

# UNIDAD 2

## MÉTODO DE GAUSS MATRIZ INVERSA MULTIPLICATIVA

### Objetivos:

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Representará un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas mediante una matriz de orden  $m \times n$ .
- Conocerá y aplicará el método de Gauss para solucionar un sistema de  $m \times n$ .
- Conocerá y aplicará el método de Gauss-Jordan para solucionar un sistema de  $n \times n$ .
- Identificará las características de la matriz inversa multiplicativa.
- Usará el método de Gauss-Jordan para encontrar la matriz inversa multiplicativa.
- Usará la matriz adjunta para encontrar la matriz inversa multiplicativa.
- Aplicará el método de la matriz inversa para resolver sistemas de  $n \times n$ .



## Introducción

El problema de solucionar un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas ha sido objeto de estudio desde hace mucho tiempo. En esta unidad estudiaremos varios métodos para dar solución a dichos sistemas utilizando para ello las matrices y sus propiedades.

### 2.1. Representación de un sistema mediante matrices

En esta sección veremos la representación matricial de un sistema de  $m \times n$ . Recordemos que esto significa que tenemos  $m$  ecuaciones, cada una con  $n$  incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Vamos a formar una matriz  $A$  de orden  $m \times n$  con todos los coeficientes de las ecuaciones y dos vectores columna, el  $\mathbf{x}$  formado por las incógnitas y el  $\mathbf{b}$  formado por los términos independientes. Así, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

**Definición 2.1.** Si tenemos un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

La representación matricial del sistema es:

$$Ax = b$$

donde  $A$  se llama la **matriz de los coeficientes**,  $x$  es el vector columna cuyas entradas son las **incógnitas** y  $b$  es el vector columna cuyas entradas son los **términos independientes** de las ecuaciones.

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

## Ejemplo 1

Escribe los siguientes sistemas en su representación matricial:

a) Con el sistema dado por las siguientes ecuaciones:

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

tenemos que  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  es la matriz de los coeficientes,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$  entonces el sistema se puede escribir como

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Sea el sistema de ecuaciones dado por:

$$3a + 2b - 5c + 6d = 7$$

$$4a - b + 3c - 2d = 1$$

$$-a + 5b - 3c + d = -1$$

tenemos que  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , entonces

el sistema queda representado como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los ejemplos anteriores tienen la característica de que para todos los términos independientes al menos uno es distinto de cero, por lo que son **sistemas de ecuaciones no homogéneos**, de lo que definiremos cuando todos los términos independientes son iguales a cero.

**Definición 2.2.** Un sistema de ecuaciones de  $m \times n$  se llama **homogéneo** si el vector  $\mathbf{b}$  de los términos independientes es el vector cero.  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

## Ejemplo 2

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

El sistema  $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$  es un sistema homogéneo ya que  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 = 3$$

Si tenemos un sistema no homogéneo  $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 2$  siempre podemos

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1$$

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$$

formar un sistema homogéneo asociado a él:  $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$  poniendo 0 en

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

los resultados.

Las matrices que hemos estudiado son conformadas por los coeficientes de las ecuaciones del sistema, por lo que definiremos las que contienen una columna más, que incluye al vector columna de los valores independientes.

**Definición 2.3.** Se llama **matriz aumentada** de un sistema  $m \times n$  a la matriz de orden  $m \times (n+1)$  que se obtiene al aumentar a la matriz de los coeficientes una columna formada por los términos independientes.

### Ejemplo 3

a) Obtén la matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ , entonces la matriz aumentada es

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Nota que  $A$  es de orden  $3 \times 3$  y la matriz aumentada  $B$  es de orden  $3 \times 4$ .

b) Obtén la matriz aumentada del sistema  $\begin{cases} 3x - 2y + z = 9 \\ x - 3y + 6z = 8 \end{cases}$  entonces

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$  es la matriz de coeficientes y  $B = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & -3 & 6 & 8 \end{array} \right)$  es la matriz aumentada

Nota que  $A$  es de orden  $2 \times 3$  y que la matriz aumentada  $B$  es de orden  $2 \times 4$ .

## Ejercicio 1

1. De los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, encuentra:

- Su representación matricial.
- La matriz aumentada.
- El sistema homogéneo asociado.

$$\begin{aligned} \text{a) } 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + x_4 &= -2 \\ 7x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x_1 + 7x_2 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 &= -1 \\ -4x_1 - 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3x_1 + x_2 - 9x_3 - 3x_4 &= 18 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 54 \end{aligned}$$

## 2.2. Solución de sistemas de orden $m \times n$ , mediante el método de Gauss

Para resolver un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas usaremos el método de Gauss, para ello necesitamos llevar la matriz a una forma adecuada, de tal manera que podamos obtener inmediatamente el resultado de las incógnitas, las matrices se llevan a ceros en algunos de sus elementos en forma de escalón.

**Definición 2.4.** Una matriz  $A$  se encuentra en **forma escalonada reducida por renglones** si cumple con las siguientes condiciones:

- i. Todos los renglones cuyos elementos son todos ceros aparecen en la parte inferior de la matriz.
- ii. El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no son todos cero es 1.
- iii. Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

iv. Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón, tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón se llama **pivote** de ese renglón.

Una matriz se encuentra en **forma escalonada por renglones** si se cumplen las condiciones

(i), (ii) y (iii).

Cabe señalar que:

- a) La forma escalonada reducida por renglones es única.
- b) Es posible que al cambiar la sucesión de operaciones elementales sobre los renglones se llegue a formas escalonadas distintas.

## Ejemplo 4

1. Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

a) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Las siguientes matrices *no* están en la forma escalonada reducida por renglones:

a) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 Tiene un 4 en el segundo renglón en lugar de 1.

b) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 El tercer renglón tiene 1 a la izquierda del 1 del segundo renglón y debe estar a la derecha.



$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{El renglón de puros ceros} \\ \text{no está en la parte inferior} \\ \text{de la matriz.} \end{array}$$

**Observación:** Siempre se puede llevar una matriz a la forma escalonada reducida por renglones realizando operaciones elementales con los renglones.

Por lo anterior, requerimos conocer cuáles son las operaciones elementales que se pueden realizar con los renglones de una matriz; éstas surgen de convertir una ecuación en otra equivalente realizando ciertas operaciones como son:

**Definición 2.5.** Las operaciones elementales con renglones de una matriz son:

- i. Multiplicar o dividir un renglón por un número diferente de cero.
- ii. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
- iii. Intercambiar dos renglones.

El proceso de aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz aumentada se llama **reducción por renglones**.

**Notación:**

1.  $R_i \rightarrow cR_i$  significa “reemplaza el  $i$ -ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por  $c$ ”. (Para multiplicar un renglón por  $c$ , se multiplica cada número del renglón por  $c$ ).
2.  $R_j \rightarrow R_j + cR_i$  significa “sustituye el  $j$ -ésimo renglón por la suma del renglón  $j$  más el renglón  $i$  multiplicado por  $c$ ”.
3.  $R_i \rightarrow R_j$  quiere decir “intercambiar los renglones  $i$  y  $j$ ”.

## Ejemplo 5

1. Lleva la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  a la forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{matrix}} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & -11 & -26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ R_2 \rightarrow -1/4 R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & -11 & -26 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 11R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2/3 R_3} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Estamos ya en condiciones de aprender el método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones.

### Método de eliminación de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones.

- i. Se reduce por renglón la matriz aumentada del sistema a la forma escalonada.
- ii. Se despeja el valor de la última incógnita.
- iii. Se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

### Ejemplo 6

$$2x + 4y + 6z = 18$$

1. Resuelve el sistema  $4x + 5y + 6z = 24$  usando el método de Gauss.

$$3x + y - 2z = 4$$

Se forma la matriz de los coeficientes aumentada  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 3 & 1 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$  y se reduce a su forma escalonada por renglones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 3 & 1 & -2 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow 1/2 R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 3 & 1 & -2 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & -3 & -6 & | & -12 \\ 0 & -5 & -11 & | & -23 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow 1/3 R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 5R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_3}}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

De aquí regresamos a un sistema de ecuaciones

$$x + 2y + 3z = 9$$

$$y + 2z = 4 \quad \text{donde ya tenemos el valor de } z = 3; \text{ sustituyendo en la segunda}$$

$$z = 3$$

ecuación obtenemos el valor de  $y$ :  $y + 2(3) = 4 \rightarrow y = -2$ ; sustituyendo en la primera ecuación los valores de  $z$  y  $y$  obtenemos el valor de  $x$ :  $x + 2(-2) + 3(3) = 9 \rightarrow x = 4$ . Por lo que la solución es  $(4, -2, 3)$ .

2. Resuelve el sistema  $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$  por el método de Gauss.

Se forma la matriz aumentada  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right)$  y se reduce por renglones.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{Si regresamos al sistema de ecuaciones obtenemos } \begin{cases} x_1 + 19x_3 + 7x_4 = -2 \\ x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

lo que evidentemente nos muestra que tenemos una infinidad de soluciones, pues los valores de  $x_3$  y  $x_4$  pueden escogerse de manera arbitraria, y para cada par de valores obtenemos los valores de  $x_1$  y de  $x_2$ .

Como mencionamos en la definición 1.24, un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si no tiene solución y **consistente** si tiene al menos una solución.

**Nota.** Recordemos los sistemas homogéneos; en ellos los términos independientes son todos cero, por lo tanto podemos decir que un sistema homogéneo siempre tiene al menos una solución: la trivial (donde todas las variables  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$ ) y por tanto siempre es consistente.

## Ejercicio 2

1. Di si las siguientes matrices se encuentran en forma escalonada por renglones (pero no reducida por renglones), en forma escalonada reducida por renglones o ninguna de las dos:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

2. Usa las operaciones elementales con renglones para reducir las siguientes matrices a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. Encuentra las soluciones (si las hay) de los siguientes sistemas usando el método de Gauss:

a) 
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3 \\ x - 2y + 2z &= -1 \\ 3x + y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x + 3y - z &= 2 \\ x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ \text{c) } 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

## 2.3. Solución de sistemas de orden $m \times n$ , mediante el método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones es muy similar al método de Gauss, la diferencia es que en éste se pide que la reducción de las matrices sea en la forma escalonada reducida, con lo que se obtienen directamente las soluciones del sistema.

Método de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

- i. Se reduce la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones.
- ii. Se obtienen las soluciones del sistema.

### Ejemplo 7

1. Resuelve el sistema  $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \\ 3x + y - 2z &= 4 \end{aligned}$  utilizando el método de Gauss-Jordan:

Formamos la matriz aumentada  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$  y la llevamos a la forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{R}_3 \rightarrow \text{R}_3 - 3\text{R}_1]{\text{R}_2 \rightarrow \text{R}_2 - 4\text{R}_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_2 \rightarrow -1/3\text{R}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{R}_3 \rightarrow \text{R}_3 + 5\text{R}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_3 \rightarrow -\text{R}_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_1 \rightarrow \text{R}_1 - 2\text{R}_2} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 \rightarrow R_1 + R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3}]{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 + R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De aquí podemos obtener las soluciones del sistema

$$x = 4; \quad y = -2; \quad z = 3.$$

2. Resuelve el sistema 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$$
 usando Gauss-Jordan.

Formamos la matriz aumentada 
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 9 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ -1 & 16 & -14 & -3 \end{array}\right)$$
 y la llevamos a la

forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 9 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ -1 & 16 & -14 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 1/3 R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ -1 & 16 & -14 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1}]{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1}} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 1/2 R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -1/9 R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -8/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/9 & 3 \\ 0 & 1 & -8/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Como la matriz tiene un renglón cuyos elementos son todos ceros, podemos concluir que el sistema tiene una infinidad de soluciones, ya que 
$$\begin{aligned} x_1 - 2/9 x_3 &= 3 \\ x_2 - 8/9 x_3 &= 0 \end{aligned}$$
 y por lo tanto  $x_1$  y  $x_2$  dependen del valor de  $x_3$ .

3. Resuelve el sistema 
$$\begin{aligned} x + y - z &= 7 \\ 4x - y + 5z &= 4 \\ 6x + y + 3z &= 20 \end{aligned}$$
 usando el método de Gauss-Jordan.

Llevamos la matriz aumentada 
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 20 \end{array}\right)$$
 a su forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \rightarrow R_3 - 6R_1 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1}]{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 6R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 9 & -24 \\ 0 & -5 & 9 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 9 & -22 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{R_2 \leftrightarrow R_3}]{R_1 \rightarrow R_1 + 1/5 R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 13/5 \\ 0 & -5 & 9 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Como la matriz tiene un renglón  $(0, 0, 0, -2)$  indica que el sistema *no* tiene solución ya que no existe un número que sea  $-2$  y al mismo tiempo sea cero.

### Ejercicio 3

1. Encuentra las soluciones (si las hay) de los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de Gauss-Jordan. Explica.

a) 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$$

c) 
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

## 2.4. Matriz inversa y matriz adjunta

En esta sección definiremos dos tipos de matrices muy importantes que son básicas en la teoría de matrices y que nos son útiles para la solución de sistemas de ecuaciones.

Comencemos con un ejemplo sencillo:

Sean  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , obtengamos los productos  $AB$  y  $BA$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por}$$

lo tanto podemos decir que  $AB = BA = I_2$ , donde  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ .

A la matriz  $B$  se le llama matriz inversa de  $A$  y se denota  $B = A^{-1}$ .

**Definición 2.7.** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices de orden  $n \times n$  que satisfacen  $AB = BA = I$  donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $n \times n$ ,

entonces  $B$  se llama **matriz inversa** de  $A$  y se denota por  $A^{-1}$ .

De donde se tiene que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ . En este caso se dice que  $A$  es **invertible**.

Así como toda matriz, también existen propiedades para la matriz identidad e inversa.

### Teorema 2.1. Propiedad de la matriz identidad.

Sean  $A$  una matriz de orden  $n \times n$  e  $I$  la matriz identidad de orden  $n \times n$ , entonces

$$AI = IA = A$$

### Teorema 2.2. Propiedades de las matrices invertibles.

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices invertibles de orden  $n \times n$ , entonces

1. La inversa es única.
2.  $(A^{-1})^{-1} = A$
3.  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

En este momento nos podemos hacer las siguientes preguntas:

1. ¿Todas las matrices cuadradas tienen inversa?
2. ¿Qué matrices tienen inversa?
3. Si una matriz tiene inversa, ¿cómo se puede calcular?

En esta parte vamos a contestar esas preguntas. Comenzaremos con el caso de  $2 \times 2$ .

Consideremos la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$  y vamos a suponer que es invertible.

Sea  $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ , entonces debe satisfacer que  $AA^{-1} = I$ , por lo tanto:



$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3z & 2y-3w \\ -4x+5z & -4y+5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordemos que dos matrices son iguales si todas sus entradas lo son, por lo cual

$$2x - 3z = 1; \quad -4x + 5z = 0; \quad 2y - 3w = 0; \quad -4y + 5w = 1.$$

Con esto se forman dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{matrix} 2x - 3z = 1 \\ -4x + 5z = 0 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} 2y - 3w = 0 \\ -4y + 5w = 1 \end{matrix} \quad \text{y para resolverlos vamos a escribirlos en}$$

la forma matricial aumentada:  $\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array} \right)$  y  $\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array} \right)$ . Al

reducirlas obtendremos los resultados  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \end{array} \right)$  y  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & w \end{array} \right)$

Como la matriz original es la misma para ambos sistemas, podemos realizar la reducción por renglones al mismo tiempo considerando la

nueva matriz aumentada  $\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$  al hacerlo obtendremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x & y \\ 0 & 1 & | & z & w \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 1/2 R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 4R_1}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_1 \rightarrow R_1 + 3/2 R_2]{R_2 \rightarrow -R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & w \end{array} \right)$$

De donde obtenemos las soluciones  $x = -5/2$ ;  $z = -2$ ;  $y = -3/2$ ;  $w = -1$

Entonces  $A$  es invertible y su inversa es  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Este ejemplo nos ilustra un procedimiento para encontrar la matriz inversa que siempre funciona y que se puede generalizar a matrices de orden  $n \times n$ .

### Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada $A$

1. Se escribe la matriz aumentada  $(A \mid I)$ .
2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz  $A$  en su forma escalonada reducida por renglones.
3. Se decide si es invertible.
  - a. Si la forma escalonada reducida por renglones de  $A$  es la matriz identidad  $I$ , entonces  $A^{-1}$  es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.
  - b. Si la reducción de  $A$  conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces  $A$  no es invertible.

### Ejemplo 8

1. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$  vamos a determinar si es o no invertible.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Como tiene un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical,  $A$  no es invertible.

2. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ , vamos a determinar si es o no invertible, y si lo es encontrar  $A^{-1}$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 1/2 R_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -1/3 R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & | & -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2]{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -5/6 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 11/6 & -5/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \rightarrow R_1 + R_3]{R_3 \rightarrow -1R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -8/3 & 7/3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -8/3 & 7/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 13/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos la matriz inversa  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix} (*)$

Verificación:  $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Nota:** Es importante verificar que  $AA^{-1} = I$ .

Veamos algunos resultados importantes acerca de las matrices inversas.

**Teorema 2.3.** Sea  $A$  una matriz de orden  $n \times n$ .

Entonces  $A$  es invertible, si y sólo si,  $\det A \neq 0$

## Ejemplo 9

1. Consideremos la matriz del ejemplo anterior:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  sabemos que es invertible, vamos a calcular su determinante.

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-10-6) - 4(-8-18) + 6(4-15) = 6$$

→  $\det A \neq 0$

2. Consideremos la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$  y calculemos su determinante.  
 $\det A = -4 + 4 = 0$  y

$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$  por lo tanto no es invertible.

Vamos ahora a dar la definición de otra matriz importante en nuestra búsqueda de matrices inversas.

Recordemos lo que son los cofactores de una matriz  $A$  (Definición 1.22)

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  entonces sus cofactores son

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 6 = -16 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-8-18) = 26$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4-15 = -11$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-8-6) = 14 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4-18 = -22$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-12) = 10$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 = -6 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(12-24) = 12$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10-16 = -6$$

Con estos cofactores haremos una matriz de orden  $3 \times 3$  de tal manera que obtendremos una matriz  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} -16 & 26 & -11 \\ 14 & -22 & 10 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Habiendo calculado esta matriz podemos definir lo siguiente:

**Definición 2.8.** Sea  $A$  una matriz de orden  $n \times n$  y sea  $B$  la matriz formada por los cofactores de  $A$ . Entonces la **adjunta** de  $A$ , que se denota **adj**  $A$  es la transpuesta de la matriz  $B$ , es decir:

$$\text{adj } A = B^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

### Ejemplo 10

Vamos a encontrar la adjunta de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Sea  $B$  la matriz de los cofactores de  $A$ .

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 26 & -11 \\ 14 & -22 & 10 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \text{ entonces}$$

$$\text{adj } A = B^T = \begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Ya con estos elementos podemos encontrar la inversa de una matriz usando su determinante y su matriz adjunta como nos lo indica el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.** Si  $A$  es una matriz de orden  $n \times n$  invertible.

Entonces 
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

### Ejemplo 11

Usaremos la matriz anterior  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  y vamos a calcular su inversa.

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-10-6) - 4(-8-18) + 6(4-15) = -32 + 104 - 66 = 6$$

$$\text{entonces } A^{-1} = \frac{1}{6} \operatorname{adj} A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota que esta matriz inversa ya la habíamos obtenido con el método de Gauss-Jordan.\*

**Observación:** Este teorema refuerza el resultado acerca de que una matriz invertible necesariamente debe tener un determinante distinto de cero.

## Ejercicio 4

1. Encuentra la matriz inversa, si existe, usando el método de Gauss-Jordan. En caso de que no exista la matriz inversa, indica la razón:

a)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Encuentra la matriz inversa, si existe, usando el método de la matriz adjunta. Recuerda calcular primero el determinante para ver si existe o no.

---

\* En este momento ya tenemos dos métodos para calcular la matriz inversa, sin embargo, podemos notar que si  $n > 3$ , en general es más fácil calcular  $A^{-1}$  con el método de la reducción por renglones que usando la matriz adjunta, pues aun en el caso de  $4 \times 4$  tenemos que calcular 17 determinantes.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

## 2.5. Solución de sistemas de $n \times n$ , mediante la matriz inversa

En esta sección encontraremos la solución de un sistema de ecuaciones de  $n \times n$  mediante la matriz inversa.

El siguiente resultado nos da una pista acerca de cómo encontrar la solución de un sistema si la matriz de coeficientes asociada es invertible.

**Teorema 2.5.** Sea  $A$  la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones de orden  $n \times n$ . Entonces se cumplen las siguientes condiciones:

- $A$  es invertible.
- El sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene una solución única que es  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
- El sistema homogéneo asociado  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene una solución única que es  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

### Ejemplo 12

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 1 \\ y - z &= 2 \\ 3x + 5y + 7z &= -1 \end{aligned} \quad \text{formamos la matriz de coeficientes } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Vamos a ver si  $A$  es invertible, para eso calculamos su determinante:

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(7+5) + 0 + 3(-4-3) = 3$$

Como el determinante es distinto de cero, la matriz es invertible y por lo tanto el sistema tiene solución única.

Usando alguno de los métodos vistos con anterioridad encontramos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \text{ por lo tanto la solución del sistema será}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 5/3 & -1/3 \end{pmatrix} \text{ de donde}$$

$$x = -7/3 \qquad 2(-7/3) + 4(5/3) + 3(-1/3) = 1$$

$$y = 5/3 \quad \text{comprobando tenemos} \qquad 5/3 - (-1/3) = 2$$

$$z = -1/3 \qquad 3(-7/3) + 5(5/3) + 7(-1/3) = -1$$

### Ejercicio 5

1. Considera los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y encuentra:

- i) El determinante de la matriz de coeficientes asociada.
- ii) Con base en lo anterior indica si el sistema tiene o no solución única.
- iii) Encuentra la matriz inversa, si la hay.
- iv) Encuentra la solución del sistema, si tiene, usando la matriz inversa.

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -x + 6y &= 2 \\ 4x + 2y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2x - 4y + 8z &= 1 \\ 3x + 5y + 8z &= 0 \\ -6x + 4z &= -2 \end{aligned}$$



## Ejercicios resueltos

1. Lleva a la forma escalonada reducida por renglones la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & 12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 12 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 12 \\ 0 & 17 & -23 \\ 0 & 27 & -43 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 12 \\ 0 & 17 & -23 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 1/10 R_3} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 12 \\ 0 & 17 & -23 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 17 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 17 R_2} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 7R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 1/11 R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3 \end{matrix}} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considera el siguiente problema:

Una compañía quiere comprar maquinaria y recibe de cuatro proveedores los siguientes presupuestos:

| Proveedor           | A | B | C | D |
|---------------------|---|---|---|---|
| Núm. compresoras    | 2 | 0 | 1 | 1 |
| Núm. de medidores   | 0 | 4 | 2 | 2 |
| Núm. válvulas       | 4 | 4 | 0 | 4 |
| Núm. reguladores    | 1 | 2 | 2 | 0 |
| Costo total         |   |   |   |   |
| millones de dólares | 6 | 5 | 5 | 4 |

Si sabemos que todos los proveedores tienen el mismo precio para cada tipo de maquinaria, ¿cuántos millones de pesos cuesta cada una de las máquinas?

Para resolver este problema vamos a convertirlo a un sistema de ecuaciones de la siguiente manera: sea  $x$  el precio de las compresoras,  $y$  el precio de los medidores,  $z$  el precio de las válvulas y  $w$  el precio de los reguladores, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} 2x + 4z + w &= 6 \\ 4y + 4z + 2w &= 5 \\ x + 2y + 2w &= 5 \\ x + 2y + 4z &= 4 \end{aligned} \quad \text{Consideremos la matriz aumentada} \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Resolveremos este sistema por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow 1/4 R_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 + 4R_2 \\ R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 1/8 R_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_4 \rightarrow R_4 - 4R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6/8 & 22/8 \\ 0 & 1 & 0 & 5/8 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & -3/2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_4 \rightarrow -2/3 R_4} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6/8 & 22/8 \\ 0 & 1 & 0 & 5/8 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \rightarrow 8R_1 \\ R_2 \rightarrow 8R_2 \\ R_3 \rightarrow 8R_3 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & 6 & 22 \\ 0 & 8 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 + R_4 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 5R_4 \\ R_1 \rightarrow R_1 - 6R_4 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \rightarrow 1/8 R_1 \\ R_2 \rightarrow 1/8 R_2 \\ R_3 \rightarrow 1/8 R_3 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

de donde obtenemos las soluciones  $x = 2$ ,  $y = 1/2$ ,  $z = 1/4$ ,  $w = 1$  por lo tanto el precio de cada máquina es:

|             |               |
|-------------|---------------|
| compresora  | \$ 2 millones |
| medidores   | \$ 500 mil    |
| válvulas    | \$ 250 mil    |
| reguladores | \$ 1 millón   |

3. Encuentra la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  con el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_3 \rightarrow -R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto la matriz inversa es  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$   
 Vamos a comprobar:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Encuentra la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  usando la matriz adjunta.

Primero vamos a calcular el determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(1-4) - 3(1-2) - 1(-2+1) = -6+3+1 = -2, \text{ entonces}$$

sí tiene inversa.

Vamos a calcular los cofactores para obtener la adjunta.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } \text{adj } A = B^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{por lo tanto } A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Vamos a comprobar que efectivamente sea la inversa.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales usando la inversa.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ -x - y + 2z &= 3 \\ x + 2y - z &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{Vamos a encontrar su matriz de coeficientes } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Como podemos constatar, se trata de la matriz del ejemplo anterior, por lo tanto sabemos que es invertible, y por lo tanto el sistema tiene una única solución. Usando la matriz inversa obtenemos:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \mathbf{5}, \mathbf{y} = \mathbf{-2}, \mathbf{z} = \mathbf{3}$$

Comprobamos

$$2(5) + 3(-2) - 3 = 10 - 6 - 3 = 1$$

$$-5 - (-2) + 2(3) = -5 + 2 + 6 = 3 \quad \text{con lo que sabemos que son las soluciones.}$$

$$5 + 2(-2) - 3 = 5 - 4 - 3 = -2$$

## Ejercicios propuestos

1. Reduce la matriz  $A$  a la forma escalonada por renglones:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Lleva la matriz  $A$  a la forma escalonada reducida por renglones:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Resuelve el sistema de ecuaciones usando el método de Gauss-Jordan:

$$2x + 3y - z = 3$$

$$x - 2y + z = 0$$

$$2x + 2y + z = 1$$

4. Di si el siguiente sistema tiene una solución, infinitas soluciones o ninguna solución. Usa el método de Gauss-Jordan:

$$x - 3z = 0$$

$$y + 2z = 0$$

$$x + y - z = 0$$

5. Encuentra la matriz inversa, si existe, usando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. En los siguientes ejercicios, haz lo que se te pide:

a) Encuentra la matriz adjunta de  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Encuentra la inversa de  $A$  usando la matriz adjunta.

## Autoevaluación

1. De las siguientes matrices escoge la que está en la forma escalonada reducida por renglones:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. ¿Cuál es la representación matricial del sistema  $\begin{matrix} 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ -x + y - 2z = -1 \end{matrix}$  ?

a)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. De las siguientes afirmaciones elige la que describe la diferencia entre el método de Gauss y el método de Gauss-Jordan:

- a) No hay diferencia.
- b) El método de Gauss pide que la matriz esté escalonada por renglones y el método de Gauss-Jordan pide la matriz escalonada reducida por renglones.
- c) El método de Gauss es para sistemas de ecuaciones y el método de Gauss-Jordan para matrices.
- d) El método de Gauss-Jordan se usa para matrices de  $n \times n$  y el de Gauss para matrices de  $m \times n$ .

4. Di cuál de las siguientes operaciones con renglones se usó para pasar de la matriz  $A$  a la  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a)  $R_1 \rightarrow R_1 + R_3$
- b)  $R_2 \rightarrow R_2 + R_1$
- c)  $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$
- d)  $R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1$

5. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema  $\begin{matrix} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{matrix}$  (utiliza el método de Gauss)?

- a) No tiene solución.
- b) Tiene sólo una solución.
- c) Tiene infinitas soluciones.
- d) Tiene dos soluciones.

6. Es la solución del sistema  $\begin{matrix} 2x + 3y - z = 3 \\ x - y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 3 \end{matrix}$  (utiliza el método de Gauss-Jordan):

- a)  $x = 1; y = 0; z = -1$
- b)  $x = -1; y = 0; z = 1$
- c)  $x = 1; y = 1; z = -2$

d) No tiene solución.

7. Es la matriz adjunta de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ :

a)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

8. Es la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ :

a) No tiene inversa.

b)  $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/14 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

9. Es la solución del sistema homogéneo  $\begin{matrix} 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{matrix}$

a)  $x = 1; y = -1; z = 0$

b)  $x = 0; y = 0; z = 0$

c) No tiene solución.

d)  $x = 0; y = 1; z = -1$



10. Elige la opción que diga cuáles de las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $A$  es invertible
2.  $\det A = 0$
3.  $\det A \neq 0$
4. El sistema  $Ax = b$  tiene solución única.
5. El sistema  $Ax = b$  no tiene solución.
6. El sistema  $Ax = 0$  sólo tiene la solución trivial.

- a) 1; 2; 4
- b) 1; 3; 4; 6
- c) 1; 3; 5; 6
- d) 1; 3; 5



## Respuestas a los ejercicios

### Ejercicio 1

a)

La representación matricial es 
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 7 & 1 \\ 7 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada es 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -5 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 7 & 1 & -2 \\ 7 & -6 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema homogéneo asociado es 
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)

La representación matricial es 
$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada es 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 7 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

El sistema homogéneo asociado es 
$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 &= 0 \\ -4x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

c)

La representación matricial es 
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -9 & -3 \\ -3 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 54 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada es 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -9 & -3 & 18 \\ -3 & 3 & -2 & 3 & 54 \end{array} \right)$$

El sistema homogéneo asociado es 
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 9x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

## Ejercicio 2

1.

- a) Escalonada.
- b) Escalonada reducida.
- c) Escalonada reducida.
- d) Ninguna de las 2.

2.

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 9/7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/7 \\ 0 & 1 & 9/7 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.

- a)  $x = 1; y = 0; z = -1$
- b) Tiene una infinidad de soluciones.
- c) No tiene solución.

## Ejercicio 3

1.

- a)  $x_1 = -9; x_2 = 30; x_3 = 14$
- b) No tiene solución.
- c)  $x_1 = 2; x_2 = -3; x_3 = 1$

## Ejercicio 4

1.

a)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

- b) No es invertible porque tiene un renglón de ceros.

$$c) \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) No es invertible porque hay un renglón de ceros.

$$e) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2.

$$a) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) No es invertible pues su determinante es cero.

## Ejercicio 5

1.

a)  $\det A = 12$

El sistema tiene como única solución la trivial ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ) (teorema 2.5.)

$$\text{La matriz inversa es } \begin{pmatrix} 1/6 & 1/4 & -1/12 \\ -7/6 & -1/4 & 13/12 \\ -1/2 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

b)  $\det A = -26$

Tiene sólo una solución.

$$\text{La matriz inversa es } \begin{pmatrix} -2/26 & 6/26 \\ 4/26 & 1/26 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es  $x = -10/26$ ;  $y = 7/26$

c)  $\det A = 520$

Tiene solución única

$$\text{La matriz inversa es } \frac{1}{260} \begin{pmatrix} 10 & 8 & -36 \\ -30 & 28 & 4 \\ 15 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

La solución es  $x = 82/260$ ;  $y = -38/260$ ;  $z = -7/260$

## Respuestas a los ejercicios propuestos

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) x = 1; y = 0; z = -1$$

4) El sistema tiene una infinidad de soluciones:  $x = 3z$ ;  $y = -2z$

$$5) A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1 \\ -1 & -2/3 & 4 \\ 2 & 5/3 & -8 \end{pmatrix}$$

6)

$$a) \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -12 \\ -6 & -5 & 24 \end{pmatrix}$$

$$b) A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1 \\ -1 & -2/3 & 4 \\ 2 & 5/3 & -8 \end{pmatrix}$$

## Respuestas a la autoevaluación

1. d)
2. a)
3. b)
4. c)
5. c)
6. a)
7. b)
8. a)
9. b)
10. b)