Donde se intercambió la columna de TI por la de TIII. Así, se observa que la *posición de los ceros de asignación* indica la tarea que le corresponde a cada candidato de asignación. Para este caso:

La persona A se asigna a la tarea TIII, persona B se asigna a la tarea TII y la persona C se asigna a la tarea TI.

Como el número de *ceros de asignación* es igual al número de tareas, tres en este caso, termina el método pues se ha determinado la asignación óptima, pero falta indicar el costo de tal asignación. Para calcular el costo del modelo, recuperamos de la tabla original los costos asociados a la asignación propuesta y sumamos para obtener el costo total, es decir, para A en la TIII $7, para B en TII $6 y para C en TI $8, entonces el costo total mínimo es $\$7+\$6+\$8=\$21$.

Ejemplo 7 Supón que a las tres personas A, B y C se les deben asignar las tareas TI, TII y TIII, pero, con cambios significativos en los costos, los cuales son para la persona A en las tareas TI, TII y TIII, $21, $18 y $23, respectivamente; de igual forma, para B los costos son $33, $28 y $43, para TI, TII y TIII, mientras que para C los costos son de $21, $25 y $24 para las mismas tareas. Determina la asignación para obtener el costo mínimo del modelo de asignación.

Con el problema de asignación definido, se siguen los pasos:

1. Para este caso: construir una tabla de 3 + 1= 4 por 3 + 1= 4 filas y columnas.

	TI	TII	TIII
A	$21	$18	$23
B	$33	$28	$43
C	$21	$25	$24

Ésta es la tabla del modelo de asignación correspondiente al problema planteado.

2. Identificar el costo menor por fila y restarlo a todos los elementos de la fila correspondiente.

	TI	TII	TIII	Costo menor
A	$21	$18	$23	$18
B	$33	$28	$43	$28
C	$21	$25	$24	$21

El costo en la última columna del lado derecho de la tabla se escribe para mostrar el procedimiento, pero puede omitirse siempre y cuando se sigan todos los pasos del algoritmo.

El resultado de restar el costo menor por fila, se muestra en la siguiente tabla:

	TI	TII	TIII
A	$3	$0	$5
B	$5	$0	$15
C	$0	$4	$3

3. En la tabla que resulte del punto anterior, identificar el costo menor por columna y restarlo a todos los elementos de la columna correspondiente.

	TI	TII	TIII
A	$3	$0	$5
B	$5	$0	$15
C	$0	$4	$3
Costo menor	$0	$0	$3

Observa que el costo menor por columna para TI y TII es cero. El resultado de la resta del costo menor por columna es:

	TI	TII	TIII
A	$3	$0	$2
B	$5	$0	$12
C	$0	$4	$0

4. Identificar los *ceros de asignación* que son únicos en su fila y columna (puede haber más ceros en la fila o columna, pero sólo uno es de asignación).

	TI	TII	TIII
A	$3	$0	$2
B	$5	$0	$12
C	$0	$4	$0

Para esta tabla se observa que el número de ceros de asignación no se puede igualar al número de tareas, tres para este caso, por lo que continuamos con el Paso 5 del algoritmo general.

5. Cuando no es posible obtener todos los ceros de asignación se procede a:

a) *Cubrir* todos los ceros de la tabla con el *menor* número de líneas verticales y horizontales.

	TI	TII	TIII
A	$3	$0	$2
B	$5	$0	$12
C	~~$0~~	~~$4~~	~~$0~~

El menor número de líneas verticales y horizontales para este caso se trazaron sobre la tabla.

b) Seleccionar el costo menor no cubierto por línea alguna y *restarlo* a todos los costos no cubiertos. Sumar a los costos donde haya una intersección de las líneas el costo menor seleccionado.

El costo menor no cubierto por línea alguna es \$2, así que la resta de \$2 a los demás costos no cubiertos genera la siguiente tabla:

	TI	TII	TIII
A	\$1		\$0
B	\$3		\$10
C			

La suma de \$2 a los elementos donde hay una intersección es:

	TI	TII	TIII
A	\$1		\$0
B	\$3		\$10
C		\$6	

c) Los costos cubiertos por una *sola* línea permanecen iguales.

	TI	TII	TIII
A	\$1	\$0	\$0
B	\$3	\$0	\$10
C	\$0	\$6	\$0

d) Volver al paso 4.

En el paso 4 se indica buscar los ceros de asignación, esto se muestra a continuación, intercambio la columna TI por la columna TIII.

	TIII	TII	TI
A	\$0	\$0	\$1
B	\$10	\$0	\$3
C	\$0	\$6	\$0

Así, se observa que la *posición de los ceros de asignación* indica la tarea que le corresponde a cada candidato de asignación. Para este caso:

La persona A se asigna a la tarea TIII, la persona B se asigna a la tarea TII y la persona C se asigna a la tarea TI.

Como el número de *ceros de asignación* es igual al número de tareas, tres en este caso, termina el método; para calcular el costo del modelo, recuperamos de la tabla original los costos asociados a la asignación propuesta y sumamos para obtener el costo total, es decir, para A en la TIII \$23, para B en TII \$28 y para C en TI \$21, entonces el costo total mínimo es $\$23 + \$28 + \$21 = \$72$.

Ejemplo 8 Los integrantes de la junta directiva de un grupo formado por cuatro empresas, E_1, E_2, E_3 y E_4, está considerando asignar a cada una de ellas una estrategia de reingeniería dentro de cuatro posibilidades A, B, C o D. Para realizar esta asignación, los ejecutivos de la mesa directiva calificaron el riesgo de implementar cada estrategia a cada empresa en una escala de 0 a 10 puntos, utilizando el número 10 como el riesgo mayor. Las calificaciones son las que se muestran en la siguiente tabla:

	A	**B**	**C**	**D**
$\mathbf{E_1}$	7	7	8	6
$\mathbf{E_2}$	7	9	9	10
$\mathbf{E_3}$	8	10	8	7
$\mathbf{E_4}$	6	8	10	8

Determina la estrategia de reingeniería que corresponde a cada empresa, tomando en cuenta que se requiere obtener la suma de calificaciones de riesgo más baja posible.

Para resolver este problema utilizamos el Método Húngaro, como se muestra a continuación:

Una vez definido el problema de asignación, aplicamos los pasos del algoritmo:

1. Construir una tabla de $n+1$ por $n+1$ filas y columnas.

	A	**B**	**C**	**D**
$\mathbf{E_1}$	7	7	8	6
$\mathbf{E_2}$	7	9	9	10
$\mathbf{E_3}$	8	10	8	7
$\mathbf{E_4}$	6	8	10	8

2. Identificar el riesgo menor por fila y restarlo a todos los elementos de la fila correspondiente.

	A	B	C	D	riesgo menor
E_1	7	7	8	6	6
E_2	7	9	9	10	7
E_3	8	10	8	7	7
E_4	6	8	10	8	6

La resta por filas es:

	A	B	C	D
E_1	1	1	2	0
E_2	0	2	2	3
E_3	1	3	1	0
E_4	0	2	4	2

3. En la tabla que resulte del punto anterior, identificar el riesgo menor por columna y restarlo a todos los elementos de la columna correspondiente.

	A	B	C	D	
E_1	1	1	2	0	
E_2	0	2	2	3	
E_3	1	3	1	0	
E_4	0	2	4	2	
	0	1	1	0	riesgo menor

Y la resta por columnas está dada por:

	A	B	C	D
E_1	1	0	1	0
E_2	0	1	1	3
E_3	1	2	0	0
E_4	0	1	3	2

4. Identificar los *ceros de asignación*. En este caso el número de ceros de asignación no es igual al número de estrategias, por lo que continuamos con el paso 5.

5. Cuando no es posible obtener todos los ceros de asignación se procede a:

   a) *Cubrir* todos los ceros de la tabla con el *menor* número de líneas verticales y horizontales.

	B	A	C	D
E_1	~~0~~	1	~~1~~	~~0~~
E_2	1	0	1	3
E_3	~~2~~	1	~~0~~	~~0~~
E_4	1	0	3	2

   En esta ocasión se intercambiaron columnas, pero aun así no se obtuvieron todos los ceros de asignación, por lo que continuamos con el proceso.

   b) Seleccionar el *riesgo* menor *no cubierto* por línea alguna y *restarlo* a todos los riesgos no cubiertos. Sumar a los riesgos donde haya una intersección de las líneas el riesgo menor seleccionado.

   El *riesgo* menor no cubierto es 1, por lo tanto la resta con los elementos no cubiertos, la suma a los elementos de las intersecciones y los costos cubiertos por una *sola* línea que permanecen iguales, están dados por:

	B	A	C	D
E_1	0	2	1	0
E_2	0	0	0	2
E_3	2	2	0	0
E_4	0	0	2	1

   c) Volver al paso 4.

   En el paso 4 identificamos los ceros de asignación del problema:

	D	A	C	B
E_1	0	2	1	0
E_2	2	0	0	0
E_3	0	2	0	2
E_4	1	0	2	0

Entonces, la asignación de este el problema es:

E_1	**D**	6
E_2	**A**	7
E_3	**C**	8
E_4	**B**	8
Riesgo mínimo		29

Es decir que en la empresa 1 se realizará la estrategia de reingeniería D, en la empresa 2 la estrategia A, en la empresa 3 la estrategia C y en la empresa 4 la estrategia de reingeniería B, con una suma total de riesgo de 29 puntos.

Cabe mencionar que este ejemplo cuenta con otras posibles asignaciones con el mismo nivel de riesgo.

Con este ejemplo concluimos el estudio del Método Húngaro, el cual es muy útil para resolver problemas de asignación. Un caso particular de los problemas de asignación son los problemas *no balanceados*. Cuando esto sucede simplemente se anexa una tarea o candidato a asignación ficticio, según corresponda, con todos los costos asociados igual a cero, acto seguido se aplica el método tal cual se presentó.

Ahora toca revisar algunas aplicaciones a problemas de tiempos y movimientos.

5.4. Aplicaciones de maximización de tiempos y movimientos

El estudio de tiempos y movimientos tiene sus orígenes en los principios de la administración científica, persiguiendo el objetivo de maximizar la producción distribuyendo el trabajo de forma óptima, es decir, asignando tareas a quien menor tiempo tardaba en realizar eficientemente las mismas. A través del tiempo y con el desarrollo de la tecnología se hicieron presentes casos donde además de tener la necesidad de asignar candidatos personas, también se trabaja con máquinas o actividades por grupos de trabajo; un ejemplo claro de esto es el desarrollo que los equipos de trabajo han tenido en las empresas, ya que un equipo o máquina altamente eficientes, desarrollan una tarea en un tiempo menor que su homólogo

de menor eficiencia, obteniendo como resultado, a fin de cuentas, un costo menor de producción, operación, etcétera.

Definición del modelo de asignación para tiempos y movimientos

La definición de un problema de asignación para tiempos y movimientos requiere que se cumplan las mismas condiciones del modelo de asignación, ya que es un caso particular del mismo. De igual forma, para problemas no balanceados se aplica la misma estrategia que en el problema de asignación. La diferencia, entonces, entre el problema de asignación y los casos de tiempos y movimientos, es que para el primero se busca un costo mínimo, mientras que para el segundo el objetivo es minimizar el *tiempo*. Así definimos el modelo de asignación para casos de tiempos y movimientos.

Las variables de decisión del problema también son binarias, dadas por:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si el asignado } i \textit{ realiza la tarea } j, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

El *tiempo* total y las restricciones del modelo están dados por las funciones:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeta a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

x_{ij} para toda i y j.

El modelo de asignación para tiempo y movimientos tiene por objetivo minimizar el tiempo total en el que se realiza cierto número de tareas, logrando con esto una optimización y mejora de cualquier proceso o negocio.

El modelo de asignación de tiempos y movimientos se resuelve utilizando el Método Húngaro, y como ya estamos familiarizados con el método, sencillamente lo recuperamos para su aplicación.

Ejemplo 9 Para llevar a cabo la fusión de dos corporativos, se identificaron cuatro actividades críticas y el tiempo para llevar cabo cada una de ellas por cuatro firmas consultoras que denotamos por F_1, F_2, F_3 y F_4. Las actividades son:

- Realización del plan de fusión (RPF).
- Negociación de acercamiento con el segundo corporativo (NDA).
- Ajustes del plan de fusión (APF).
- Negociación final y firma de la fusión (NFF).

El tiempo en que cada firma realiza las actividades está dado en la siguientes tablas:

Para la firma consultora F_1:

Actividad	Tiempo en días
RPF	160
NDA	130
APF	130
NFF	105

Para la firma consultora F_2:

Actividad	Tiempo en días
RPF	135
NDA	120
APF	155
NFF	110

Para la firma consultora F_3:

Actividad	Tiempo en días
RPF	140
NDA	110
APF	80
NFF	185

Para la firma consultora F_4:

Actividad	Tiempo en días
RPF	50
NDA	35
APF	70
NFF	175

Con esta información se desea encontrar la asignación óptima que minimice el tiempo en el que se lleva a cabo la negociación, considerando que cada actividad puede asignarse a cualquier firma consultora y que por política de la empresa no se puede contratar sólo a una de ellas.

Para resolver este problema utilizamos el Método Húngaro, como se muestra a continuación:

Una vez definido el problema de asignación, aplicamos los pasos del algoritmo:

1. Construir una tabla de $n+1$ por $n+1$ filas y columnas.

	RPF	NDA	APF	NFF
F_1	160	130	130	105
F_2	135	120	155	110
F_3	140	110	80	185
F_4	50	35	70	175

2. Identificar el tiempo menor por fila y restarlo a todos los elementos de la fila correspondiente.

	RPF	NDA	APF	NFF	tiempo menor
F_1	160	130	130	105	105
F_2	135	120	155	110	110
F_3	140	110	80	185	80
F_4	50	35	70	175	35

La resta por filas es:

	RPF	NDA	APF	NFF
F_1	55	25	25	0
F_2	25	10	45	0
F_3	60	30	0	105
F_4	15	0	35	140

3. En la tabla que resulte del punto anterior, identificar el costo menor por columna y restarlo a todos los elementos de la columna correspondiente.

	RPF	NDA	APF	NFF
F_1	55	25	25	0
F_2	25	10	45	0
F_3	60	30	0	105
F_4	15	0	35	140
	15	0	0	0 tiempo menor

Y la resta por columnas está por:

	RPF	NDA	APF	NFF
F_1	40	25	25	0
F_2	10	10	45	0
F_3	45	30	0	105
F_4	0	0	35	140

4. Identificar los *ceros de asignación*. En este caso el número de ceros de asignación no es igual al número de actividades, por lo que continuamos con el paso 5.

5. Cuando no es posible obtener todos los ceros de asignación, se procede a:

   a) *Cubrir* todos los ceros de la tabla con el *menor* número de líneas verticales y horizontales.

	RPF	NDA	APF	NFF
F1	40	25	25	0
F2	10	10	45	0
F3	~~45~~	~~30~~	~~0~~	~~105~~
F4	~~0~~	~~0~~	~~35~~	~~140~~

   b) Seleccionar el *tiempo* menor *no cubierto* por línea alguna y *restarlo* a todos los costos no cubiertos. Sumar a los costos donde haya una intersección de las líneas el costo menor seleccionado.

	RPF	NDA	APF	NFF	tiempo menor
F1	40	25	25	0	10
F2	10	10	45	0	
F3	~~45~~	~~30~~	~~0~~	~~105~~	
F4	~~0~~	~~0~~	~~35~~	~~140~~	

El *tiempo* menor es 10, por lo tanto la resta con los elementos no cubiertos es:

	RPF	NDA	APF	NFF
F1	30	15	15	
F2	0	0	35	
F3				
F4				

La suma a los elementos de las intersecciones queda como:

	RPF	NDA	APF	NFF
F1	30	15	15	
F2	0	0	35	
F3				115
F4				150

c) Los costos cubiertos por una *sola* línea permanecen iguales.

	RPF	NDA	APF	NFF
F1	30	15	15	0
F2	0	0	35	0
F3	45	30	0	115
F4	0	0	35	150

d) Volver al paso 4.

En el paso 4 identificamos los ceros de asignación del problema:

	NFF	NDA	APF	RPF
F1	0	15	15	30
F2	0	0	35	0
F3	115	30	0	45
F4	150	0	35	0

Entonces la asignación de este el problema es:

F1	NFF	105
F2	NDA	120
F3	APF	80
F4	RPF	50
Tiempo		355

Es decir que la firma consultora 1 realizará la negociación final y firma de la fusión, la consultora 2 la negociación de acercamiento, la consultora 3 hará el ajuste del plan de fusión y la consultora 4 realizará el plan de fusión. Todo el proceso requiere de 355 días.

Cabe mencionar que este ejemplo cuenta con dos asignaciones posibles, con la misma duración en tiempo, por lo que se deja al lector determinar la segunda asignación. Derivado de que la solución del problema tiene dos asignaciones posibles, también recae en el responsable decidir cuál de las dos asignaciones poner en práctica.

Ejercicios

Resuelve los siguientes ejercicios y casos de aplicación con el método apropiado, según el tipo de problema.

Modelo de transporte

1) Se requiere distribuir la producción de tres plantas con producciones mensuales de 14, 21 y 7 toneladas de granos hacia tres distribuidores con demandas mensuales de 15, 10 y 17 toneladas de granos. Los costos por transportar una tonelada de cada origen a cada uno de los destinos, están dadas en la siguiente tabla:

	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3
Planta 1	70	35	30
Planta 2	75	33	65
Planta 3	40	25	33

Con esta información encuentra la solución del problema de transporte, así como el costo del modelo. Utiliza el método de la esquina noroeste comprobando por el método de Modi.

2) Dos almacenes con un *stock* disponible de 1000 y 3750 unidades de computadoras, necesita transportar las computadoras a tres distribuidores al menudeo, con requisitos de 1250, 2000 y 1500 computadoras, respectivamente. Si los costos unitarios de transporte son:

	Dist. 1	Dist. 2	Dist. 3
Almacén 1	80	50	30
Almacén 2	35	60	75

Encuentra la solución del problema de transporte, así como el costo del modelo. Utiliza el método de la esquina noroeste y el método de Vogel, comparando ambos resultados, y comprueba la solución por el método de Modi, en ambos casos.

3) En los Puertos marítimos comerciales 1, 2 y 3, se encuentran atracados 12, 14 y 18 buques cargueros, respectivamente, todos con la misma materia prima. Los buques deben dirigirse a cuatro diferentes países A, B, C y D, los cuales necesitan 11 buques cada uno para satisfacer sus procesos de transformación.

Los costos unitarios por buque carguero están dados en la siguiente tabla en miles de dólares:

	País A	**País B**	**País C**	**País D**
Puerto 1	212	112	142	242
Puerto 2	222	102	202	262
Puerto 3	222	142	102	222

Encuentra la solución del problema de transporte, así como el costo del modelo. Utiliza el método de la esquina noroeste y el método de Vogel, comparando ambos resultados, y comprueba la solución por el método de Modi, en ambos casos.

Modelo de asignación

Resuelve los siguientes modelos de asignación utilizando el Método Húngaro para determinar la asignación óptima y el costo (en pesos) del modelo de asignación.

1)

	T1	T2	T3
A	5	8	9
B	10	4	7
C	4	10	6

2)

	T1	T2	T3
A	10	10	7
B	8	7	12
C	7	13	6

3)

	T1	T2	T3	T4
A	9	10	8	12
B	8	9	10	11
C	10	12	8	9
D	12	13	10	9

4)

	A	B	C
x	17	14	19
y	29	24	39
z	18	21	20

5)

	C1	C2	C3	C4
A	170	140	200	200
B	240	295	450	500
C	190	198	320	100
D	0	0	0	0

6)

	T1	T2	T3	T4
C1	11300	14500	19500	0
C2	12000	12500	13900	0
C3	19500	17500	22500	0
C4	17500	17000	15500	0

Aplicaciones de maximización de tiempos y movimientos

1) La elaboración de un producto terminado emplea tres tareas que pueden realizarse en tres máquinas diferentes, máquina manual, máquina semiautomática y máquina automática. Sin embargo, debido a la complejidad de cada tarea, las diversas máquinas presentan los siguientes tiempos en minutos de proceso en cada tarea:

	T1	T2	T3
A	6	7	9
B	9	8	9
C	6	5	7

Encuentra la asignación que minimiza el tiempo total en que se llevan a cabo todas las actividades.

2) El tiempo máximo para realizar tres tareas es de 60 días y, derivado de un estudio de tiempos y movimientos, se pudieron registrar los siguientes tiempos entre los equipos A, B y C para las mismas tres tareas; los datos están dados en días.

	T1	T2	T3
A	15	20	16
B	21	19	17
C	19	19	16

¿Cuál será el tiempo mínimo en el que se pueden realizar las tareas?

3) Como resultado de un estudio de tiempos y movimientos se obtuvieron los siguientes registros independientes de días invertidos en la realización de tres actividades:

	T1	T2	T3
A	15	13	18
B	15	15	14
C	15	13	16

Sabiendo que se espera realizar las tres tareas en el menor tiempo posible, indica la asignación para alcanzar el objetivo del menor tiempo.

4) La fusión de dos compañías de consultoría legal requiere de cuatro tareas críticas identificadas como:

- Realización del plan de fusión (A1).
- Negociación de acercamiento con el segundo corporativo (A2).
- Ajustes del plan de fusión (A3).
- Negociación final y firma de la fusión (A4).

Entre las dos compañías han integrado cuatro equipos de trabajo A, B, C y D, y suponen que los cuatro pueden llevar a cabo cada una de las tareas, pero con algunas diferencias en el tiempo de realización. En la siguiente tabla se indica, en días, el tiempo que cada equipo tardaría en realizar cada tarea:

	A1	A2	A3	A4
A	125	135	140	250
B	125	130	142	240
C	125	137	138	250
D	125	142	140	240

¿Cuál es la asignación que minimiza el tiempo requerido para la fusión?

5) Debido a un retraso importante en la fusión de las dos compañías del ejercicio (4), generado por el reacomodo de los integrantes de varios equipos, se modificaron los tiempos de duración de algunas actividades. Los cambios se presentan en la tabla:

	A1	A2	A3	A4
A	125	135	140	250
B	125	130	142	245
C	126	125	139	250
D	125	142	140	240

¿Cuál es la asignación óptima derivada del cambio?

Autoevaluación

1. Cuando se requiere transportar determinada cantidad de bienes, desde un número fijo de *orígenes* a ciertos *destinos*, procurando tener el menor costo posible, se tiene:

   a) Un problema de transporte.
   b) Un problema con tres restricciones.
   c) Un problema de transportación.
   d) Un problema irrestricto.

2. El término *origen* se refiere a la:

   a) Descripción de las características de los bienes a transportar.
   b) Descripción de la marca de los bienes a transportar.
   c) Descripción de la procedencia de los bienes a transportar.
   d) Descripción de la disponibilidad de los bienes a transportar.

3. El término *destino* se refiere a:

   a) La descripción del lugar al cual se transportan los bienes.
   b) La descripción de las características de los bienes a transportar.
   c) La descripción del lugar del cual se transportan los bienes.
   d) La descripción de los requerimientos de los bienes.

4. Un problema de transporte puede resolverse con:

   a) El algoritmo Jordan.
   b) El Método de Gauss
   c) El Método de Vogel.
   d) El algoritmo de transportación.

5. Es la clasificación de las celdas en la solución tabular de un modelo de transporte.

   a) Celdas ocupadas y vacías.
   b) Celdas básicas y no básicas.
   c) Celdas básicas y complementarias.
   d) Celdas principales y complementarias.

6. Toda vez obtenida una solución inicial de un problema de transporte, se utiliza para comprobar si la solución propuesta es óptima o identificar las celdas que deben modificarse.

   a) Método de Vogel.
   b) Método de la esquina noroeste.
   c) Método Húngaro.
   d) Método de Modi.

7. La expresión $u_i + v_j = c_{ij}$ se utiliza para calcular los:

   a) Multiplicadores asociados a las celdas no básicas.
   b) Multiplicadores asociados a las celdas complementarias.
   c) Multiplicadores asociados a las celdas no complementarias.
   d) Multiplicadores asociados a las celdas básicas.

8. La expresión $c.m. = c_{ij} - u_i - v_j$ se utiliza para calcular los:

   a) Costos marginales asociados a las celdas no básicas.
   b) Costos marginales asociados a las celdas complementarias.
   c) Costos marginales asociados a las celdas no complementarias.
   d) Costos marginales asociados a las celdas básicas.

9. La solución a un problema de transporte es óptima cuando todos los costos marginales son:

   a) Mayores a cero.
   b) Mayores o iguales a cero.
   c) Menores a cero.
   d) Menores o iguales a cero.

10. En principio, un modelo de asignación requiere que la cantidad de candidatos a asignación sea:

    a) Igual al número de tareas por asignar.
    b) Mayor al número de tareas por asignar.
    c) Menor al número de tareas por asignar.
    d) Igual o mayor al número de tareas por asignar.

11. Es el tipo de valor que toman las variables de decisión en un modelo de asignación:

    a) Enteros positivos.
    b) Naturales.
    c) Binarios.
    d) Estocásticos.

12. En el algoritmo del método húngaro se detiene su ejecución cuando:

    a) la cantidad de ceros de asignación es mayor al número de tareas por asignar.
    b) la cantidad de ceros de asignación es igual o mayor al número de tareas por asignar.
    c) la cantidad de ceros de asignación es menor al número de tareas por asignar.
    d) la cantidad de ceros de asignación es igual al número de tareas por asignar.

Respuestas a los ejercicios

Algoritmo de transporte

1) $x_{13}=14$, $x_{21}=8$, $x_{22}=10$, $x_{23}=3$ y $x_{31}=7$. Con un costo mínimo de $Z_{\min}=\$1,425.00$

2) $x_{13}=1000$, $x_{21}=1250$, $x_{22}=2000$ y $x_{23}=500$. Con un costo mínimo de $Z_{\min}=\$231,250.00$

3) $x_{11}=8$, $x_{14}=4$, $x_{21}=3$, $x_{22}=11$, $x_{33}=11$ y $x_{34}=7$. Con un costo mínimo de $Z_{\min}=\$7,128,000.00$ dólares.

Modelo de asignación

1)

Asignación		
A	T1	5
B	T2	4
C	T3	6
Total		$15.00

2)

Asignación		
A	T3	7
B	T2	7
C	T1	7
Total		$21.00

3)

Asignación		
A	T1	9
B	T2	9
C	T3	8
D	T4	9
Total		$35.00

4)

Asignación		
x	A	17
y	B	24
z	C	20
Total		$61.00

5)

Asignación		
A	C2	140
B	C1	240
C	C4	100
D	C3	0
Total		$480.00

6)

Asignación		
C1	T1	11300
C2	T2	12500
C3	T4	0
C4	T3	15500
Total		$39,300.00

Aplicaciones de maximización de tiempos y movimientos

1)

Asignación		
A	T1	6
B	T3	9
C	T2	5
Total		20 min.

2)

Asignación		
A	T1	15
B	T2	19
C	T3	16
Total		50 días

3)

Asignación		
A	T1	15
B	T3	14
C	T2	13
Total		42 días

4)

Asignación		
A	A1	125
B	A2	130
C	A3	138
D	A4	240
Total		633 días

5)

Asignación		
A	A1	140
B	A2	125
C	A3	125
D	A4	240
Total		630 días

Respuestas a la autoevaluación

1. a)
2. c)
3. a)
4. c)
5. b)
6. d)
7. d)
8. a)
9. b)
10. a)
11. c)
12. d)