Unidad 8
Representación matricial de una transformación lineal

Objetivos:

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Asociará a cada transformación lineal una matriz.
- Relacionará los conceptos de núcleo, imagen, rango y nulidad de una transformación con los correspondientes conceptos de las matrices.
- Encontrará las representaciones matriciales de las transformaciones lineales bajo cambio de bases.
- Manejará el concepto de matrices similares o semejantes.

Introducción

En la unidad anterior vimos que si A es una matriz de 2×2, la transformación T: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ es una transformación lineal. En esta unidad vamos a ver que para toda transformación lineal T: $V \rightarrow W$ existe una matriz asociada a la transformación de tal manera que $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ para toda $\mathbf{v}$ en V.

8.1. Representación matricial de una transformación lineal

En esta sección veremos cómo asociar a cualquier transformación lineal una matriz.

Definición 8.1. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente, y sea T: $V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces existe una matriz A de orden $m \times n$ llamada **matriz de transformación** o **representación matricial** de T que satisface $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ para toda $\mathbf{v}$ en V.

Veamos algunos ejemplos de transformaciones entre espacios vectoriales y vamos a construir una representación matricial de cada una de ellas.

Ejemplo 1

a) Consideremos la transformación lineal *reflexión* T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = (x, -y)$.

Vamos a encontrar la representación matricial de T, es decir, queremos una matriz A de orden 2×2, tal que $T(x, y) = A(x, y)$.

i) Primero tomaremos una base de R^2 y encontraremos las imágenes bajo T de esta base.

Para este caso vamos a tomar como base de R^2 la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ y usaremos las propiedades de transformación lineal; es decir,

$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ y $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$.

Como $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, entonces

$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, -0) = (1, 0)$ y $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, -1)$

ii) Vamos a construir la matriz A cuyas columnas son estos vectores $T(\mathbf{e}_1)$ y $T(\mathbf{e}_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, si $\mathbf{u} = (x, y)$ es cualquier vector de R^2:

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = T(x, y) = T(\mathbf{u})$$

por lo tanto, A es una representación matricial de T.

b) Sea $T: R^2 \rightarrow R^3$ la transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$.

Vamos a encontrar una representación matricial de T.

En este caso la matriz A será una matriz de 3×2.

i) Encontraremos las imágenes bajo T de una base de R^2.

Tomaremos la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de R^2.

$$T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 1-0 \\ 3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0-1 \\ 3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ii) Construimos la matriz A cuyas columnas son las imágenes de los vectores de esta base:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces si $\mathbf{u} = (x, y)$ es cualquier vector de R^2:

$$A\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\ x-y\\ 3y\end{pmatrix}=\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\mathrm{T}(\mathbf{u})$$

y, por lo tanto, A es una representación matricial de T.

c) Consideremos la transformación lineal T: $P_2 \rightarrow P_3$ definida por

$\mathrm{T}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3$.

Vamos a construir una representación matricial para T.

En este caso como, dim P_2 es 3 y dim P_3 es 4, la matriz A será de 4×3.

i) Consideremos la base $\{1, x, x^2\}$ para P_2. Encontraremos las imágenes de estos vectores bajo T:

$$\mathrm{T}(1) = x = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{T}(x) = x^2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{T}(x^2) = x^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

ii) Construyamos la matriz A cuyas columnas son las imágenes de estos vectores:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

entonces, si $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ es cualquier vector de P_2, tenemos que

$$Ap=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 = \mathrm{T}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \mathrm{T}(p)$$

por tanto A es una representación matricial de T.

Esto nos indica que podemos considerar a una transformación lineal como función o como matriz.

En la unidad anterior, sección 7.3, definimos los conceptos de imagen, rango, núcleo y nulidad de una transformación lineal, y en la unidad 4 fueron definidos los conceptos de rango, núcleo, nulidad e imagen de una matriz; sin embargo, ahora que vemos que las transformaciones lineales y las matrices están relacionadas, ¿tendrán alguna relación estos conceptos?

El siguiente resultado nos responde esta pregunta.

Teorema 8.1. Sea T: $V \rightarrow W$ una transformación lineal y sea A una representación matricial de T, entonces:

i) imagen T = imagen A $= C_A$
ii) $\rho(T) = \rho(A)$
iii) *nu* T $= N_A$
iv) $\nu(T) = \nu(A)$

Recordemos que N_A = núcleo de A y C_A = imagen de A.

Usaremos algunos de los ejemplos anteriores para ver la validez de este resultado.

Ejemplo 2

a) Consideremos la transformación lineal *reflexión* T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = (x, -y)$.

Vamos a encontrar el núcleo, la imagen, el rango y la nulidad de T y el núcleo, la imagen, el rango y la nulidad de una representación matricial de T para ver si son iguales.

i) Núcleo y nulidad de T.

nu T = $\{(x, y)$ en R^2 tales que $T(x, y) = (0, 0)\}$
pero $(x, -y) = T(x, y) = (0, 0)$, entonces $x = y = 0$, por tanto,
nu T = (0, 0) y la nulidad de T $= \nu(T) = 0$.

ii) Imagen y rango de T.

Recordemos que $\nu(T) + \rho(T) = \dim R^2 = 2$, entonces, como $\nu(T) = 0$,
el rango de T $= \rho(T) = 2$ de donde la imagen de T $= R^2$.

iii) Encontraremos el núcleo, imagen, rango y nulidad de una representación matricial de T.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ una representación matricial de T.

Consideremos la matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$; como esta matriz ya está diagonalizada, tenemos que $x = y = 0$ de donde $N_A = \{(0, 0)\}$ y $\nu(A) = 0$.

De la misma matriz obtenemos que $\{(1, 0), (0, -1)\}$ forman una base para C_A.

Como C_A = Imagen de A, entonces $\rho(A) = 2$.

Los resultados anteriores confirman el teorema.

b) Consideremos la transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^4$ definida por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - y - z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}$$

Usaremos el teorema anterior para encontrar la imagen y el núcleo de T.

Vamos a encontrar una representación matricial de T, considerando las imágenes de la base canónica de R^3 y formando una matriz cuyas columnas sean estos vectores:

$$T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizando la matriz aumentada $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde $x = y = z = 0$

por tanto $N_A = \{(0, 0, 0)\}$, $\nu(A) = 0$, $\rho(A) = 3$, lo que significa que

i) el núcleo de T y nulidad de T es *nu* T = {**0**}, ν(T) = 0.

ii) La imagen T = *gen* {(1, 0, 2, –1), (–1, 1, –1, 1), (0, 1, –1, 2)} y el rango de T es $\rho(\mathrm{T}) = 3$.

Ejercicio 1

1. Encuentra la representación matricial de las siguientes transformaciones lineales usando las bases canónicas en cada caso:

a) T: $R^2 \to R^3$ tal que $\mathrm{T}(x, y) = (x, y, 0)$
b) T: $R^2 \to R^2$ tal que $\mathrm{T}(x, y) = (-x, -y)$
c) T: $R^2 \to R^3$ tal que $\mathrm{T}(x, y) = (-x, -y, x + y)$
d) T: $R^3 \to R$ tal que $\mathrm{T}(x, y, z) = 2x$

2. Encuentra el núcleo y la imagen de las siguientes transformaciones lineales usando el teorema 8.2:

a) T: $R^2 \to R^2$ tal que $\mathrm{T}(x, y) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -x + y \end{pmatrix}$

b) T: $R^3 \to R^3$ tal que $\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 8z \end{pmatrix}$

8.2. Matriz de una transformación para bases no estándar

En la sección anterior construimos matrices de transformaciones lineales usando la base canónica para los espacios vectoriales. Sin embargo, podríamos preguntarnos: ¿qué pasará si tomamos otra base diferente? ¿La matriz seguirá siendo la misma? ¿Cómo cambiará? En esta sección daremos respuesta a cada una de estas preguntas.

Teorema 8.2. Sean V un espacio vectorial de dimensión n, W un espacio vectorial de dimensión m y T: $V \rightarrow W$ una transformación lineal.

Sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ una base para V y $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_m\}$ una base para W. Entonces existe una matriz única A de orden $m \times n$ tal que para todo vector $\mathbf{x}$ en V se tiene que

$$[\mathrm{T}(\mathbf{x})]_{B_2} = \mathrm{A}(\mathbf{x}_{B1})$$

Este teorema nos indica que cada vez que tomemos bases diferentes para los espacios vectoriales de una transformación lineal tendremos una representación matricial diferente. Mediante un ejemplo vamos a construir la matriz asociada a una transformación lineal tomando bases diferentes a las canónicas. Tomaremos un ejemplo que ya hemos manejado con el fin de comparar las representaciones matriciales.

Ejemplo 3

Sea T: $R^2 \rightarrow R^3$ la transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$.

Vamos a construir una representación matricial de T usando dos bases distintas a las canónicas para R^2 y R^3.

Si encontramos las imágenes bajo T de los vectores de la base canónica

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

entonces la matriz $A_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}$ es una representación matricial de T con respecto a las bases canónicas de R^2 y R^3.

Encontraremos otra representación matricial pero esta vez usando bases diferentes:

Sean $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\}$ y $B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ bases para R^2 y R^3, respectivamente.

a) Obtendremos las imágenes de los vectores de la base B_1 bajo la transformación lineal T:

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-5\\6\end{pmatrix}.$$

b) El siguiente paso es escribir estos vectores en términos de la base B_2:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}_{B_2}=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\b+c\\a+c\end{pmatrix}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones asociado $\begin{cases}a+b+c=0\\ b+c=2\\ a+c=-3\end{cases}$ tenemos que

$\begin{cases}a=-2\\ b=3\\ c=-1\end{cases}$ por lo tanto las coordenadas del vector en términos de la base B_2 es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}_{B_2} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ a+c \end{pmatrix}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones asociado $\begin{cases} a+b+c=-1 \\ b+c=-5 \\ a+c=6 \end{cases}$ tenemos que

$\begin{cases} a=4 \\ b=-7 \\ c=2 \end{cases}$ por lo tanto las coordenadas del vector en términos de la base B_2 es

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Sea A_2 la matriz cuyas columnas son estos vectores:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos a probar que A_2 es la representación matricial de T con respecto a las bases B_1 y B_2.

Sea (x, y) cualquier vector de R^2 con respecto a la base canónica.

i) Vamos a encontrar sus coordenadas con respecto a la base B_1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3b \\ -a+2b \end{pmatrix}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones asociado $\begin{cases} a-3b=x \\ -a+2b=y \end{cases}$

tenemos que $a=-2x-3y$

$b=-x-y$

Por lo tanto, las coordenadas del vector en términos de la base B_1 es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -2x-3y \\ -x-y \end{pmatrix}$$

ii) Ahora encontraremos $A_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1}$

$$A_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1} = A_2\begin{pmatrix} -2x-3y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2x-3y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ x-2y \\ y \end{pmatrix}_{B_2}$$

iii) Vamos a encontrar las coordenadas en la base B_2:

$$\begin{pmatrix} 2y \\ x-2y \\ y \end{pmatrix}_{B_2} = 2y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-2y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+x-2y+y \\ x-2y+y \\ 2y+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix} = \mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

por lo tanto $\left[T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_{B_2} = A_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1}$ y A_2 es otra representación matricial de T.

Resumiendo lo anterior tenemos:

Procedimiento para calcular la matriz de una transformación lineal T: V → W con respecto a las bases $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ para V y W respectivamente:

Paso 1. Se calculan las imágenes de los elementos de la base B_1. $T(\mathbf{v}_i)$ para $i = 1, 2,..., n$.

Paso 2. Se expresan estas imágenes en términos de la base B_2. $[T(\mathbf{v}_i)]_{B2}$

Paso 3. La matriz A cuyas columnas son los vectores obtenidos en el paso 2 es la representación matricial de T con respecto a las bases B_1 y B_2.

El diagrama de la figura 8.1 nos ofrece una interpretación gráfica de $[\mathrm{T}(\mathbf{x})]_{B_2} = A(\mathbf{x}_{B_1})$, donde se muestra que existen dos caminos para llegar al mismo resultado.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{x} \arrow[r, "\mathrm{T}"'] \arrow[d] & \mathrm{T}(\mathrm{x}) \arrow[d] \\
(\mathrm{x})_{B1} \arrow[r, "A"'] & \left[\mathrm{T}(\mathrm{x})\right]_{B2} = A\,[\mathrm{x}]_{B1}
\end{tikzcd}$$

Figura 8.1.

El ejemplo 3 nos lleva a preguntarnos: ¿para qué usar otra base que no sea la canónica cuando los cálculos son, como en este ejemplo, más complicados? La respuesta es que con frecuencia es posible encontrar una base B para que la matriz de una transformación con respecto a B sea una matriz diagonal. Esto es importante pues es muy sencillo trabajar con matrices diagonales además de que tiene grandes ventajas, como veremos más adelante.

Ejemplo 4

En este ejemplo encontraremos dos representaciones matriciales de la misma transformación lineal usando dos conjuntos de bases diferentes, tanto para R^2 como para R^3.

Considera la transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^2$ tal que $\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$.

Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de R^3 y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base para R^2.

a) Vamos a encontrar la representación matricial de T con respecto a B_1 y B_2.

i) Primero encontramos las imágenes de los vectores de la base B_1 bajo la transformación

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

ii) Ahora determinaremos las coordenadas de los vectores encontrados en i) con respecto a la base B_2 resolviendo los sistemas de ecuaciones asociados a cada vector:

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_{B_2}=a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\2a+b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_{B_2}=\begin{pmatrix}2/3\\-4/3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{B_2}=a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\2a+b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{B_2}=\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{B_2}=a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\2a+b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{B_2}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

iii) Determinamos la matriz A_1 cuyas columnas son los vectores que se encontraron en ii).

$$A_1=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 0\\-4/3 & -2/3 & -1\end{pmatrix}$$

Ésta es la representación matricial de T con respecto a las bases B_1 y B_2.

b) Vamos ahora a encontrar la representación matricial de T con respecto a las bases canónicas de R^3 y R^2.

i) Primero encontramos las imágenes de los vectores de la base canónica:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

ii) Ahora construimos la matriz A_2 cuyas columnas son estos vectores:

$$A_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Ésta es la representación matricial de T con respecto a las bases canónicas.

Dado que las matrices A_1 y A_2 de los ejemplos anteriores son representaciones matriciales de la misma transformación lineal, ¿existirá alguna relación entre ambas?

En la siguiente sección nos ocuparemos de ello.

Ejercicio 2

1. Determina la representación matricial de cada transformación lineal con respecto a las bases indicadas:

a) T: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$; $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) T: $R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ z \end{pmatrix}$; $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) T: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que T(x, y) = (0, 0); $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) T: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que T(x, y) = (x, y);

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Usando el teorema 8.2, encuentra la imagen de los siguientes vectores utilizando la transformación lineal del inciso 1b) anterior, tomando como bases las indicadas en el inciso:

a) T (1, –1, 2)
b) T (3, 0, 0)
c) T (0, 0, 0)
d) T (1, 2, 3)

8.3. Matriz de una transformación bajo cambio de bases

En la sección anterior vimos que una sola transformación lineal podía tener muchas matrices asociadas dependiendo de las bases que se consideraran. En esta sección veremos cuál es la relación que guardan esas matrices y por qué unas son mejores que otras en términos de simplificación de cálculos.

El siguiente resultado nos muestra la relación existente entre las matrices asociadas a una transformación lineal y las matrices de cambio de bases tanto en el dominio como en el codominio.

Teorema 8.3. Sean $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, B_1 y B_2 bases de V y W, respectivamente, sea C una representación matricial de T con respecto a las bases canónicas y sean A_1 la matriz de transición de B_1 a la base canónica de V y A_2 la matriz de transición de B_2 a la base canónica de W, entonces, si A es la representación matricial de T con respecto a las bases B_1 y B_2 se tiene que $A = A_2^{-1}CA_1$

La siguiente figura nos muestra gráficamente el significado de este teorema, donde se muestra que existen tres caminos para obtener el mismo resultado:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{x} \arrow[r, "T"'] \arrow[d] & \mathrm{T(x)} \arrow[d] \\
(\mathrm{x})_{B1} \arrow[r, "A"'] \arrow[d] & \left[\mathrm{T}(x)\right]_{B2} = A[x]_{B1} = A_2^{-1}CA_1[x]_{B1} \\
\mathrm{x} \arrow[r, "C"'] & \mathrm{T}(x) = \mathrm{C}(x) \arrow[u, "A_2^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Figura 8.2.

Esta relación es importante pues la matriz A puede ser una matriz diagonal.

Veamos varios ejemplos:

Ejemplo 5

En estos ejemplos encontraremos una representación matricial diagonal de cada una de las transformaciones y utilizaremos para ello el teorema 8.3.

1) Consideremos la transformación T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x+10y \\ -15x-13y \end{pmatrix}$$

Encontraremos la representación matricial de T con respecto a las bases

$$B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

i) Encontraremos la matriz de transición de las nuevas bases a la base canónica.

Sea $A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ la matriz de transición de las nuevas bases a la base canónica, vamos a encontrar la matriz de transición de la base canónica a la base B_2, es decir, queremos encontrar A_2^{-1}.

Utilizando el procedimiento estudiado en la unidad 2 tenemos que:

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Vamos a encontrar la representación matricial de T referente a las bases canónicas. Para ello encontraremos las imágenes de la base canónica bajo T y construiremos la matriz cuyas columnas son estos vectores:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{pmatrix}$$

iii) Vamos a usar el teorema 8.3 para encontrar la representación matricial de T con respecto a las bases $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

Sea $A = A_2^{-1} C A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

iv) Comprobaremos que la matriz A es la representación matricial de T con respecto a las bases B_1 y B_2:

Sea (1, 3) un vector de R^2, entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ -54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}_{B_2} \text{ y } A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_1} = A\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}_{B_2}$$

por tanto A es la representación matricial de T respecto a las bases B_1 y B_2.

Observa que en este caso la representación matricial es una matriz diagonal.

2) Encuentra la matriz de la transformación T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$ con respecto a las bases $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ del dominio y codominio, respectivamente.

i) El primer paso es encontrar las matrices de transición de la bases B_1 y B_2 a la base canónica.

Estas matrices son aquellas cuyas columnas son los vectores de las bases

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ii) El segundo paso consiste en encontrar la matriz inversa de A_2:

Diagonalizando la matriz aumentada obtenemos

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/8 \\ 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$

iii) El tercer paso es obtener la matriz de la transformación con respecto a las bases canónicas, para ello tenemos que encontrar las imágenes de los vectores de la base canónica bajo T:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix};\ \mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

Construir la matriz C cuyas coordenadas son estos vectores:

$$C=\begin{pmatrix}4 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}$$

iv) El cuarto paso es obtener la matriz de T con respecto a las bases B_1 y B_2 usando el teorema:

$$A=A_2^{-1}CA_1=\begin{pmatrix}1/4 & -3/8\\1/4 & 1/8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/8 & -7/2\\-11/8 & 11/2\end{pmatrix}$$

v) Vamos a comprobar que efectivamente ésta es la matriz de T con respecto a B_1 y B_2:

Tomemos un vector (x, y) en R^2 y obtengamos su imagen bajo T:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x-y\\3x+2y\end{pmatrix}$$

Ahora busquemos las coordenadas de este vector con respecto a la base B_2:

$$\left[\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}4x-y\\3x+2y\end{pmatrix}_{B_2}=a\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b\\-2a+2b\end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones asociado $\begin{array}{r}a+3b=4x-y\\-2a+2b=3x+2y\end{array}$ tenemos

$$\left[\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}4x-y\\3x+2y\end{pmatrix}_{B_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}x-y\\\frac{11}{8}x\end{pmatrix}\qquad(***)$$

Escribamos el vector (x, y) en términos de la base B_1 y multipliquémoslo por A:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+4b \\ a+3b \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones asociado $\begin{matrix} -a+4b=x \\ a+3b=y \end{matrix}$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3x+4y}{7} \\ \dfrac{x+y}{7} \end{pmatrix}$$

Al multiplicarlo por A obtenemos

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -7/8 & -7/2 \\ -11/8 & 11/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{-3x+4y}{7} \\ \dfrac{x+y}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}x-y \\ \frac{11}{8}x \end{pmatrix} \qquad (***)$$

.

Observemos que las dos expresiones marcadas con (***) son iguales, por lo que podemos asegurar que A es la matriz de T respecto a las bases B_1 y B_2.

También podemos tener el caso en que el cambio de bases no sea entre bases canónicas, sino entre otras bases diferentes. El siguiente teorema nos muestra el procedimiento.

Teorema 8.4. Sea T: $V \rightarrow V$ un operador lineal donde V es un espacio vectorial de dimensión n. Sean $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n\}$ bases de V y sea P la matriz de transición de B_2 a B_1.
Si C es la matriz de T con respecto a B_1, entonces la matriz $\mathrm{A} = P^{-1}CP$ es la matriz de T con respecto a la base B_2.

Veamos el procedimiento paso a paso con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6

Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por $\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-y \end{pmatrix}$. Sean $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ y

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bases de R^2. Sea $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$ la representación matricial de T con respecto a la base B_1.

Queremos encontrar la representación matricial de T con respecto a la base B_2.

1. Encuentra la matriz de transición P de la base B_2 a la base B_1:

Para ello debemos escribir los vectores de B_2 en términos de la base B_1, es decir, tenemos que encontrar los valores de a y b de la siguiente combinación lineal y resolver los sistemas asociados para cada vector:

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

P es la matriz cuyas columnas son estos vectores.

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

2. Encontremos ahora la inversa de P diagonalizando la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \text{ de donde}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Por último encontremos la matriz $A = P^{-1}CP$:

$$A = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Vamos a confirmar que A es la matriz de T con respecto a la base B_2:
Sea (–2, 4) un vector de R^2.

La imagen de (–2, 4) bajo T con respecto a la base B_2 es:

$$T\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando A por las coordenadas de (–2, 4) respecto a la base B_2 tenemos que:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ entonces } A\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

por lo que $A =$ es la matriz de T con respecto a la base B_2.

Ejercicio 3

1. Considera el operador lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$

Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bases para R^2.

a) Encuentra la matriz de T con respecto a la base B_1.
b) Encuentra la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1.
c) Encuentra la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.
d) Encuentra la matriz de T con respecto a la base B_2 usando el teorema 8.4.

2. Sea T: $R^2 \rightarrow R^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$

Sean E_1 y E_2 las bases canónicas para R^2 y R^3, respectivamente.

Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de R^2 y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de R^3.

Determina la matriz que representa a T respecto a:

a) E_1 y E_2

b) B_1 y B_2

c) Calcula T (1, 2) usando:

1) la definición de T.
2) la matriz del inciso a).
3) la matriz del inciso b).

8.4. Matrices similares o semejantes

En la sección anterior vimos que se puede obtener la representación matricial de un operador lineal con respecto a ciertas bases si se conoce la representación matricial con respecto a las bases canónicas y las matrices de transición de esta base a la canónica y viceversa. Es decir, hablamos de encontrar matrices de la forma $A = P^{-1}CP$. Estas matrices tienen propiedades importantes que nos pueden ayudar a simplificar los cálculos más adelante.

Definición 8.2. Sean A y B matrices de orden $m \times n$, entonces B es **similar** a A si existe una matriz no singular (que tiene inversa) P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Esta definición nos dice que las matrices de un operador lineal con respecto a distintas bases son similares. Tomaremos algunas representaciones matriciales de un operador lineal y probaremos que en efecto son similares.

Ejemplo 7

Consideremos el operador lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$ definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x+10y \\ -15x-13y \end{pmatrix}$$

$C = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{pmatrix}$ es la representación matricial de T con respecto a la base canónica de R^2 y

$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ es la representación matricial de T con respecto a la base

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}\right\}$

Vamos a probar que A y C son similares:

i) Consideremos la matriz de transición de la base B a la base canónica:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

P es una matriz no singular, su inversa es $P^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

ii) Vamos a encontrar $P^{-1}CP$:

$$P^{-1}CP=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12 & 10\\ -15 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

de donde tenemos que $A = P^{-1}CP$, por lo tanto, A y C son similares.

Las matrices similares tienen las siguientes propiedades:

1. A es similar a A.
2. Si B es similar a A, entonces A es similar a B.
3. Si A es similar a B y B es similar a C, entonces A es similar a C.

Teorema 8.5. Sean A y B matrices similares de orden $n\times n$, entonces son representaciones matriciales del mismo operador lineal T: $V \rightarrow V$ con respecto a dos bases distintas para V.

Este teorema nos habla de que en realidad dos matrices similares no son más que dos maneras distintas de representar el mismo operador lineal.

Ejemplo 8

1) Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrices similares de 2×2; entonces

existe una matriz invertible

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ de 2×2 tal que

$A = P^{-1}DP$ donde $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ un operador lineal tal que si $\mathbf{x} = (x, y)$ es un vector de R^2, entonces $T(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$; esto implica que D es la representación matricial de T con respecto a la base canónica, por tanto

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base para R^2, entonces $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de transición de B a la base canónica.

Probaremos que A es la representación matricial de T con respecto a la base B; es decir, que si $\mathbf{x} = (x, y)$ es un vector de R^2, entonces $[T(\mathbf{x})]_B = A[\mathbf{x}]_B$

i) Primero encontraremos las coordenadas de $\mathbf{x}$ con respecto a la base B:

$[\mathbf{x}]_B = (a, b)$ tales que $a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

resolviendo el sistema $\begin{cases} a + 2b = x \\ -a + b = y \end{cases}$ obtenemos que $a = \dfrac{x - 2y}{3}$ $b = \dfrac{x + y}{3}$

por tanto

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} (x - 2y)/3 \\ (x + y)/3 \end{pmatrix}$$

ii) Ahora encontraremos las coordenadas de la imagen $T(\mathbf{x})$ con respecto a la base B.

Usando el procedimiento anterior tenemos que

$$\left[T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_B = \left[\begin{pmatrix} -2x+y \\ x+y \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} (-4x-y)/3 \\ (-x+2y)/3 \end{pmatrix}$$

iii) Por último, multiplicaremos la matriz A por el vector **x** en términos de la base B:

$$A[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x-2y)/3 \\ (x+y)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4x-y)/3 \\ (-x+2y)/3 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $[\mathrm{T}(\mathbf{x})]_B = A[\mathbf{x}]_B$

lo que significa que A es la matriz de T con respecto a la base B.

De aquí podemos obtener un procedimiento para construir representaciones matriciales de un operador lineal en cualquier base con sólo conocer la representación matricial de T respecto a la base canónica.

Procedimiento para encontrar representaciones matriciales en bases no canónicas

Paso 1. Encontrar la representación matricial C de la transformación lineal en términos de la base canónica.

Paso 2. Encontrar la matriz de transición de la base nueva a la base canónica P; esta matriz es la que tiene como columnas a los vectores de la nueva base.

Paso 3. Encontrar la matriz inversa de la matriz anterior P^{-1} utilizando el procedimiento visto en la unidad 4.

Paso 4. Obtener una matriz similar $A = P^{-1}CP$, ésta será la matriz de la transformación en términos de la nueva base.

Ejemplo 9

Sea $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2 de modo que T: $R^2 \rightarrow R^2$ está definida por T ($\mathbf{x}$) = $C\mathbf{x}$ y sea $B = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ una base para R^2.

Queremos encontrar la matriz de T asociada a la base B.

Paso 1. En este caso la representación matricial de T con respecto a la base canónica es C.

Paso 2. Formamos la matriz P cuyas columnas son los vectores de B.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Paso 3. Encontramos la inversa de P.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \text{ de donde } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Paso 4. Obtenemos la matriz $A = P^{-1}CP$

$$A = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 5. Vamos a probar que $\left[\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_B = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$

i) Encontremos $\left[\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_B$

$$\left[\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_B = \left[C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_B = \left[\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 5x \\ 3y \end{pmatrix}_B$$

pero $\begin{pmatrix} 5x \\ 3y \end{pmatrix}_B = a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

resolviendo el sistema asociado $\begin{cases} 2a + b = 5x \\ -a - b = 3y \end{cases}$ tenemos que

$a = 5x + 3y \quad b = -5x - 6y$, por lo tanto, $\left[\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 5x \\ 3y \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 5x + 3y \\ -5x - 6y \end{pmatrix}$

ii) Ahora queremos $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ resolviendo el sistema asociado $\begin{cases} 2a+b=x \\ -a-b=y \end{cases}$

tenemos que $a = x + y \quad b = -x - 2y$, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x+y \\ -x-2y \end{pmatrix};$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+y \\ -x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y \\ -5x-6y \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que A es la matriz de T asociada a la base B.

Ejercicio 4

1. Sea T: $R^2 \to R^2$ un operador lineal definido por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \end{pmatrix}$

E la base canónica y $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ otra base para R^2.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ la representación matricial de T con respecto a E y

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la representación matricial de T con respecto a B.

Encuentra la matriz P tal que $C = P^{-1}AP$.

2. Sea T: $R^2 \to R^2$ un operador lineal definido por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 3x-y \end{pmatrix}$

Sean $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ bases de R^2.

a) Encuentra A, la representación matricial de T con respecto a B_1.
b) Determina D, la representación matricial de T con respecto a B_2.
c) Determina P, la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1.
d) Verifica que $D = P^{-1}AP$.

Ejercicios resueltos

1. Encuentra una representación matricial de la transformación lineal

T: $R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ -2x + 2y - 2z \end{pmatrix}$

Sea $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ la base canónica de R^3.

i) Vamos a encontrar las imágenes de estos vectores bajo T:

$$T(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ T(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ T(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

ii) Ahora formaremos la matriz A cuyas columnas son estos vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Sea (x, y, z) un vector de R^3, entonces:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ -2x + 2y - 2z \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

por lo tanto, A es una representación matricial de T.

2. Encuentra el núcleo y la imagen de la transformación lineal:

T: $R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ y - 3z \end{pmatrix}$.

Vamos a usar el teorema 8.1, para ello necesitamos una representación matricial de T.

i) Consideremos las imágenes bajo T de la base canónica de R^3.

$$\mathrm{T}(\mathbf{e}_1)=\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix};\ \mathrm{T}(\mathbf{e}_2)=\mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ \mathrm{T}(\mathbf{e}_3)=\mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

ii) Formaremos una matriz con estos vectores como columnas:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&-3\end{pmatrix}$$

iii) Diagonalizando la matriz tenemos:

$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\end{pmatrix}$ de donde $\rho(A) = 2$ y $\nu(A) = 1$.

Esto nos lleva a que imagen T = *gen* $\{(1, 0), (0, 1)\} = R^2$.

Además tenemos que $\begin{cases}x+2z=0\\y-3z=0\end{cases}$ de donde $x = -2z$ y $y = 3z$, por tanto

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2z\\3z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ *nu* T = *gen* $\{(-2, 3, 1)\}$.

3. Encuentra la matriz de la transformación lineal T: $R^2 \rightarrow \mathrm{R}^2$ tal que $\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y\\x+2y\end{pmatrix}$ con respecto a las bases $B_1=B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ y la imagen de los vectores (2, –1) y (2, –2) usando la matriz asociada a T.

i) Encuentra la imagen de los elementos de B_1:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix};\ \mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

ii) Escribe estos vectores respecto a la base B_2:

$\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}_{B_2}=a\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-a+b\end{pmatrix}$ resolviendo el sistema $\begin{cases}a=3\\-a+b=-1\end{cases}$ tenemos

$a = 3 \quad b = 2$ de donde $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_2} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a+b \end{pmatrix}$ resolviendo el sistema $\begin{cases} a = -2 \\ -a+b = 2 \end{cases}$

tenemos que $a = -2$; $b = 0$, por tanto $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii) Forma la matriz A cuyas columnas son estos vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) Encuentra las coordenadas de los vectores (2, –1) y (2, –2) en términos de la base B_1. (Usaremos el mismo procedimiento del sistema asociado.)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v) Vamos a encontrar las imágenes de los vectores usando la matriz A:

$$\left[T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Sea T: $R^3 \rightarrow R^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-y \\ 2y+z \end{pmatrix}$

Sea E la base canónica para R^3 y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ otra base para R^3.

a) Determina la representación matricial de T con respecto a

i) E
ii) E y B

iii) B y E
iv) B

b) Calcula T(1, 1, –2) usando

i) la definición.
ii) la matriz obtenida en a1).
iii) la matriz obtenida en a2).
iv) la matriz obtenida en a3).
v) la matriz obtenida en a4).

Solución

a)

i) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ encontraremos las imágenes de los vectores de E:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como E es la base canónica, las imágenes ya están escritas en esa base.

Formamos la matriz A_1 cuyas columnas son estos vectores:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$; ésta es la matriz de T con respecto a la base E.

ii) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Esto significa que el dominio tiene como base a E y el codominio a B.

Encontramos las imágenes de la base E como en el inciso anterior.

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathrm{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a escribir estos vectores en términos de la base B:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}_B = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+b\\a+b+c\end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para cada uno de los vectores tenemos:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

A_2 es la matriz que tiene a estos vectores como columnas:

$$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & -1 & 0\\-3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ es la matriz de T con respecto a E y B.

iii) $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $E = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Esto significa que ahora el dominio trabaja con la base B y el codominio con la E.

Encontraremos primero las imágenes de los vectores de la base B:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \ \mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}, \ \mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Como E es la base canónica ya no tenemos que cambiar estos vectores.

Formamos la matriz A_3 con estos vectores como sus columnas.

$$A_3 = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\2 & -1 & 0\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$ es la matriz de T con respecto a las bases B y E.

iv) $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Significa que vamos a usar la base B tanto en el dominio como en el codominio. Encontramos las imágenes de los vectores de B como en el inciso anterior:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix},\ \mathrm{T}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Es necesario escribir estos vectores en términos de la base B resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes:

$$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Sea A_4 la matriz que tiene estos vectores como columnas:

$A_4=\begin{pmatrix}2&3&1\\2&-1&0\\-3&1&0\end{pmatrix}$ es la matriz de T con respecto a la base B.

b) T(1, 1, –2)

i) Usando la definición $\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2(1)+(-2)\\2(1)-1\\2(1)+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

ii) Usando la base E y la matriz $A_1=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$

$$\left[\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right]_E=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

iii) Usando las bases E y B y la matriz $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

iv) Usando las bases B y E y la matriz $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v) Usando la base B y la matriz $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5. Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ base de R^2.

Encuentra la representación matricial de T con respecto a *B* y prueba que es similar a *A*.

a) Vamos a encontrar la representación matricial de T con respecto a *B*.
Para ello encontremos las imágenes de los vectores de *B*:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ahora encontraremos las coordenadas de estos vectores con respecto a la base *B*:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vamos a construir la matriz *D* cuyas columnas son estos vectores.

Entonces $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es la representación matricial de T con respecto a la base *B*.

b) Ahora vamos a probar que es similar a *A*.

Sea *P* la matriz cuyas columnas son los vectores de *B*: $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Obtengamos la matriz P^{-1} diagonalizando la matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right), \text{ entonces } P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Probaremos que $D = P^{-1}AP$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

por lo tanto, *D* y *A* son matrices similares.

6. Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de R^2.

Encuentra la matriz D de T relativa a la base B si sabemos que es similar a A.

a) Primero encontraremos la matriz P cuyas columnas son los vectores de B:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Busquemos la matriz inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

c) Encontremos la matriz D tal que $D = P^{-1}AP$:

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces D es la matriz de T relativa a la base B.

Ejercicios propuestos

1. Encuentra una representación matricial de la transformacion lineal:

T: $R^2 \rightarrow R^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \\ y \end{pmatrix}$

2. Encuentra el núcleo y la imagen de la transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^2$ tal que

$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ -2x+2y-2z \end{pmatrix}$ usando el teorema 8.1 y una representación matricial de T.

3. Considera la transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^2$ tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-y \\ 2y+z \end{pmatrix}$$

Sean $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bases para R^3:

a) Encuentra la representación matricial de T con respecto a las bases B_1 y B_2.

b) Encuentra la imagen de los siguientes vectores con respecto a la base B_2 usando la matriz asociada del inciso anterior:

1) [T(2, 2, 0)] B_2
2) [T (1, 1, 1)] B_2
3) [T (1, 0, –1)] B_2

4. Sea T: $R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$

Sean E_1 y E_2 las bases canónicas para R^3 y R^2, respectivamente.

Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de R^3 y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \right\}$ base de R^2.

a) Determina la matriz de T respecto a

1) E_1 y E_1
2) B_1 y B_2

b) Encuentra el valor de T(1, 2, 3)

1) usando la definición.
2) usando la matriz de a1).
3) usando la matriz de a2).

5. Encuentra la matriz de la transformación T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ con respecto a la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Usa el hecho de que deben ser similares.

Autoevaluación

1. Si T: $R^3 \rightarrow R^3$ tal que T(x, y, z) = (z, $-x$, y) es una transformación lineal, una representación matricial de T es:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Si A es una representación matricial de la transformación lineal T, entonces

a) T = C_A
b) nulidad de T = imagen de A.
c) núcleo de T = kernel de A.
d) imagen de A = rango de T.

3. Es la representación matricial de T: $R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ con respecto a las bases $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

a) $\begin{pmatrix} -1 & 3/10 & 1/5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3/10 & 1 & 7/2 \\ 1/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

4. Sea T: $R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$

Sean $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base para R^3 y E la base canónica de R^2.

La matriz de T con respecto a B y E es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Si A y B son matrices similares:

a) $PA = BP$
b) $PA = PB$

c) $PA = P^{-1}B$
d) $PA = BP^{-1}$

6. Si T: $V \rightarrow V$ es una transformación lineal, B_1 y B_2 bases de V y A la representación matricial de T con respecto a B_1 y D la representación matricial de T con respecto a B_2, entonces

a) $A = D$
b) $A = D^{-1}$
c) A y D son similares.
d) A y D^{-1} son semejantes.

7. Si A es una matriz tal que T: $R^2 \rightarrow R^2$ está definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, B es una base para R^2 y D es la representación matricial de T con respecto a B, entonces $B = P^{-1}AP$ donde P es

a) la matriz de transición de la base B a la base canónica.
b) la matriz de transición de la base canónica a la base B.
c) la matriz de T con respecto a la base B.
d) la matriz de T con respecto a la base canónica.

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $(2,\ 0,\ 0)$

2.

a) *nu* T = {**0**}; imagen T = R^2

b) *nu* T = *gen* {(–3/2, ½, 1)}; imagen T = *gen* {(1, 3, 5), (–1, 1, –1)}

Ejercicio 2

1.

a) $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ -1 & 8/3 \end{pmatrix}$

2.

a) $[T(1, -1, 2)]_{B2} = (-2, -2, 4)$
b) $[T(3, 0, 0)]_{B2} = (0, 3, 0)$
c) $[T(0, 0, 0)]_{B2} = (0, 0, 0)$
d) $[T(1, 2, 3)]_{B2} = (4, 0, -1)$

Ejercicio 3

1.

a) $C = \begin{pmatrix} 5/3 & -1/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & -1/3 \end{pmatrix}$

c) $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -2/3 & 5/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

c)

1) $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(2) \\ 2(1)+2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_{E_2} = A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{B_2} = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -2/3 & 5/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 13/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2.

a) $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -5/3 & -10/3 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} -11/3 & 1/3 \\ -10/3 & 5/3 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 5/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

d) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -11/3 & 1/3 \\ -10/3 & 5/3 \end{pmatrix}$

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

2. nu T = gen {(1, 1, 0), (–1, 0, 1)}; imagen T = gen {(1, –2)}

3.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b)

T(2, 2, 0) = (6, 2, –4)
T(1, 1, 1) = (4, 1, –2)
T(1, 0, –1) = (0, 2, –3)

4.

a)

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

b)

1) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

1. b)
2. c)
3. b)
4. b)
5. a)
6. c)
7. a)