Unidad 9
Aplicaciones de las transformaciones lineales

Objetivos:

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Relacionará algunas transformaciones especiales con movimientos geométricos de vectores como son rotación, corte o deslizamiento, expansión, compresión y reflexión.
- Relacionará las matrices elementales de R^2 con transformaciones lineales especiales.
- Relacionará el concepto de isometría con matrices especiales.

Introducción

En esta unidad trataremos la geometría de las transformaciones lineales de R^2 en R^2, es decir, veremos cómo una transformación lineal T:$R^2 \rightarrow R^2$ (con A como una representación matricial de T en el caso que A sea invertible), se puede escribir como una sucesión de una o más transformaciones especiales, llamadas **expansiones, compresiones, reflexiones y cortes**.

9.1. Geometría de las transformaciones lineales de R^2 en R^2. Expansiones, compresiones, reflexiones, cortes o deslizamientos y rotaciones

En esta sección veremos la definición de transformaciones especiales, cómo se ven geométricamente y cuál es la forma de su representación matricial referente a la base canónica.

Definición 9.1. Una transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$ donde $c > 1$ se llama **expansión a lo largo del eje *x*** y su acción es multiplicar a la coordenada x de un vector en R^2 por una constante mayor que uno.

Veamos un ejemplo, así como su representación geométrica en el plano cartesiano.

Ejemplo 1

Consideremos la transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ y \end{pmatrix}$

Entonces T es una expansión a lo largo del eje x, con $c = 4$.

Veamos geométricamente qué hace T.

Sea (1, 2) un punto del plano cartesiano, entonces $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(1) \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

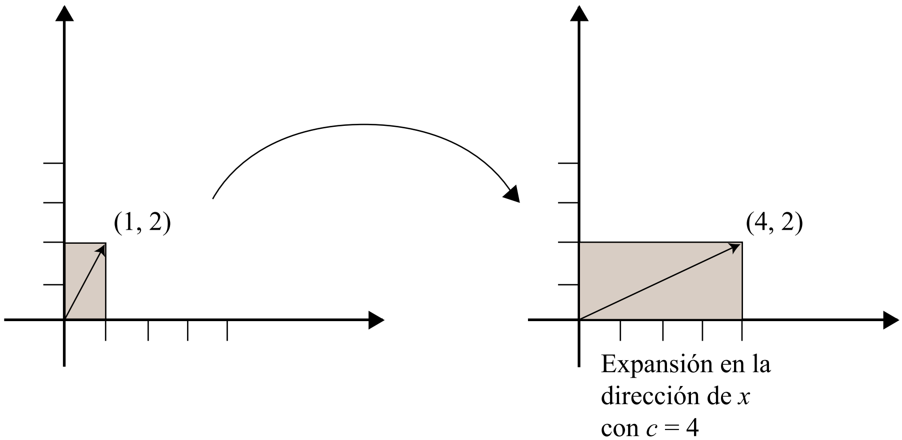


Figura 9.1.

De igual manera podemos definir la **expansión a lo largo del eje *y***.

Definición 9.2. Una transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$ es definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cy \end{pmatrix}$ donde $c > 1$ se llama **expansión a lo largo del eje y** y su acción es multiplicar a la coordenada *y* de un vector en R^2 por una constante mayor que uno.

Veamos cuál es su acción geométricamente; para ello tomaremos un ejemplo.

Ejemplo 2

Consideremos la transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3y \end{pmatrix}$; T es una expansión a lo largo del eje *y*, con $c = 3$.

Sea (1, 2) un punto del plano cartesiano, la imagen bajo T es $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, entonces

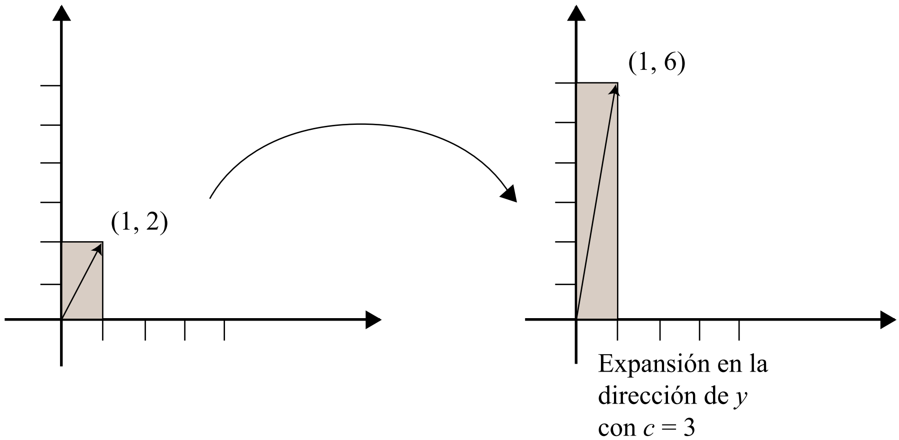


Figura 9.2.

En los ejemplos anteriores pudimos ver que una expansión significa que el vector se alarga en cualquiera de las dos direcciones: x o y, esto debido a que la constante c es positiva; sin embargo, ¿qué pasará si $0<c<1$? La lógica nos indica que en lugar de sufrir un *alargamiento*, el vector sufrirá un *acortamiento***.**

Veamos a que nos referimos con esto.

Definición 9.3. Una transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$ es definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$ donde $0 < c < 1$ se llama **compresión a lo largo del eje *x*** y su acción es multiplicar la coordenada x de un vector en R^2 por una constante positiva menor que uno.

Del mismo modo podemos definir **compresión a lo largo del eje *y***.

Definición 9.4. Una transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$ es definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cy \end{pmatrix}$ donde $0 < c < 1$ se llama **compresión a lo largo del eje *y*** y su acción es multiplicar a la coordenada y de un vector en R^2 por una constante positiva menor que uno.

Con unos ejemplos veamos geométricamente qué hace una compresión para comprobar si su efecto es un *acortamiento* del vector.

Ejemplo 3

1. Consideremos la transformación lineal T: $R^2 \to R^2$, tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ y \end{pmatrix}$; T es una compresión a lo largo del eje x, con $c = \frac{1}{2}$.

Sea (1, 2) un punto del plano cartesiano, la imagen bajo T es $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1) \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ entonces:

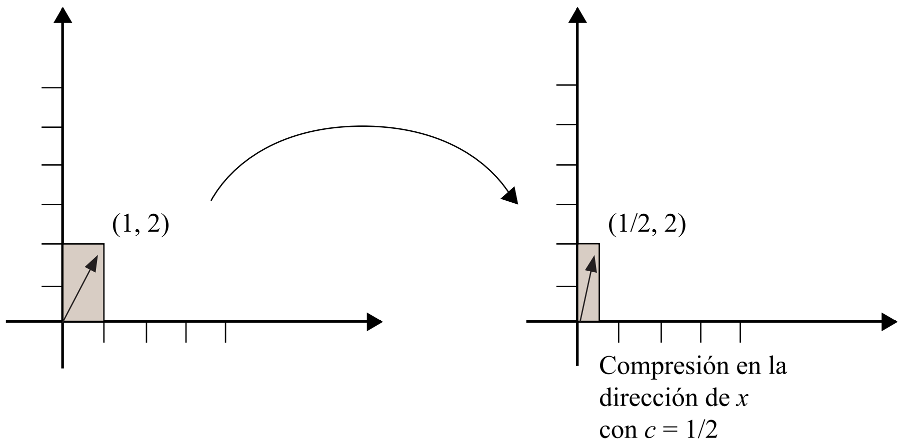


Figura 9.3.

2. Sea T: $R^2 \to R^2$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$; T es una compresión a lo largo del eje y, con $c = \dfrac{1}{2}$.

Tomemos al punto (1, 2) del plano cartesiano, su imagen bajo T es $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces:

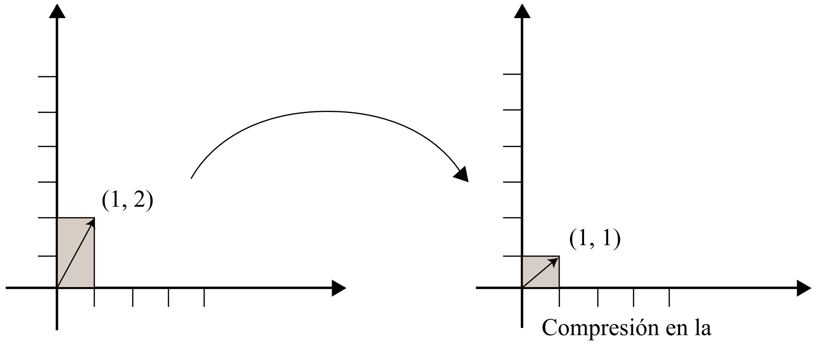


Figura 9.4.

Podemos ver que, en efecto, el resultado es un acortamiento del vector en lugar de un alargamiento.

En la unidad pasada trabajamos varias veces con transformaciones llamadas *reflexiones*; sin embargo, pensando geométricamente, ¿qué significado tiene en un vector una reflexión?

Definición 9.5. Considera las siguientes transformaciones lineales:

i) T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ se llama **reflexión con respecto al eje *y***

ii) T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ se llama **reflexión con respecto al eje *x***

iii) T: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ se llama **reflexión con respecto a la recta *y* = *x***

Veamos con un ejemplo su acción en el plano cartesiano.

Ejemplo 4

1. Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ es una reflexión con respecto al eje y y sea (1, 2) un vector en el plano cartesiano, su imagen bajo T es $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces

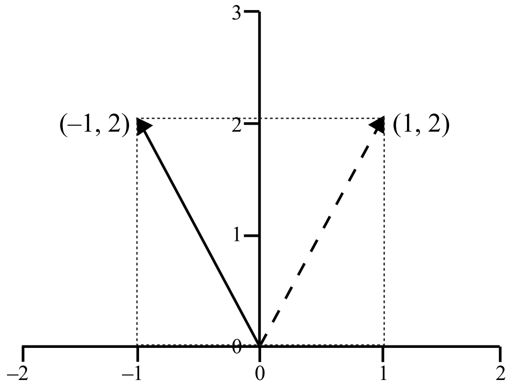


Figura 9.5.

Sea S: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que $S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ es una reflexión con respecto al eje x. y sea (1, 2) un vector en el plano cartesiano, su imagen bajo S es $S\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, entonces:

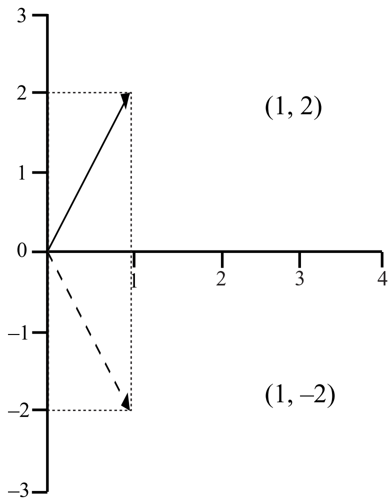


Figura 9.6.

3. Sea U: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que $U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ es una reflexión con respecto a la recta $y = x$ y sea (1, 2) un vector en el plano cartesiano, su imagen bajo U es $U\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces:

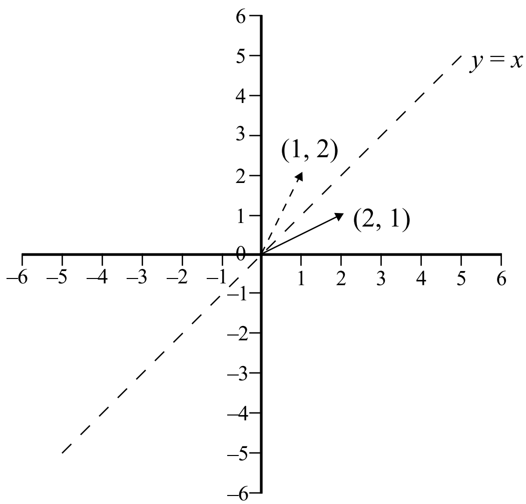


Figura 9.7.

Vamos ahora a analizar otra transformación lineal especial llamada *corte* y su representación geométrica.

Definición 9.6. Consideremos una transformación lineal T: $R^2 \to R^2$

i) Si T está definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+cy \\ y \end{pmatrix}$ donde c puede ser positiva o negativa se llama **corte a lo largo del eje x.**

ii) Si T está definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+cx \end{pmatrix}$ donde c puede ser positiva o negativa se llama **corte a lo largo del eje y.**

Tomaremos unos ejemplos para indagar cuál es la acción de un *corte* sobre un vector de R^2.

Ejemplo 5

1. Sea T: $R^2 \to R^2$ una transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix}$, por lo tanto es un corte a lo largo del eje x. Consideremos tres puntos del plano cartesiano: (0, 2), (3, 0) y (3, 2) y encontremos sus imágenes bajo T.

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2(2) \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2(2) \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Veamos cuál es la acción geométrica sobre estos puntos.

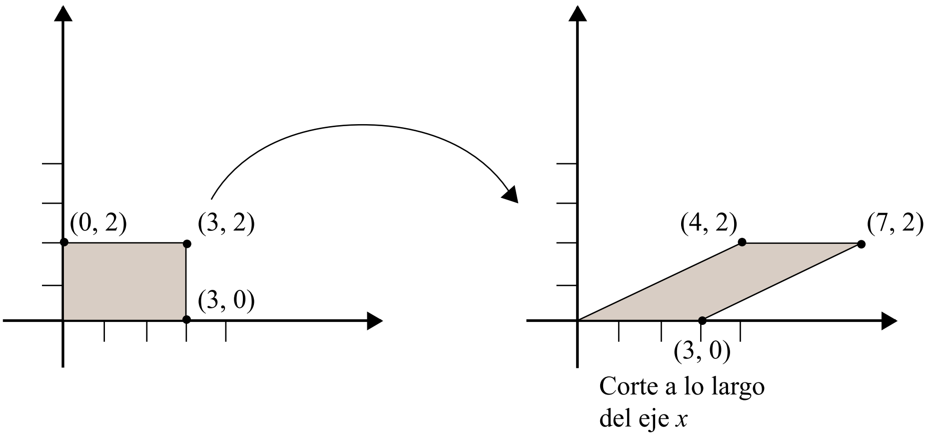


Figura 9.8.

2. Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ una transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+2x \end{pmatrix}$, por lo tanto es un corte a lo largo del eje y. Consideremos tres puntos del plano cartesiano: (0, 2), (3, 0) y (3, 2) y encontremos sus imágenes bajo T.

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0+2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2+2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Veamos cuál es la acción geométrica sobre estos puntos.

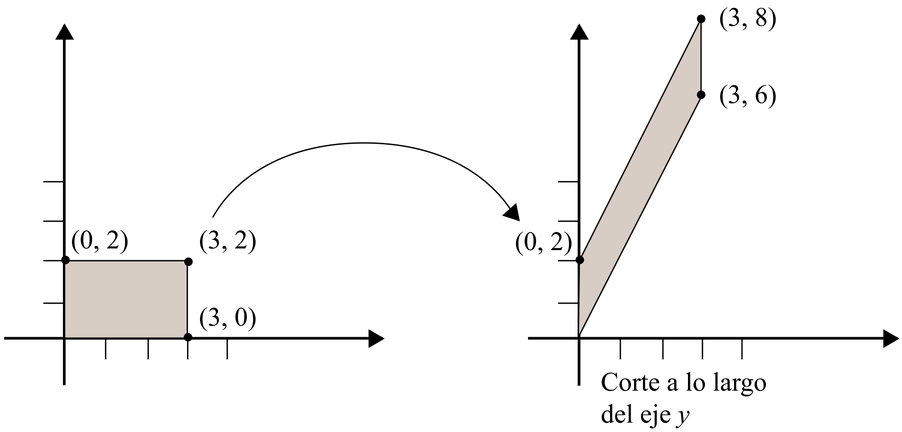


Figura 9.9.

Como veremos, los cortes consisten en un alargamiento de los puntos dejando fijos aquellos cuya coordenada es 0 con respecto al eje que no es el del corte. Observemos que el área de la figura se conserva.

Antes de ir a analizar las rotaciones, vamos a encontrar las matrices relativas a la base canónica de cada una de las transformaciones lineales que hemos visto.

Como recordaremos, para encontrar la matriz de una transformación lineal relativa a una base, lo que necesitamos es encontrar las imágenes bajo la transformación de los vectores que forman la base, y usando estos vectores como columnas, construir una matriz.

a) Expansiones y contracciones

i) A lo largo del eje x, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$.

Vamos a encontrar las imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

$$T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix};\ T(\mathbf{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(0) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por tanto, la matriz de T con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) A lo largo del eje y, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cy \end{pmatrix}$.

Vamos a encontrar las imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

$$T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix};$$

por tanto, la matriz de T con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

b) Reflexiones

i) Con respecto al eje y, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Vamos a encontrar las imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. $T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $T(\mathbf{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ por tanto, la matriz de T con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Con respecto al eje x, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Vamos a encontrar las imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. $T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $T(\mathbf{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ por tanto, la matriz de T con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

iii) Con respecto a la recta $y = x$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

Vamos a encontrar las imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

$T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $T(\mathbf{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

por tanto, la matriz de T con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Cortes

i) A lo largo del eje x, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + cy \\ y \end{pmatrix}$.

Vamos a encontrar las imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

$T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + c(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $T(\mathbf{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + c(1) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$

por tanto, la matriz de T con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) A lo largo del eje y, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + cx \end{pmatrix}$.

Vamos a encontrar las imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

$T(\mathbf{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 + c(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$; $T(\mathbf{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + c(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

por tanto, la matriz de T con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$.

En la siguiente tabla se muestra un resumen de las transformaciones lineales y sus matrices.

Transformación	Representación matricial
Expansión a lo largo del eje x	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c > 1$
Expansión a lo largo del eje y	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, c > 1$
Compresión a lo largo del eje x	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 < c < 1$
Compresión a lo largo del eje y	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, 0 < c < 1$
Reflexión respecto a la recta $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Reflexión respecto al eje x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Reflexión respecto al eje y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Corte a lo largo del eje x	$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Corte a lo largo del eje y	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$

Estas matrices, llamadas **matrices elementales**, son importantes, ya que al multiplicar por la izquierda una matriz A por una matriz elemental, el resultado es el mismo que al realizar una operacion elemental con los renglones de A logrando una matriz equivalente. La siguiente tabla nos muestra esta equivalencia.

Operación elemental	Descripción	Matriz elemental
$R_1 \rightarrow cR_1$	Multiplicar el renglón 1 por un escalar c	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$R_2 \rightarrow cR_2$	Multiplicar el renglón 2 por un escalar c	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$
$R_1 \rightarrow R_1 + cR_2$	Multiplicar el renglón 2 por un escalar c y sumarlo al renglón 1	$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$R_2 \rightarrow R_2 + cR_1$	Multiplicar el renglón 1 por un escalar c y sumarlo al renglón 2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$
$R_1 \rightleftarrows R_2$	Intercambiar los renglones 1 y 2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Con base en lo anterior, podemos notar que las matrices elementales se parecen, o son iguales, a las representaciones matriciales de algunas transformaciones lineales de R^2 en R^2.

El siguiente resultado nos muestra esta equivalencia.

Teorema 9.1. Toda matriz elemental de orden 2×2 es una de las siguientes:

i) La representación matricial de una expansión a lo largo del eje x o y.
ii) La representación matricial de una compresión a lo largo del eje x o y.
iii) La representación matricial de una reflexión respecto a la recta $y = x$.
iv) La representación matricial de un corte a lo largo del eje x o y.
v) La representación matricial de una reflexión respecto del eje x o y.
vi) El producto de la representación matricial de una reflexión respecto al eje x o y y la representación matricial de una expansión o compresión.

Analizando las dos tablas anteriores veremos que algunas de las equivalencias son claras; sin embargo, ¿qué pasará en el caso de la matriz elemental $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuando $c < 0$? No tenemos ninguna transformación que tenga como representación matricial esas características.

Veamos qué sucede con un ejemplo.

Ejemplo 6

Consideremos la transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$ cuya representación matricial sea $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ y \end{pmatrix}$

Veamos qué le hace esta transformación lineal al cuadrado unitario formado por los puntos (0, 0), (0, 1), (1, 0) y (1, 1).

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$ $\quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(0) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix};$ $\quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(1) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};$

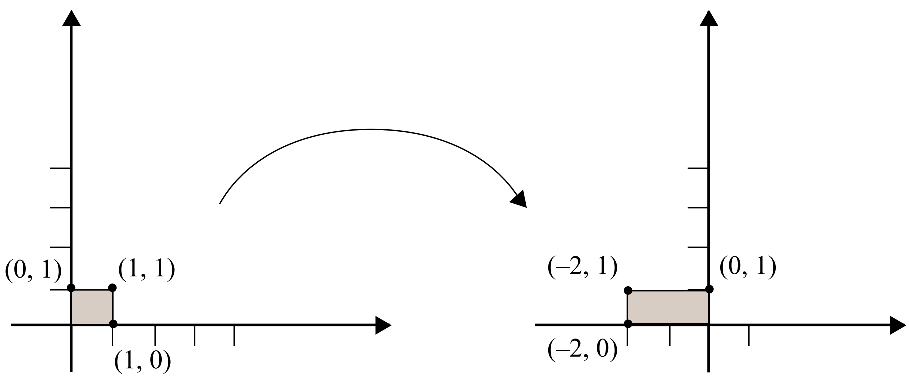


Figura 9.10.

Lo que significa que tenemos primero una expansión a lo largo del eje *x* y luego una reflexión respecto al eje *y*; y por lo tanto la matriz es el producto de la matriz de la expansión por la matriz de la reflexión.

Es decir: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ahora tenemos el siguiente resultado que nos permite caracterizar todas las transformaciones lineales de R^2 en R^2 que tienen una representación matricial invertible:

Teorema 9.2. Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ una transformación lineal con una representación matricial invertible. Entonces T se puede obtener como una sucesión de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones; sin embargo, esta expresión no es única.

¿Por qué la necesidad de que la matriz sea invertible?

Recordemos que un método para encontrar la inversa de una matriz es diagonalizándola, para lo cual llevamos la matriz original, mediante operaciones elementales con renglones, a la matriz identidad.

En este momento, hemos visto que podemos asociar las operaciones elementales con matrices llamadas elementales, por lo tanto al realizar en una matriz una operación elemental, lo que en realidad estamos haciendo es multiplicar la matriz por la matriz elemental asociada. Es por ello que al llevar una matriz a la forma diagonal, lo que estamos haciendo es varias multiplicaciones con matrices elementales. Si las asociamos con transformaciones, podemos ver que cada matriz elemental es un corte, o reflexión, o contracción o expansión, lo que nos lleva al resultado anterior.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 7

Consideremos la transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^2$ cuya representación matricial es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Vamos a llevar esta matriz a su forma diagonal por renglones, haciendo hincapié en las operaciones elementales que se realicen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -1/2 R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, que para llegar a la matriz original, deberíamos hacer los pasos inversos.

$R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2$; $\qquad R_2 \rightarrow -2R_2$; $\qquad R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1$

Cada una de ellas representa una matriz elemental:

$R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2$ representa a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_2 \rightarrow -2R_2$ representa a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1$ representa a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto la matriz original se obtiene como el producto de esas matrices elementales. Es importante hacer notar que la multiplicación se realiza por la izquierda, de donde tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Cada matriz elemental representa un tipo de transformación especial:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un corte a lo largo del eje x con $c = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ se puede descomponer en el producto de dos matrices.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una expansión a lo largo del eje y con $c = 2$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una reflexión respecto al eje x.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ es un corte a lo largo del eje y con $c = 3$.

Por tanto, al aplicar la transformación lineal original tenemos que:

1) cortar a lo largo del eje x con $c = 2$.
2) expandir a lo largo del eje y con $c = 2$.
3) reflejar respecto al eje x.
4) cortar a lo largo del eje y con $c = 3$.

Veamos esto con un vector especial.

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ entonces $T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Al usar las operaciones tenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{Corte}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{Expansión}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{Reflexión}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{Corte}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observemos geométricamente lo que sucede en cada paso.

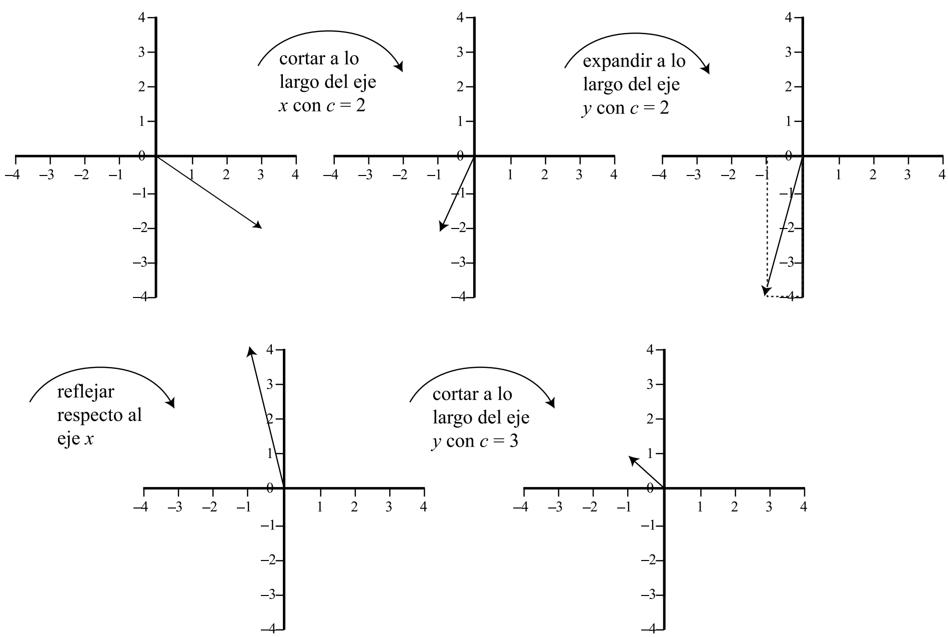


Figura 9.11.

Ahora podemos abordar el tema de las rotaciones.

Tomemos un vector $\mathbf{v} = (x, y)$ del plano cartesiano, y supongamos que se rota un ángulo θ, medido en grados o radianes, en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

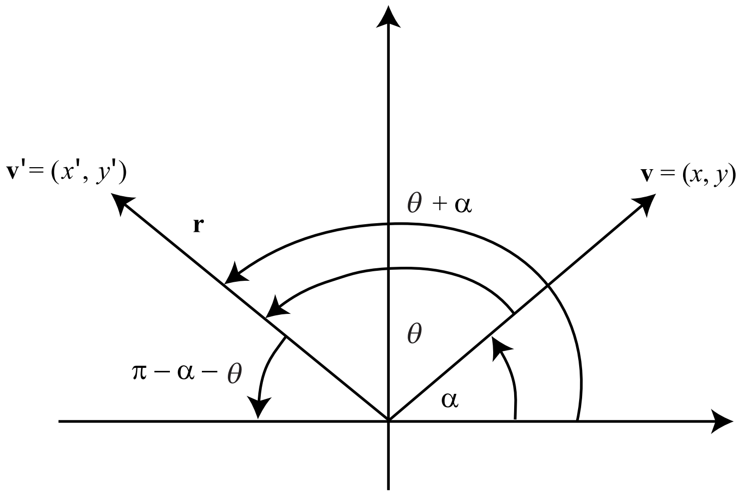


Figura 9.12.

Llamemos $\mathbf{v}' = (x', y')$ al nuevo vector rotado, entonces, si r denota la longitud del vector **v** (que no cambia por la rotación), tenemos las siguientes igualdades (usando trigonometría):

$x = r\cos\alpha$ $\qquad$ $y = r\,\text{sen}\,\alpha$

$x' = r\cos(\theta + \alpha)$ $\qquad$ $y' = r\,\text{sen}\,(\theta + \alpha)$

pero $r\cos(\theta + \alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\alpha$ de modo que

$x' = x\cos\theta - y\,\text{sen}\theta$

del mismo modo $r\,\text{sen}\,(\theta + \alpha) = r\,\text{sen}\theta\cos\alpha + r\cos\theta\,\text{sen}\alpha$, o sea

$y' = x\,\text{sen}\theta + y\cos\theta$

Construyamos la matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definamos la transformación.

Definición 9.7. Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ una transformación lineal definida por $T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\mathbf{v}$ se llama **transformación de rotación**, donde θ es el ángulo que se forma entre el vector original y el vector rotado.

Veamos varios ejemplos.

Ejemplo 8

1. Encontrar la matriz de la rotación con $\theta = 45^o$:

$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\text{sen}45^\circ \\ \text{sen}45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$ pero sen 45º = cos 45º, entonces

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\text{sen}45^\circ \\ \text{sen}45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}45^\circ & -\text{sen}45^\circ \\ \text{sen}45^\circ & \text{sen}45^\circ \end{pmatrix} = \text{sen}45^\circ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Encontrar la matriz de la rotación con $\theta = 90^o$:

$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\text{sen}90^\circ \\ \text{sen}90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$, pero cos 90º = 0 y sen 90º = 1, entonces:

$$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\text{sen}90^\circ \\ \text{sen}90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pero = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que son matrices elementales,

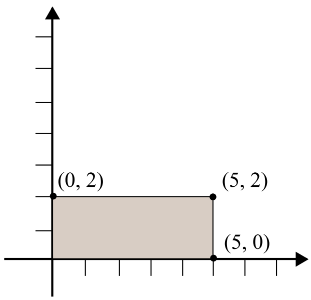
por tanto una rotación de 90º consiste en:

i) una reflexión respecto al eje x
ii) una reflexión respecto a la recta $y = x$.

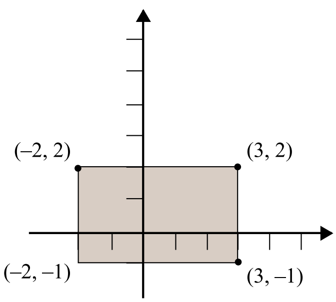
Ejercicio 1

1. En los siguientes problemas escribe la representación matricial de la transformación lineal dada y bosqueja la región obtenida al aplicar la transformación al rectángulo dado.

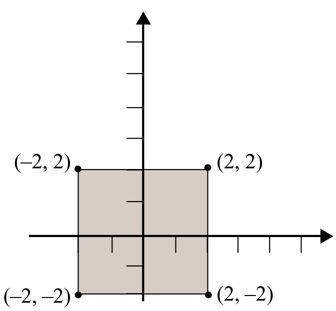
a) Expansión a lo largo del eje y con $c = 2$.



b) Corte a lo largo del eje x con $c = -2$.



c) Reflexión respecto a la recta $y = x$.



2. Expresa cada una de las transformaciones lineales siguientes como una sucesión de expansiones, compresiones, reflexiones y cortes (se da la representación matricial de la transformación lineal).

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3. Encuentra la matriz de las siguientes rotaciones y di si se puede expresar como producto de extensiones, compresiones, cortes y reflexiones.

a) $\theta = 180^{\circ}$
b) $\theta = 270^{\circ}$

9.2. Isometrías

En unidades anteriores estudiamos espacios vectoriales con producto interno y norma. Vamos ahora a estudiar las transformaciones lineales entre estos espacios vectoriales.

Primero probaremos una propiedad de las matrices referente al producto interno.

Teorema 9.3. Sea A una matriz de orden $m \times n$. Sean $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{y} \in R^m$ vectores cualesquiera, entonces $A(x) \bullet y = x \bullet (A^t \mathbf{y})$

Observa que la parte derecha de la igualdad corresponde al producto interno de R^n, mientras que la parte izquierda corresponde al producto interno de R^m.

Este teorema nos indica que el producto de matrices conserva el producto interno.

Recordemos algunos resultados vistos en unidades anteriores:
si A es una matriz de $n \times n$.

1) Una matriz A es ortogonal si es invertible y $A^{-1} = A^t$.

2) Una matriz A es ortogonal si y sólo si las columnas de A son una base ortonormal de R^n.

Si tenemos una transformación lineal T: $R^n \rightarrow R^n$ cuya representación matricial A es ortogonal, entonces:

$$(\mathbf{Tx} \bullet \mathbf{Ty}) = \mathbf{Ax} \bullet \mathbf{Ay} = \mathbf{x} \bullet (\mathbf{A}^t \mathbf{Ay}) = \mathbf{x} \bullet (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Ay}) = \mathbf{x} \bullet (\mathbf{Iy}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$$

En particular si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathrm{T}\mathbf{x} \bullet \mathrm{T}\mathbf{x} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}$ de donde $|\mathrm{T}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$.

Definamos estas transformaciones especiales:

Definición 9.8. Sea T: $R^n \rightarrow R^n$ una transformación lineal, entonces T se llama **isometría** si para cada $\mathbf{x}$ en R^n se tiene que $|\mathrm{T}(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$.

Ejemplo 9

1. Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ una transformación lineal definida por

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

vamos a probar que T es isometría.

Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ entonces $\mathrm{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{pmatrix}$ por tanto

$$\mathrm{T}(\mathbf{x}) \bullet \mathrm{T}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)^2 = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}$$

De donde podemos asegurar que T es isometría.

Combinando el hecho de que las isometrías son transformaciones lineales, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 9.4. Sea T: $R^n \rightarrow R^n$ una isometría, entonces

i) $|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$

ii) $T(\mathbf{x}) \bullet T(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$

Este teorema nos indica que una isometría preserva la magnitud de un vector y el producto interno o escalar.

Recordemos que el producto interno de dos vectores es un escalar.

Si la transformación lineal tiene una representación matricial ortogonal, entonces es una isometría. El siguiente resultado nos dice que las isometrías se caracterizan por tener representaciones matriciales ortogonales.

Teorema 9.5. Una transformación lineal T: $R^n \rightarrow R^n$ es isometría si y sólo si su representación matricial es ortogonal.

Tomaremos la isometría del ejemplo anterior para probar que su representación matricial es ortogonal.

Ejemplo 10

Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ una transformación lineal definida por

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; por el ejemplo 9 sabemos que es una isometría.

Vamos a probar que su representación matricial

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ es ortogonal.}$$

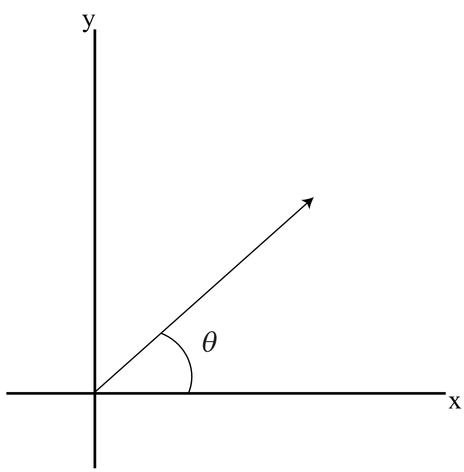
La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = A^t$. Por lo tanto A es ortogonal.

¿Cómo se caracterizan las isometrías de R^2 en R^2?

Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ una isometría, y sean $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ los vectores de la base canónica. Sabemos que estos vectores son ortonormales, es decir, su magnitud es 1 y su producto interno es 0.

Como T es una isometría, conserva el producto interno y las magnitudes, por lo tanto las imágenes de estos vectores T($\mathbf{e}_1$) y T($\mathbf{e}_2$) son también un conjunto ortonormal.

Un vector unitario en R^2 puede escribirse usando las siguientes equivalencias (ver rotaciones) $x = \cos\theta$ $y = \text{sen}\,\theta$, donde θ es el ángulo que forma el vector con el semieje positivo x.



Para encontrar la representación matricial de T necesitamos las imágenes de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. T($\mathbf{e}_1$) = ($\cos\theta$, sen θ) y T($\mathbf{e}_2$) = ($\cos\psi$, sen ψ).

Como son ortogonales, $\psi = \theta + \pi/2$ de donde

$$\cos\psi = \cos(\theta + \pi/2) = \cos\theta\cos\pi/2 - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi/2$$
$$\operatorname{sen}\psi = \operatorname{sen}(\theta + \pi) = \operatorname{sen}\theta\cos\pi/2 + \cos\theta\operatorname{sen}\pi/2$$

Sin embargo $\cos\pi/2 = 0$, $\operatorname{sen}\pi/2 = 1$ entonces

$$\cos\psi = \cos(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\operatorname{sen}\psi = \operatorname{sen}(\theta + \pi) = \cos\theta$$

por tanto $T(\mathbf{e}_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $T(\mathbf{e}_2) = (\cos\psi, \operatorname{sen}\psi) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.

Con estos vectores formamos la representación matricial de T:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Notemos que esta matriz es la representación de una rotación.

Sin embargo, si tomamos como base los vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{u}_2 = (0, -1)$ que también son ortogonales, tendremos como representación matricial la matriz de una reflexión seguida de una rotación:

El siguiente resultado nos confirma estos hallazgos:

Teorema 9.6. Si T: $R^2 \rightarrow R^2$ es una isometría, entonces T es:

i) una transformación de rotación, o
ii) una reflexión respecto al eje x seguida de una rotación.

Ejemplo 11

Consideremos la transformación lineal T definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$. Por el ejemplo 9 sabemos que es una isometría.

Vamos ahora a probar que es una rotación o una reflexión seguida de una rotación.

Si recordamos un poco de trigonometría, en un triángulo rectángulo equilátero, el sen 45º = cos 45º $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, por tanto

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\text{sen}45° \\ -\text{sen}45° & -\cos 45° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 45° & -\text{sen}45° \\ \text{sen}45° & \cos 45° \end{pmatrix}$$

que corresponden a las matrices de una reflexión seguida de una rotación.

Las isometrías tienen propiedades interesantes:

Teorema 9.7. Si T: $R^n \to R^n$ es una isometría, entonces

i) Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ es un conjunto ortogonal, entonces $\{T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), ..., T(\mathbf{u}_n)\}$es un conjunto ortogonal.
ii) T es un isomorfismo.
iii) T preserva ángulos.

Es importante hacer notar que si T es un isomorfismo, no necesariamente es una isometría.

Ejemplo 12

Sea T: $R^2 \to R^2$ la transformación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$.
Consideremos el vector $\mathbf{v} = (1, 0)$, entonces $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$,

sin embargo $\|T(\mathbf{v})\| = \sqrt{T(\mathbf{v}) \bullet T(\mathbf{v})} = \sqrt{(2,\ 0) \bullet (2,\ 0)} = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

de donde podemos asegurar que T no conserva longitudes, y por tanto no es una isometría.

También podríamos haber hecho el siguiente análisis:

La representación matricial de T respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, pero $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que representan una expansión a lo largo del eje

x con $c = 2$ seguido de una expansión a lo largo del eje y con $c = 2$, y por lo tanto no corresponde a ninguna de las caracterizaciones de las isometrías y es isomorfo porque R^2 a R^2 son de la misma dimensión.

Ejercicio 2

1. Di si la transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^3$ definida por

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$ es una isometría.

2. Di si las siguientes matrices representan isometrías y di si es rotación o rotación seguida de reflexión:

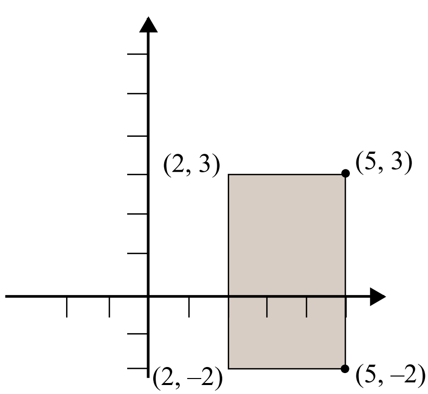
a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicios resueltos

1. Escribe la representación matricial de la reflexión con respecto al eje y y bosqueja la región obtenida al aplicar la transformación al rectángulo:



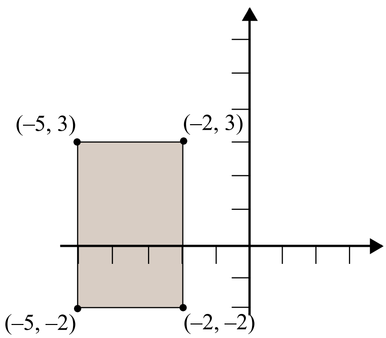
La matriz de la reflexión con respecto al eje y es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Al aplicarlo a cada uno de los vértices del rectángulo obtenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La figura resultante es



2. Expresa la matriz de la transformación como sucesión de cortes, extensiones, etcétera.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Primero vamos a diagonalizar la matriz poniendo atención a las operaciones elementales con renglones que realicemos.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} R_1 \rightleftarrows R_2 \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} R_1 \to 1/5R_1 \begin{pmatrix} 1 & 7/5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} R_2 \to -1/2R_2 \begin{pmatrix} 1 & 7/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to R_1 - 7/5R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que realizar las operaciones inversas, es decir

i) $R_1 \to R_1 - 7/5R_2$ le corresponde $R_1 \to R_1 + 7/5R_2$
ii) $R_2 \to -1/2R_2$ le corresponde $R_2 \to -2R_2$
iii) $R_1 \to 1/5R_1$ le corresponde $R_1 \to 5R_1$
iv) $R_1 \leftrightarrows R_2$ se queda igual.

El siguiente paso es identificar cada una de estas operaciones con una matriz, en el orden inverso.

Operación elemental	Matriz elemental	Transformación
$R_1 \leftrightarrow R_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Reflexión respecto a la recta $y = x$
$R_1 \to 5R_1$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Expansión a lo largo del eje x $c = 5$
$R_2 \to -2R_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Reflexión respecto al eje x
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	Expansión a lo largo del eje y $c = 2$
$R_1 \to R_1 + 7/5R_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 7/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de x $c = 7/5$

3. Encuentra la matriz de la rotación de $\theta = 135^o$.

La matriz de rotación con $\theta = 135^o$ es $\begin{pmatrix} \cos 135° & -\text{sen}135° \\ \text{sen}135° & \cos 135° \end{pmatrix}$ sin embargo

sen 135^o = sen 45^o; cos 135^o = – cos 45^o, sen 45^o = cos 45^o por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \cos 135° & -\text{sen}135° \\ \text{sen}135° & \cos 135° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 45° & -\text{sen}45° \\ \text{sen}45° & -\cos 45° \end{pmatrix} = \text{sen}45° \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Di si la reflexión respecto a la recta $y = x$ representa una isometría.

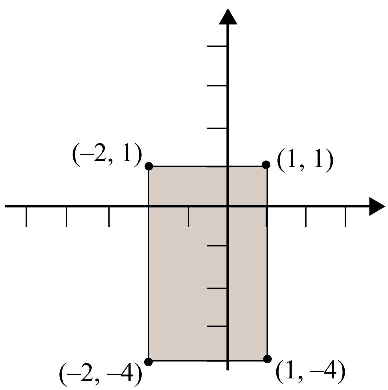
La reflexión respecto a la recta $y = x$ tiene como matriz a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Además $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de una reflexión respecto el eje x y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de rotación de $\theta = 90^{o}$

Por tanto es una isometría.

Ejercicios propuestos

1. Escribe la representación matricial del corte a lo largo del eje y con $c = 3$ y bosqueja la región obtenida al aplicar la transformación al rectángulo:



2. Expresa la matriz de la transformación como sucesión de cortes, expansiones, etcétera.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Encuentra la matriz de la rotación de $\theta = 360^{o}$

4. Di si la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa una isometría.

Autoevaluación

1. Es la matriz que representa una expansión a lo largo del eje y:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Es la matriz que representa una reflexión con respecto a la recta $y = x$:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. La matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ representa una reflexión respecto al eje x seguida de una...

a) Reflexión respecto al eje y.
b) Corte a lo largo de x con $c = 3$
c) Compresión a lo largo de x con $c = 3$.
d) Expansión a lo largo de x con $c = 3$.

4. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ representa una reflexión respecto al eje x seguida de una...

a) Reflexión respecto a la recta $y = x$.
b) Reflexión respecto al eje y.
c) Corte a lo largo del eje y con $c = -1$.
d) Corte a lo largo del eje x con $c = -1$.

5. Si T: $R^2 \rightarrow R^2$ es una isometría, entonces:

a) Es una reflexión con respecto a la recta $y = x$.
b) Su representación matricial es la identidad.
c) Es un isomorfismo.
d) Su representación matricial es ortogonal.

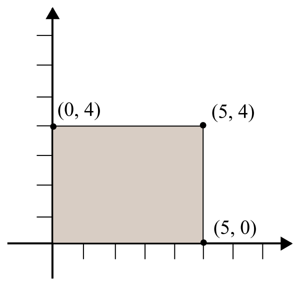
6. Di si son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones:
a) Si T: $R^2 \rightarrow R^2$ es una isometría, entonces T(1, 0) es ortogonal a T(0, 1).
b) Si T es un isomorfismo, entonces T es una isometría.
c) Si T es una reflexión, entonces T es una isometría.
d) Si T es una isometría, entonces T es una reflexión.
e) La matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ representa una rotación.

Respuestas a los ejercicios

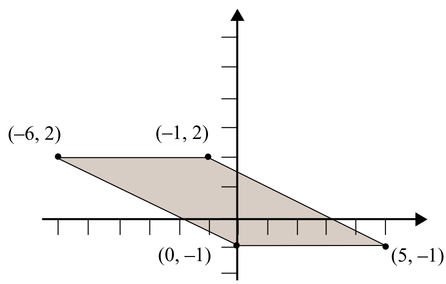
Ejercicio 1

1.

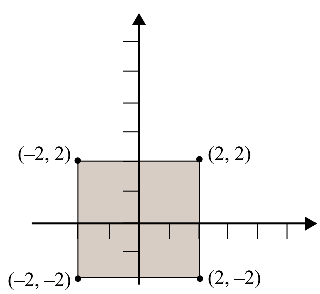
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



2.

a)

Matriz elemental	Transformación
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Expansión respecto a x; $c = 2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de y; $c = 5$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}$	Expansión respecto a y; $c = 5/2$
$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de x; $c = -1/2$

b)

Matriz elemental	Transformación
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de x; $c = -1$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Expansión respecto a x; $c = 2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de y; $c = -1$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$	Expansión respecto a y; $c = 7$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de x; $c = 3$

c)

Matriz elemental	Transformación
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de x; $c = 1$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Reflexión con respecto a x
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de y; $c = 4$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$	Expansión respecto a y; $c = 18$
$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de x; $c = -4$

Nota: Aclaramos que ésta no es la única solución.

3.

•

a)

b) $\begin{pmatrix} \cos 270° & -\text{sen} 270° \\ \text{sen} 270° & \cos 270° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^t$ por tanto es ortogonal y representa una isometría.

2.

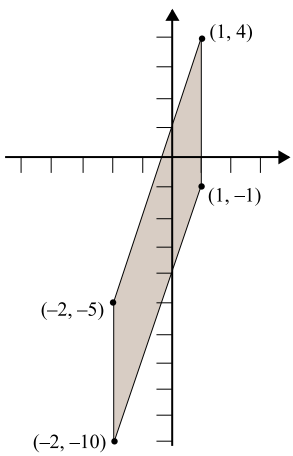
a) Sí, es una rotación de $\theta = 90^{\text{o}}$.

b) Sí, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ que representan una rotación y una reflexión con el eje x.

c) Sí, $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ representan una reflexión con el eje x y una rotación de 180º.

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$



2.

Matriz elemental	**Transformación**
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Reflexión respecto a $y = x$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	Expansión respecto a y; $c = 3$
$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Corte a lo largo de x; $c = -2$

3. $\begin{pmatrix} \cos 360° & -\text{sen}360° \\ \text{sen}360° & \cos 360° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sí, es una rotación de 360º.

Respuestas a la autoevaluación

1. a)
2. a)
3. d)
4. a)
5. d)
6.

a) V
b) F
c) F
d) F
e) V