

Introducción

En el área económico-administrativa es de gran importancia el estudio de variables como el costo total, el ingreso, el consumo, el ahorro, entre otros. Para poder estudiar estos y otros fenómenos de tipo administrativo, se hace necesario el uso de las matemáticas para explicarlos de manera cuantitativa.

Muchas de las variables que intervienen en estos fenómenos tienen un comportamiento que obedece a una función lineal la cual se representa geométricamente por medio de una recta.

En este tema se estudiará la ecuación de la recta y sus propiedades, así como algunas de sus aplicaciones entre las que se encuentran el modelo de costo lineal, la oferta y la demanda y muy especialmente el punto de equilibrio.

Competencia

Al finalizar la unidad, el alumno podrá:

- Comprender la importancia de la línea recta y su aplicación al modelo de costo lineal.
- Aplicar las ecuaciones lineales en decisiones de producción, costeo y reducción de inventarios.
- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Resolver problemas de la empresa a partir de un sistema de ecuaciones.
- Determinar la oferta y la demanda.
- Determinar el punto de equilibrio.

Contenido

- 4.1. Importancia de la línea recta y su aplicación al modelo de costo lineal.
 - 4.1.1. Pendiente y ordenada al origen.
 - 4.1.2. Ecuación de la recta dadas la pendiente y un punto.
 - 4.1.3. Ecuación de la recta dados dos puntos.
 - 4.1.4. Gráfica de una recta dada su ecuación.
 - 4.1.5. Aplicación al modelo de costo lineal.
- 4.2. Ecuaciones lineales y su aplicación: decisiones en producción, costeo y reducción de inventarios.
 - 4.2.1. Decisiones en producción.
 - 4.2.2. Depreciación lineal.
- 4.3. Sistema de ecuaciones.
 - 4.3.1. Los sistemas de ecuaciones lineales y su relación con la posición de dos rectas en el plano.
 - 4.3.2. Solución de un sistema de ecuaciones.
 - 4.3.2.1. Método de sustitución.
 - 4.3.2.2. Método de igualación.
 - 4.3.2.3. Método de reducción o suma y resta.
- 4.4. Solución de problemas de la empresa a partir de un sistema de ecuaciones.
- 4.5. La oferta y la demanda: una aplicación de la línea recta al entorno de los negocios.
 - 4.5.1. Determinación de la oferta.
 - 4.5.2. Determinación de la demanda.
- 4.6. Determinación del punto de equilibrio a través de la visión algebraica.
 - 4.6.1. Punto de equilibrio a partir de la oferta y la demanda.
 - 4.6.2. Punto de equilibrio a partir del ingreso y el costo.
 - 4.6.3. La utilidad.

4.1. Importancia de la línea recta y su aplicación al modelo de costo lineal

Un fabricante de ropa ha decidido poner en liquidación un lote de prendas con defecto. ¿Qué precio deberá poner en la etiqueta para que durante la liquidación pueda reducir este precio en 25% y aun así obtener una ganancia de 15% sobre el costo de la prenda?

Situaciones como ésta se presentan cotidianamente en el mundo de los negocios, para poder responder ésta y algunas otras preguntas necesitamos conocer algunos aspectos importantes sobre las rectas y su relación con las ecuaciones lineales.

Una línea recta es la gráfica de una ecuación lineal con dos variables; su forma general es $Ax + By + C = 0$; pero ¿qué relación existe entre los coeficientes A , B y C y las características de una recta?

Una de las características importantes de una recta es su inclinación; una recta puede estar inclinada hacia la derecha, hacia la izquierda, ser horizontal o vertical.

4.1.1. Pendiente y ordenada al origen

$$m = \tan \theta$$

Se llama pendiente de una recta a la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo X ; se denota por la letra m .

- Si la recta se encuentra inclinada hacia la derecha, el ángulo de inclinación es $0 < \theta < 90^\circ$ y la pendiente es positiva $m > 0$.
- Si la recta se encuentra inclinada hacia la izquierda, el ángulo de inclinación es $90^\circ < \theta < 180^\circ$ y la pendiente es negativa $m < 0$.

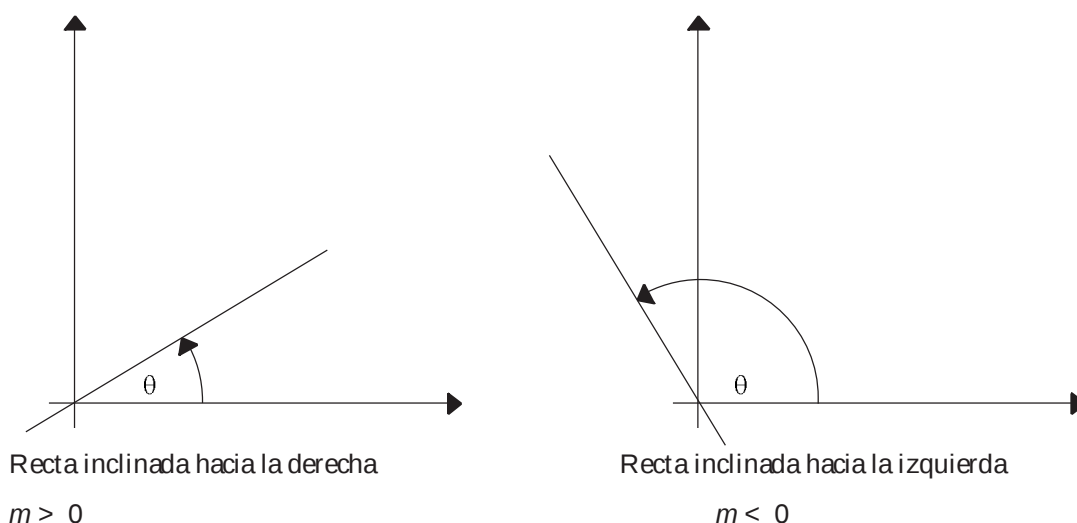
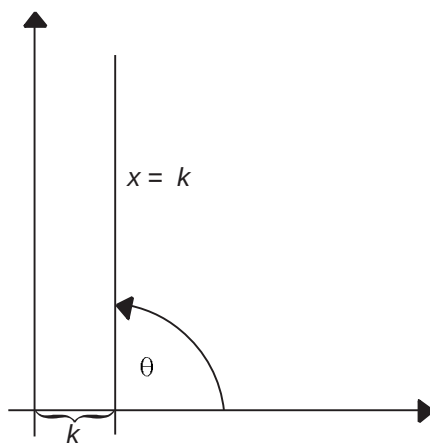


Figura 1. Inclinación de la recta y el signo de la pendiente

- Si la recta es horizontal, el ángulo de inclinación es $\theta = 0^\circ$ y la pendiente es cero $m = 0$. Estas rectas tienen como ecuación $y = k$, donde k es una constante.
- Si la recta es vertical, el ángulo de inclinación es $\theta = 90^\circ$ y no existe la pendiente (tan 90° no existe). Estas rectas tienen como ecuación $x = k$ donde k es una constante.



Recta vertical, no existe la pendiente.

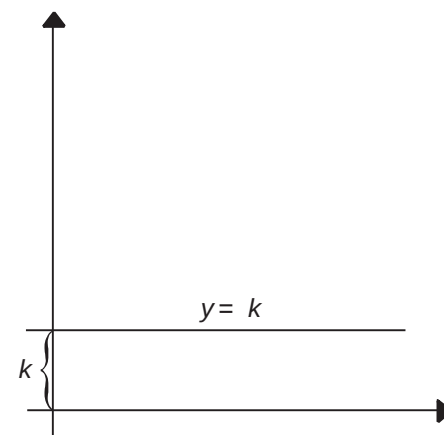
Recta horizontal $m = 0$

Figura 2. Inclinación de la recta y su relación con la pendiente

Ordenada al origen

Se llama ordenada al origen de una recta a la coordenada “ b ” del punto $(0, b)$ donde la recta intersecta al eje Y.

¿Cómo reconocemos la ordenada al origen y la pendiente de una recta cuya ecuación es de la forma general $Ax + By + C = 0$?

a) Primero despejamos y de la ecuación:

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Esta ecuación ya tiene la forma:

$y = mx + b$ de donde la pendiente está dada por:

$$m = -\frac{A}{B}$$

Y la ordenada al origen por:

$$b = -\frac{C}{B}$$

Ecuación ordinaria

Se llama **ecuación ordinaria** de una recta a la ecuación de la forma $y = mx + b$ donde m representa la pendiente de la recta y b corresponde a la ordenada al origen.

Ecuación general

Se llama **ecuación general** de una recta a la ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ donde A , B y C son números enteros.

● Ejemplo 1

¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es $3x - 2y + 5 = 0$?

Despejamos y de la ecuación para llegar a la forma $y = mx + b$

$$3x - 2y + 5 = 0$$

$$-2y = -3x - 5$$

$$y = \frac{-3x}{-2} + \frac{-5}{-2}$$

$$y = \frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$$

Respuesta: Identificamos la pendiente y la ordenada al origen:

$$m = \frac{3}{2} \quad b = \frac{5}{2}$$

● Ejemplo 2

Identifica la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es

$$-8x + 3y = -9$$

Despejamos y de la ecuación para llegar a la forma $y = mx + b$

$$-8x + 3y + 9 = 0$$

$$3y = 8x - 9$$

$$y = \frac{8x}{3} + \frac{-9}{3}$$

$$y = \frac{8x}{3} - 3$$

Respuesta: Identificamos la pendiente y la ordenada al origen:

$$m = \frac{8}{3} \quad b = -3$$

Actividad 1

Identifica la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes ecuaciones de la recta y menciona hacia donde está inclinada.

a) $2x - y = 5$

b) $x + 2y = 0$

c) $3x = -2y + 9$

d) $5y - 4 = 3x$

e) $y = -8$

4.1.2. Ecuación de la recta dadas la pendiente y un punto

¿Cuántas rectas tienen la misma pendiente?

La respuesta es ¡infinitas!, ya que todas las rectas paralelas a una recta dada tienen la misma inclinación y por tanto la misma pendiente.

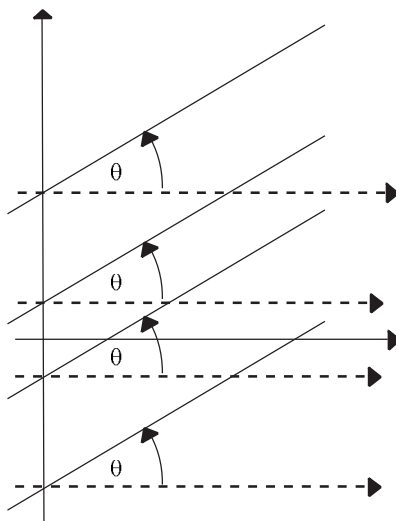


Figura 3. Rectas con la misma inclinación.

Sin embargo existe solo una única recta con una pendiente dada y que pase por un punto fijo (x_1, y_1) .

Para encontrar la ecuación que representa esta recta sustituimos los datos (m y el punto (x_1, y_1)) en la siguiente fórmula conocida como **forma punto-pendiente de la recta**: $y - y_1 = m(x - x_1)$ y después despejamos la variable y .

● Ejemplo 3

Obtener la ecuación que representa a la recta con pendiente -3 y que pasa por el punto $(2, -3)$.

Sustituimos los datos $m = -3$ y $(2, -3)$ en la ecuación: $y - y_1 = m(x - x_1)$

y despejamos y

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = (-3)(x - 2)$$

$$y + 3 = -3x + 6$$

$$y = -3x + 6 - 3$$

$$y = -3x + 3$$

Respuesta: La ecuación que representa a la recta es

$$y = -3x + 3$$

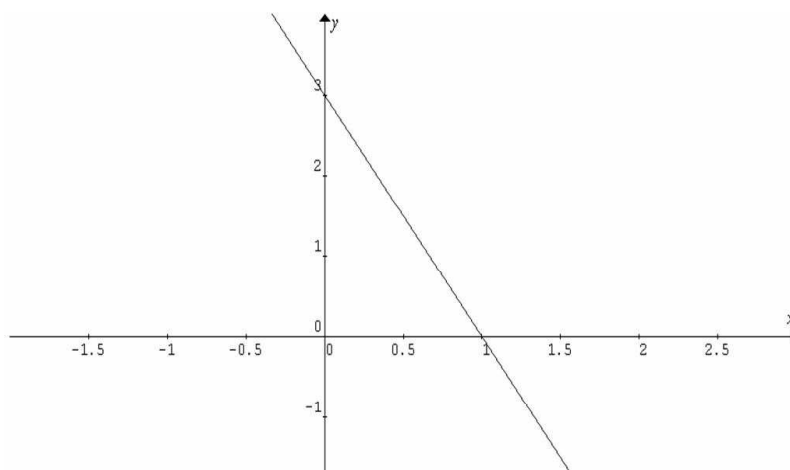


Figura 4. Gráfica de la recta $y = -3x + 3$

● Ejemplo 4

¿Cuál es la ecuación de la recta con pendiente $\frac{2}{3}$ y que pasa por el punto $(-2, 0)$?

Sustituimos los datos $m = \frac{2}{3}$ y $(-2, 0)$ en la ecuación: $y - y_1 = m(x - x_1)$ y

despejamos y

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \left(\frac{2}{3}\right)(x - (-2))$$

$$y - 0 = \left(\frac{2}{3}\right)(x + 2)$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

Respuesta: La ecuación que representa a la recta es

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

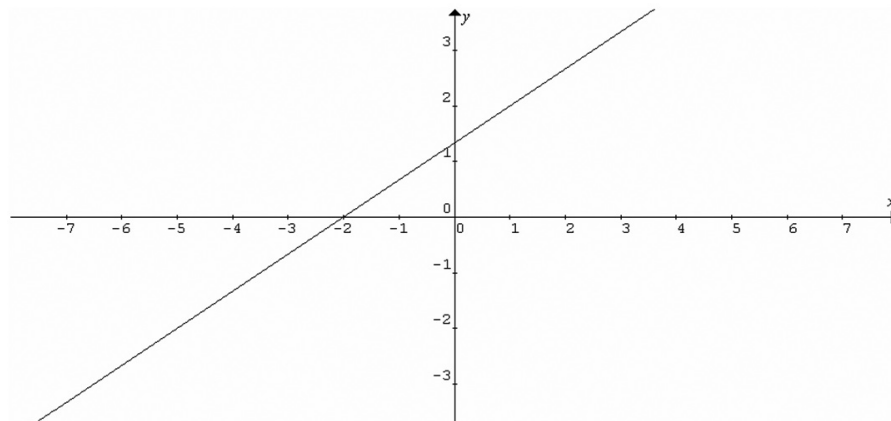


Figura 5. Gráfica de la recta $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

Actividad 2

Obtén la ecuación de la recta con pendiente m y que pasa por el punto dado.

a) $m = \frac{2}{5}; \left(\frac{1}{2}, -4\right)$

b) $m = -4; (-4, 3)$

c) $m = -\frac{1}{4}; (0, -1)$

d) $m = 2; (0, 0)$

e) $m = 0; (-3, 0)$

4.1.3. Ecuación de la recta dados dos puntos

¿Cuántas rectas existen que pasen por un punto dado? ¡Infinitas!

Sin embargo existe sólo una recta que pasa por dos puntos dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

Para encontrar la ecuación que representa esta recta se siguen los siguientes pasos:

- Primero obtenemos la pendiente de la recta.

Ésta se encuentra sustituyendo los datos en la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Una vez que se tiene la pendiente, elegimos alguno de los dos puntos, lo sustituimos en la fórmula punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Y despejamos la variable y .

- **Ejemplo 5**

Obtener la ecuación que representa a la recta que pasa por los puntos

$(2, -3)$ y $(-1, 0)$.

Sustituimos los datos en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{0 - (-3)}{-1 - 2} = \frac{3}{-3} = -1$$

Elegimos un punto, y se sustituyen los datos en la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Y después despejamos y ,

Con $(2, -3)$ y $m = -1$	Con $(-1, 0)$ y $m = -1$
$y - y_1 = m(x - x_1)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - (-3) = (-1)(x - 2)$	$y - 0 = (-1)(x - (-1))$
$y + 3 = -x + 2$	$y - 0 = (-1)(x + 1)$
$y = -x + 2 - 3$	$y = -x - 1$
$y = -x - 1$	

Respuesta: La ecuación que representa a la recta es

$$y = -x - 1$$

■ **Nota:** Como puedes ver, la ecuación es la misma sin importar cuál de los dos puntos se tomen en cuenta para realizar los cálculos.

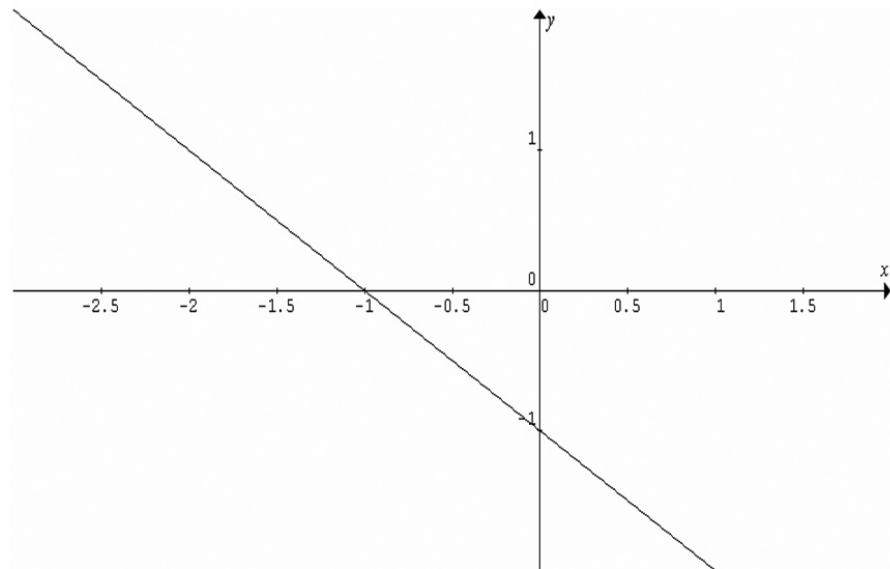


Figura 6. Gráfica de la recta $y = -x - 1$

Actividad 3

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por las siguientes parejas de puntos

- a) $(-3, 5)$ y $(2, 4)$
- b) $\left(\frac{3}{5}, -2\right)$ y $(2, 0)$
- c) $(0, 0)$ y $\left(\frac{1}{5}, 3\right)$
- d) $(-1, 1)$ y $(-3, 0)$
- e) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y $(-3, -2)$

4.1.4. Gráfica de una recta dada su ecuación

Para obtener la gráfica de una recta dada su ecuación en la forma $y = mx + b$, seguimos los siguientes pasos

- Localizamos el punto correspondiente a la ordenada al origen, $(0, b)$, sobre el eje Y.
- Escribimos la pendiente como fracción $m = \frac{a}{c}$, esto indica que por cada c unidades que se recorre en el eje X (denominador de la pendiente = c) se recorren a unidades hacia arriba (si a es positivo) o hacia abajo (si a es negativo) en el eje Y (numerador de la pendiente = a); con esto se localiza otro punto.
- Por último unimos los dos puntos y se prolonga la recta.

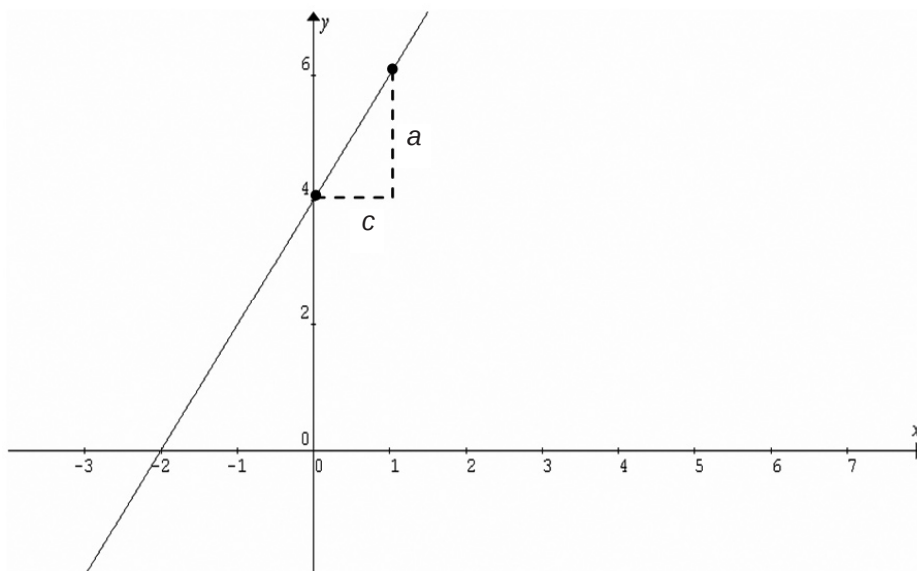


Figura 7. Pendiente de la recta $y = mx + b$ donde $m = \frac{a}{c}$

• Ejemplos 6

Dibujar la gráfica de la recta:

$$y = -\frac{4}{3}x + 3$$

De la ecuación identificamos la ordenada al origen, $b = 3$ y localizamos el punto $(0, 3)$ en el eje Y

Se localiza otro punto a partir de éste:

Recorremos 3 unidades hacia la derecha sobre el eje X

(denominador de la pendiente = 3) y “bajamos” 4 unidades en el eje Y

(numerador de la pendiente = -4).

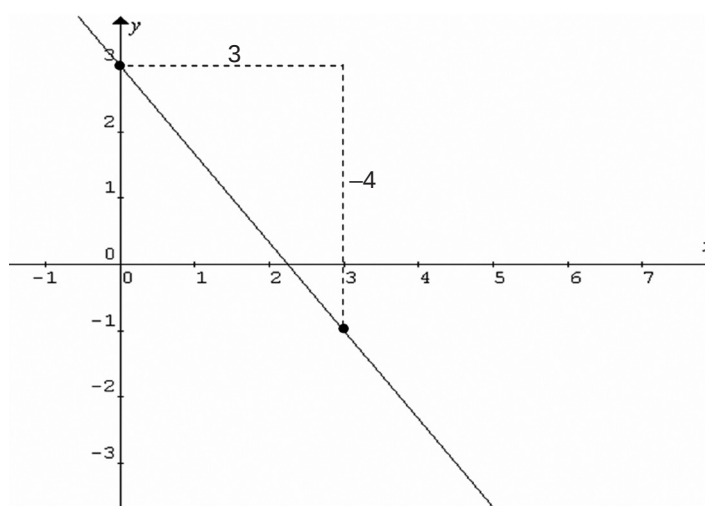
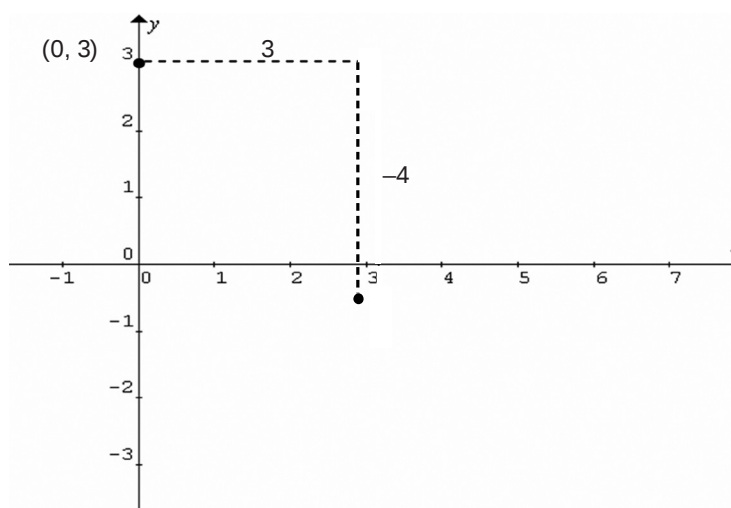
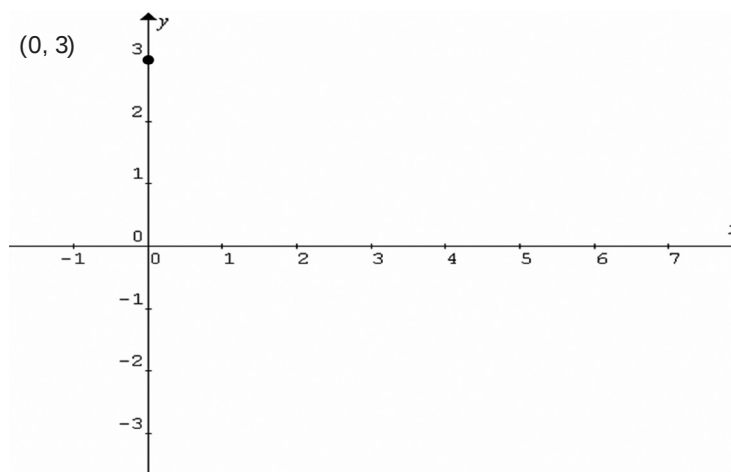


Figura 8. Gráfica de la recta $y = -\frac{4}{3}x + 3$

● **Ejemplo 7**

Dibujar la gráfica de la recta $5x - 3y + 8 = 0$

Como la recta está en su forma general se pasa a la forma ordinaria despejando la variable y .

$$y = \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}$$

Identificamos la ordenada al origen $b = \frac{8}{3}$

y localizamos el punto $\left(0, \frac{8}{3}\right)$ en el eje Y

Se localiza otro punto a partir de éste:

Recorremos 3 unidades hacia la derecha sobre el eje X

(denominador de la pendiente = 3)

Y “subimos” 5 unidades en el eje Y

(numerador de la pendiente = 5).

Unimos ambos puntos.

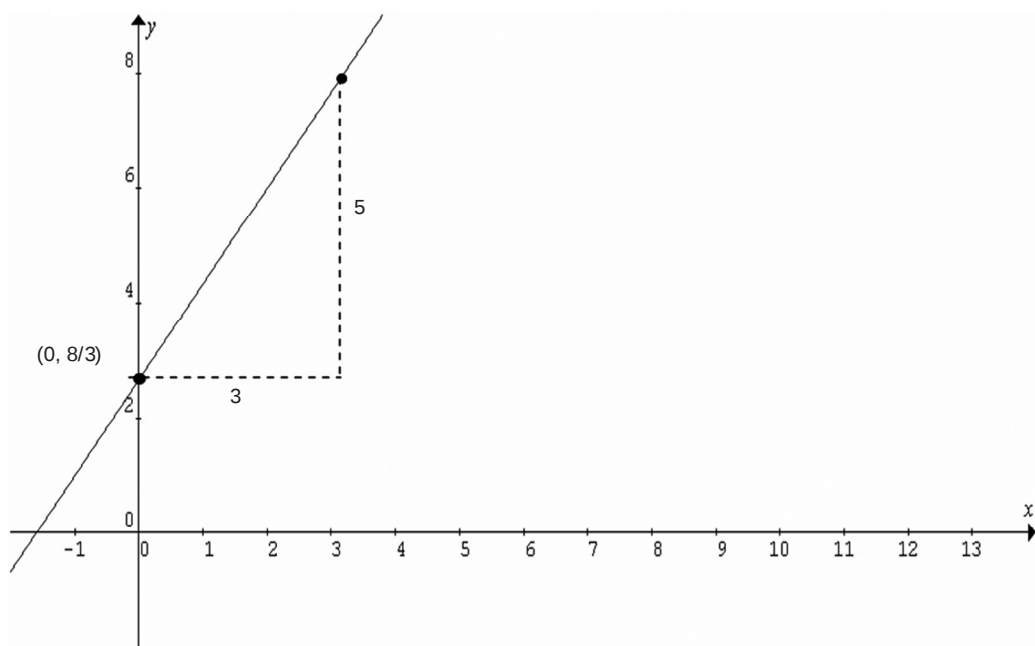


Figura 9. Gráfica de la recta $y = \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}$

Actividad 4

Realiza la gráfica de las siguientes rectas

a) $y = -2x + 4$

b) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

c) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{1}{3}$

d) $y = -4x + \frac{1}{3}$

e) $y = \frac{2}{3}x$

4.1.5. Aplicación al modelo de costo lineal

En el mundo de los negocios es muy importante el modelo de costo lineal, así que vamos a introducir algunos conceptos

$$C_f$$

Se llama **costo fijo** a la suma de todos los costos de una empresa que no dependen del nivel de producción tales como la renta, los seguros, etcétera; este gasto se debe cubrir independientemente de que exista o no producción. Se denota como C_f .

$$C_v = Cq$$

Se llama **costo variable** a la suma de todos los costos que dependen del nivel de producción, tales como salarios, costo de la materia prima, etcétera. Se denota como C_v . Si denotamos por q al nivel de producción, los costos variables se denotan como $C_v = Cq$, donde C es el costo por unidad.

$$C_T$$

Se llama **costo total** a la suma de los costos variables más los costos fijos. Se denota como C_T .

$$C_T = C_v + C_f = Cq + C_f$$

$$y = mx + b$$

Como puedes observar esta ecuación tiene la forma:

donde los costos variables corresponden a la pendiente y el costo fijo a la ordenada al origen; al costo que tiene este modelo se le denomina **Modelo de costo lineal**.

● Ejemplo 8

Una compañía tiene costos fijos por \$80 000, mientras que el costo por unidad es de \$6. Determina la ecuación de costo total de la compañía.

El costo fijo es $C_f = 80\,000$ y el costo por unidad es $C_v = 6$; si q representa el nivel de producción de la compañía, la ecuación de costo total será: $C_T = 6q + 80\,000$

Para graficar la ecuación que corresponde al modelo de costo lineal se toman en cuenta sólo valores positivos para la variable q que corresponde al nivel de producción (no tiene sentido un nivel de producción negativo).

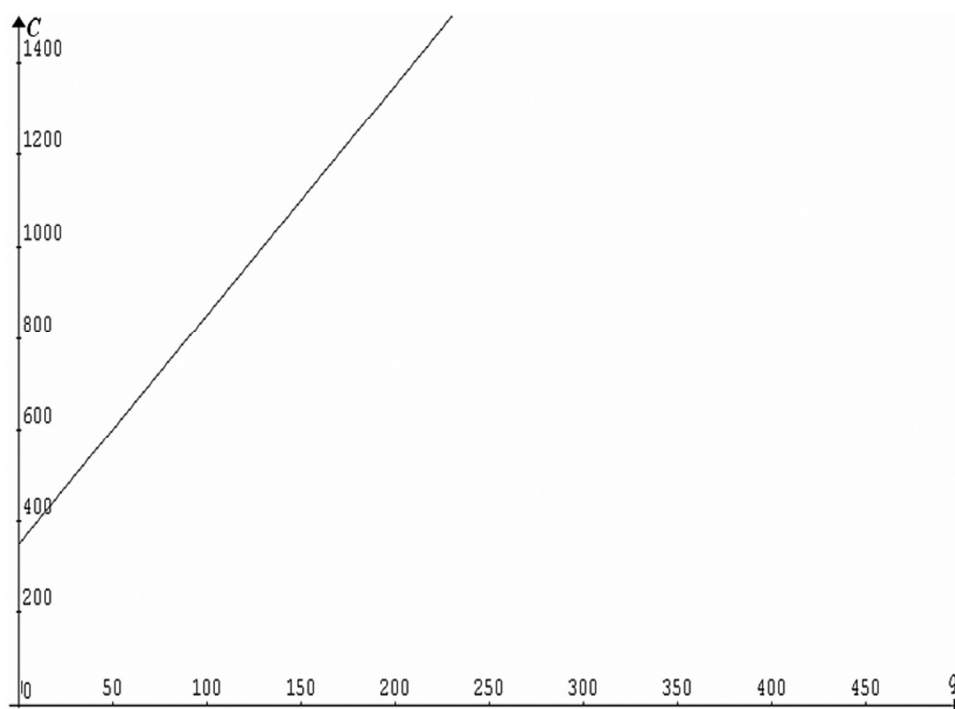


Figura 10. Gráfica del costo total $C_T = 6q + 80\,000$

● Ejemplo 9

Un productor de café determinó que el costo de procesar un kilo de café es de \$5 y que sus costos fijos por día ascienden a \$350. Determina la ecuación del costo total diario y grafica.

El costo fijo es

$$C_f = 350$$

El costo por unidad es

$$C = 5$$

Si q representa los kilos de café procesados diariamente, la ecuación del costo total diario es

$$C_T = 5q + 350$$

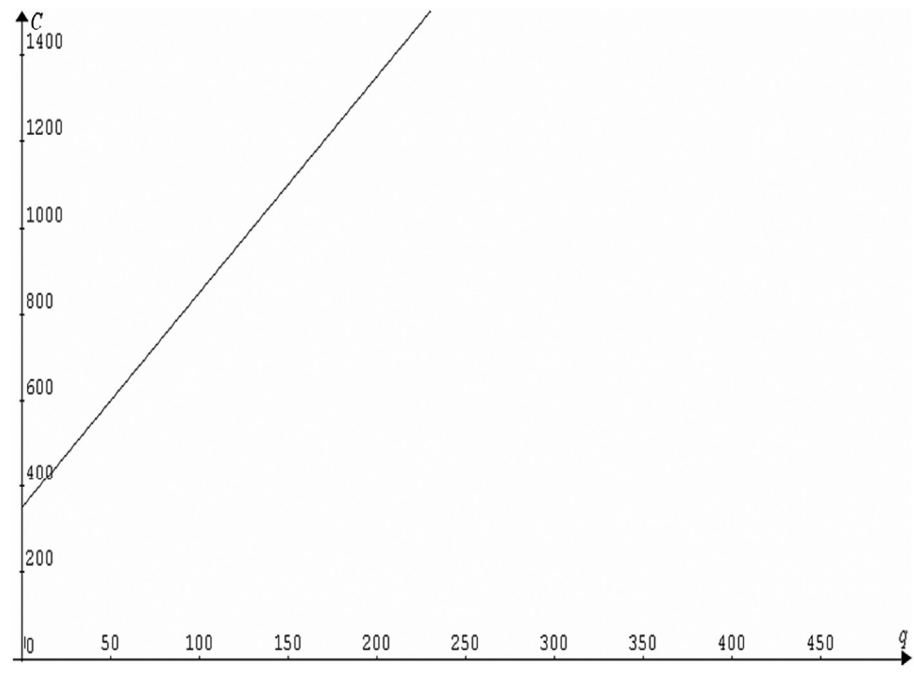


Figura 11. Gráfica de $C_T = 5q + 350$

Los ingresos de una empresa se definen como la cantidad de dinero que se percibe por la venta de los productos que fabrica, o bien por la prestación de un servicio. El modelo matemático que se utiliza para describir los ingresos tiene la forma:

$$I = pq$$

Donde I representa los ingresos, p representa el precio de los productos o servicios y q representa el nivel de producción. La representación gráfica de esta función de ingresos es una recta cuya pendiente es el precio y que siempre pasa por el origen (si no hay ventas no hay ingreso).

● Ejemplo 10

Una papelería vende un lote de cuadernos a \$16 cada uno.

- Determina la función de ingreso.
- ¿Cuál será el ingreso por vender 100 cuadernos?
- ¿Cuántos cuadernos tendrá que vender si requiere un ingreso de \$2 000?

- a) Determina la función de ingreso.

Respuesta: Del enunciado del problema tenemos que el precio de venta p es \$16. Si q representa el número de cuadernos vendidos, la función de ingreso está dada por la expresión: $I = 16q$

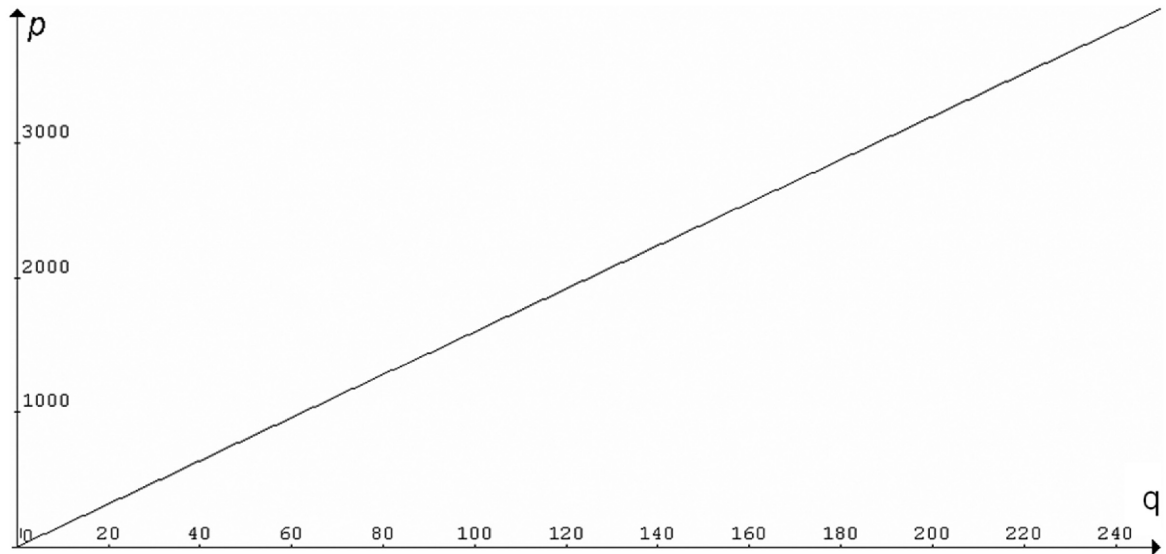


Figura 12. Gráfica del ingreso $I = 16q$

- b) ¿Cuál será el ingreso de vender 100 cuadernos?

Para calcular el ingreso de vender 100 cuadernos, sustituimos q por este valor en la ecuación.

$$I = 16q$$

$$I = 16 (100) = 1\,600$$

Respuesta: Por vender 100 cuadernos, la papelería tendrá un ingreso de \$1 600

- c) ¿Cuántos cuadernos tendrá que vender si se requiere un ingreso de \$2 000?

Para saber cuántos cuadernos hay que vender para lograr un ingreso de 2 000 se sustituye este valor por I en la ecuación, y se despeja q .

$$I = 16q$$

$$2000 = 16q$$

$$q = \frac{2000}{16}$$

$$q = 125$$

Respuesta: Para lograr un ingreso de \$2 000 se requiere vender 125 cuadernos.

Actividad 5

Resuelve los siguientes problemas.

- a) Una fábrica de muebles tiene costos fijos por \$1 500 diarios. Si el costo de fabricar una silla es de \$70:
 - i) Determina la función de costo total y grafica.
 - ii) ¿Cuál será el costo de fabricar 100 sillas diarias?

- b) Una compañía de banquetes ofrece un paquete para grupos con un costo de \$100 por persona, mas un cargo extra de \$2 500 para el salón.
 - i) Determina la función de costo total.
 - ii) ¿Cuántas personas se podrá invitar si se cuenta con \$5 000 para pagar el banquete?

- c) Los costos fijos por producir cierto artículo son de \$50 500 mensuales y los costos por unidad son de \$35. Si se puede vender cada artículo a \$60, contesta cada uno de los siguientes incisos
 - i) Determina la función de costo total.
 - ii) Determina la función de ingreso.
 - iii) ¿Cuántos artículos se pueden producir con \$56 450?
 - iv) ¿Cuál será el ingreso por el número de artículos producidos con los \$56 450?

- d) El gerente de una fábrica de zapatos ha determinado que el costo de producir cada par es de \$78 y los puede vender a \$265. Si sus costos fijos son de \$23 000 mensuales realiza lo que se te pide:
 - i) Determina la función de costo total.
 - ii) Determina la función de ingreso.
 - iii) Si tiene un pedido por 70 pares de zapatos, ¿cuánto dinero necesitará aportar para su fabricación?
 - iv) ¿Cuál será el ingreso que obtendrá de ese pedido?

- e) Un fabricante puede vender su producto a \$125 cada uno; si los costos de producción son de \$35 por unidad y sus costos fijos ascienden a \$3 800 mensuales, realiza lo que se te pide:

- i) Determina la función de costo total.
- ii) Determina la función de ingreso.
- iii) ¿Cuál será el costo por fabricar 150 artículos?
- v) ¿Cuántos artículos tendrá que vender si requiere un ingreso mensual de \$15 000?

4.2. Ecuaciones lineales y su aplicación: Decisiones en producción, costeo y reducción de inventarios

4.2.1. Decisiones en producción

Tener una expresión que representa el costo total para la producción de una compañía, permite tomar decisiones sobre el costo que representa aumentar o disminuir el nivel de producción.

● Ejemplo 11

Se sabe que una compañía tiene como función de costo lineal $C_T = 6q + 80\,000$; ¿qué nivel de producción representa costos totales por \$100,500?

En este caso se quiere conocer el valor de q que representa el nivel de producción; para ello se sustituyen en la ecuación de costo total los datos del problema:
 $C_T = 100\,500$ y $C_f = 80\,000$ y se despeja la variable q que representa el nivel de producción.

$$C_T = 6q + 80\,000$$

$$100\,500 = 6q + 80\,000$$

$$100\,500 - 80\,000 = 6q$$

$$20\,500 = 6q$$

$$q = \frac{20\,500}{6} = 3416.66$$

Respuesta: Por lo que el nivel de producción será de 3 416 unidades para tener costos totales por \$100 500.

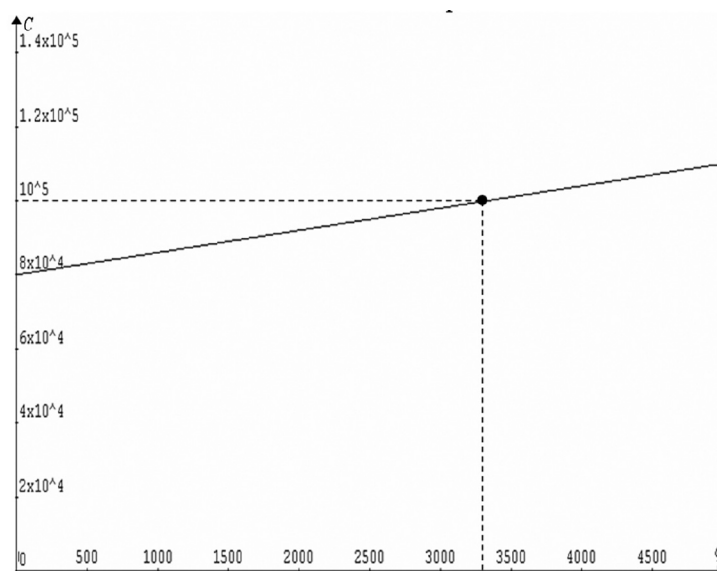


Figura 13. Costo de 3 416 unidades.

● **Ejemplo 12**

Un comerciante ha determinado que su función de costo total mensual está dado por la ecuación $C_T = 35q + 5\,600$

- Determina cuál debe ser el nivel de producción para tener costos mensuales por \$9 100
- ¿Cuál será el costo total mensual si el nivel de producción es de 800 unidades mensuales?

- Para determinar el nivel de producción para tener costos mensuales por \$9 100 se deben sustituir los datos en la ecuación del costo total:

Costo total:

$$C_T = 9\,100$$

Por lo tanto:

$$C_T = 35q + 5\,600$$

$$9\,100 = 35q + 5\,600$$

$$35q = 9\,100 - 5\,600$$

$$35q = 3\,500$$

$$q = \frac{3\,500}{35} = 100$$

Respuesta: De donde el nivel de producción debe ser de 100 unidades mensuales para tener costos totales por \$9 100.

- b) Para determinar el costo total mensual se sustituye en la ecuación el número de unidades mensuales

$$q = 800$$

$$C_T = 35q + 5\,600$$

$$C_T = 35(800) + 5\,600$$

$$C_T = 28\,000 + 5\,600$$

$$C_T = 33\,600$$

Respuesta: Por lo tanto, el costo total mensual de producir 800 unidades es de \$33 600.

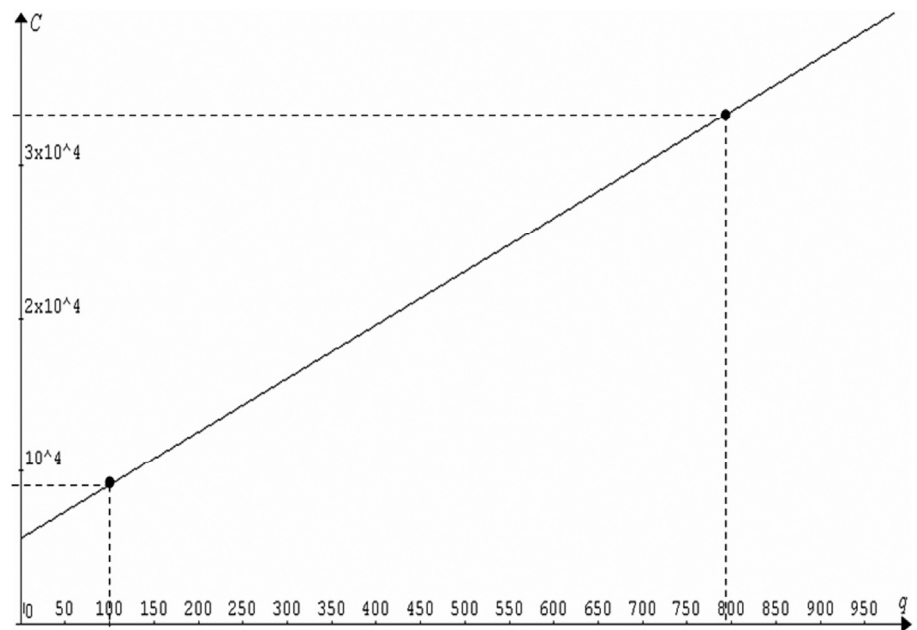


Figura 14. Gráfica de la función de costo total.

● Ejemplo 13

Un empresario ha determinado que sus costos mensuales están dados por la ecuación $C_T = 56q + 2\,540$, donde q representa el nivel de producción.

Si el nivel de producción mínimo es de 50 unidades mensuales, ¿hasta donde podrá elevar el nivel de producción si sus costos mensuales no deben ser mayores a \$10 000?

Para resolver este problema notemos que el costo total es la ecuación de una recta y se quiere encontrar el valor de q (nivel de producción) de modo que el valor de C_T correspondiente no sea mayor a \$10 000.

Primero se identifica el nivel de producción q que corresponde a un costo total de \$10 000.

$$C_r = 56q + 2\,540$$

$$10\,000 = 56q + 2\,540$$

$$10\,000 - 2\,540 = 56q$$

$$7\,460 = 56q$$

$$q = \frac{7\,460}{56} = 133.21$$

Para un nivel de producción de 133.21 unidades, se tendría un costo total de \$10 000.

Respuesta: Esto quiere decir que para lograr un costo menor a \$10 000, el nivel de producción tendría que estar por debajo de 133.21, por lo cual el empresario puede incrementar el nivel de producción hasta 133 unidades mensuales sin sobrepasar sus costos.

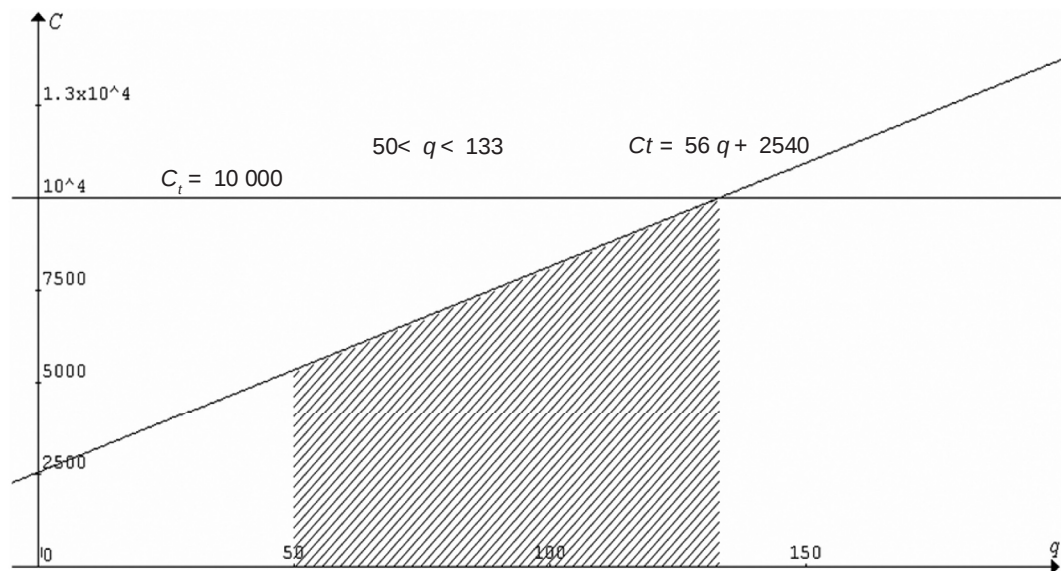


Figura 15. Gráfica del costo.

● Ejemplo 14

Una compañía fabrica dos marcas de cierto producto. Cada producto de la marca A requiere para su fabricación de 3 horas-máquina, mientras que de la marca B se requieren 5 horas-máquina. Tiene disponibles 350 horas-máquina cada semana para su producción.

- a) Si se fabrican y unidades de la marca B y x unidades de la marca A y se emplean todas las horas-máquina disponibles. Determina la relación entre x e y .

- b) Si esta relación representa una recta, ¿cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?
- c) Si se fabrican 18 productos de la marca *B*, ¿cuántos productos de la marca *A* se pueden fabricar usando únicamente 300 horas-máquina?

- a) Por cada producto de la marca *A* se requieren 3 horas-máquina, por lo tanto por x unidades de la marca *A* se requieren $3x$ horas-máquina.

Por cada producto de la marca *B* se requieren 5 horas-máquina, por lo tanto por y unidades de la marca *B* se requieren $5y$ horas-máquina.

Respuesta: Como se tienen 350 horas-máquina, la relación será

$$3x + 5y = 350$$

- b) Esta relación representa una recta; para identificar la pendiente, se despeja una de las variables (en este caso y)

$$3x + 5y = 350$$

$$5y = -3x + 350$$

$$y = \frac{-3}{5}x + \frac{350}{5}$$

$$y = \frac{-3}{5}x + 70$$

Respuesta: La pendiente de la recta es $-\frac{3}{5}$ eso quiere decir que existe una relación de tipo negativa; si el número de productos de la marca *A* aumenta, el número de productos de la marca *B* tendrá que disminuir a razón de $3/5$, o dicho de otra manera:

Por cada 5 productos de la marca *A* que se produce, el número de productos de la marca *B* disminuye en 3.

- c) Si se fabrican 18 productos de la marca *B*, eso quiere decir que:

$$y = 18$$

Como sólo se usan 300 horas-máquina.

Se sustituye este valor en la ecuación y se resuelve para encontrar el valor de x .

$$3x + 5y = 300$$

$$3x + 5(18) = 300$$

$$3x + 90 = 300$$

$$3x = 300 - 90$$

$$3x = 210$$

$$x = \frac{210}{3} = 70$$

Respuesta: Esto quiere decir que se fabricarán 70 productos de la marca A y 18 productos de la marca B utilizando 300 horas-máquina.

Actividad 6

Resuelve los siguientes problemas

- a) Una compañía tiene como función de costo lineal $C_T = 25q + 1\,500$; ¿qué nivel de producción representa costos totales por \$35 000?
- b) Un empresario ha determinado que sus costos mensuales están dados por la ecuación $C_T = 35q + 4\,600$, donde q representa el nivel de producción. Si el nivel de producción mínimo es de 50 unidades mensuales, ¿hasta donde podrá aumentar el nivel de producción para que sus costos mensuales no sobrepasen los \$10 000?
- c) Una compañía fabrica dos tipos de cemento. Cada kilogramo de cemento de la marca A requiere para su fabricación de 3 horas-máquina, mientras que para la marca B se requieren 2 horas-máquina. La fábrica tiene disponibles 250 horas-máquina cada semana para su producción.
 - i) Si se fabrican y unidades de la marca B y x unidades de la marca A y se emplean todas las horas-máquina disponibles. Determina la relación entre x y y .
 - ii) Si esta relación representa una recta, ¿cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?
 - iii) Si se fabrican 10 kg de la marca B, ¿cuántos kilogramos de la marca A se pueden fabricar usando únicamente 170 horas-máquina?

4.2.2. Depreciación lineal

Uno de los activos de una compañía es el valor de los equipos o maquinaria que compra; con el paso del tiempo, el valor de estos equipos decrece debido al uso, el tiempo, la tecnología, etcétera. Esta reducción gradual del valor de los activos se conoce como depreciación.

Antes de iniciar el estudio de la depreciación definiremos algunos conceptos:

- Se le llama **vida útil (n)** al periodo (medido en años) que dura el activo físico.
- Se le llama **tasa de depreciación o cargo por depreciación (R)** a la cantidad constante que se reduce.
- Se le llama **valor de desecho o de rescate (S)**, al valor que tiene el activo al final de su vida útil.
- Se le llama **valor en libros (V_k)** a la diferencia entre el valor original (C) y la depreciación acumulada en un tiempo determinado k . Este valor no necesariamente corresponde a su valor en el mercado, puede llegar a ser superior si la inflación es alta.
- Se le llama **base de depreciación (B)** a la diferencia entre el costo original y su valor de desecho.

Depreciación lineal

Se llama **depreciación lineal** al caso donde el valor se reduce en una cantidad constante de modo que al término de su vida útil estimada, el valor del equipo sea el valor de desecho.

Para conocer el valor de un activo en cualquier momento en los libros incluyendo el valor de rescate al término de la vida útil, utilizamos la siguiente fórmula:

$$V_k = C - kR$$

Para calcular la tasa de depreciación anual R utilizamos la fórmula:

$$R = \frac{B}{n} = \frac{C - S}{n}$$

● Ejemplo 15

Una compañía compró un trascabo que costó \$180 000. ¿Cuál será la tasa de depreciación anual si se estima que tendrá 10 años de vida útil y un valor de rescate de \$12 000?

Para encontrar la tasa de depreciación se utiliza la fórmula:

$$R = \frac{C - S}{n}$$

Del problema se tienen los datos:

$$C = 180\,000$$

$$S = 12\,000$$

$$n = 10$$

Por lo tanto:

$$R = \frac{C - S}{n} = \frac{18\,000 - 12\,000}{10} = 16\,800$$

Respuesta: Esto significa que la máquina disminuirá su valor en \$16 800 cada año durante los diez años de vida útil.

● Ejemplo 16

¿Cuál será el valor de rescate de un automóvil que cuesta \$275 800 si se deprecia \$28 700 anuales durante siete años?

El valor de rescate S se obtiene de la fórmula:

$$R = \frac{C - S}{n}$$

Para ello se obtienen los datos del problema:

$$C = 275\,800$$

$$n = 7$$

$$R = 28\,700$$

Se sustituyen los datos y se despeja S :

$$R = \frac{C - S}{n}$$

$$28\,700 = \frac{275\,800 - S}{7}$$

$$S = 275\,800 - 7(28\,700)$$

$$S = 74\,900$$

Respuesta: Esto quiere decir que el valor de rescate del automóvil será de \$74 900.

● Ejemplo 17

¿Cuál es el valor, en libras, de un edificio después de 25 años, si la construcción cuesta \$45 000 000 su valor de rescate es nulo y se supone una vida útil de 35 años?

Para obtener el valor en libras se utiliza la fórmula:

$$V_k = C - kR \text{ con } k = 25$$

Para ello primero se obtiene la tasa de depreciación anual R .

Datos del problema:

$$C = 45\,000\,000$$

$$n = 35$$

$$S = 0$$

Se sustituyen los datos

$$R = \frac{C - S}{n}$$

$$R = \frac{45\,000\,000 - 0}{35}$$

$$R = 1\,285\,714.29$$

Por lo tanto:

$$V_k = C - kR$$

$$V_{25} = 45\,000\,000 - 25(1\,285\,714.29)$$

$$V_{25} = 12\,857\,142.75$$

Respuesta: Es decir, el valor en libros del edificio a los 25 años es de \$1 285 714.75

● Ejemplo 18

Un empresario compra una mina de carbón en \$2 350 875. Se espera que la mina se agote en 15 años, al terminar se tendrá que pagar \$50 000 por desmontarla y se podrá vender la maquinaria en \$450 000.

- ¿Cuál es el valor de rescate de la mina?
- Determina la tasa de depreciación anual.

- Para determinar el valor de rescate de la mina, a los \$450 000 que se obtendrán de la venta de la maquinaria se descontarán los \$50 000 que se tendrá que pagar para que la desmonten:

$$S = 450\,000 - 50\,000 = 400\,000$$

Respuesta: El valor de rescate de la mina es de \$400 000.

- Para determinar la tasa de depreciación anual se utiliza la fórmula:

$$R = \frac{C - S}{n}$$

Datos del problema:

$$C = 2\,350\,875$$

$$S = 400\,000$$

$$n = 15$$

Se sustituyen los datos

$$R = \frac{C - S}{n}$$

$$R = \frac{42\,350\,875 - 400\,000}{15}$$

$$R = 130\,058.33$$

Respuesta: La mina se deprecia \$130 058.33 cada año.

Actividad 7

Resuelve los siguientes problemas

- a) Una compañía compró una computadora que costó \$27 000; ¿Cuál será la tasa de depreciación anual si se estima que tendrá 5 años de vida útil y un valor de rescate de \$4 000?
- b) ¿Cuál será el valor de rescate de un automóvil que cuesta \$350 000 si se deprecia \$43 500 anuales durante seis años?
- c) ¿Cuál es el valor en libras de un edificio después de 15 años, si la construcción cuesta \$23 000 000, su valor de rescate es nulo y se supone que tiene una vida útil de 42 años?
- d) Un empresario compra una mina de plata en \$1 236 000. Se espera que la mina se agote en 10 años, al terminar se tendrá que pagar \$40 000, por desmontarla y se podrá vender la maquinaria en \$380 000.
 - i) ¿Cuál es el valor de rescate de la mina?
 - ii) Determina la tasa de depreciación anual.

4.3. Sistemas de ecuaciones

El gerente de un almacén de aparatos domésticos desea incluir en su línea un nuevo modelo de refrigerador y uno de lavadora. El refrigerador cuesta \$2 000 y la lavadora \$1 500. Si reacomoda su mercancía tendrá 16 m^2 de espacio para acomodar los nuevos modelos. ¿Cuántos refrigeradores y cuántas lavadoras podrá comprar si solo tiene disponible \$9000 y cada refrigerador ocupa 3 m^2 y cada lavadora 3.5 m^2 ?

Este tipo de situaciones se presentan frecuentemente en los negocios, y están relacionados con un modelo matemático llamado sistemas de ecuaciones, el cuál tiene además, muchas otras aplicaciones.

Un sistema de ecuaciones es un grupo de ecuaciones que tienen la misma solución.

Los sistemas de ecuaciones más utilizados son los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$$

O los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ -4x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + 5z = -2 \end{cases}$$

Aunque pudiera darse el caso de tener un sistema con una ecuación cuadrática y otra lineal, o dos cuadráticas, etcétera.

4.3.1 Los sistemas de ecuaciones lineales y su relación con la posición de dos rectas en el plano

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, gráficamente representa dos rectas en el plano cartesiano, por lo que la existencia o no de solución del sistema está íntimamente relacionado con los puntos de intersección de estas dos rectas.

De acuerdo con la forma en la cual están colocadas las rectas en el plano cartesiano, los sistemas se clasifican en:

Independientes

Si las rectas se intersectan en un solo punto, el sistema tiene solución única.

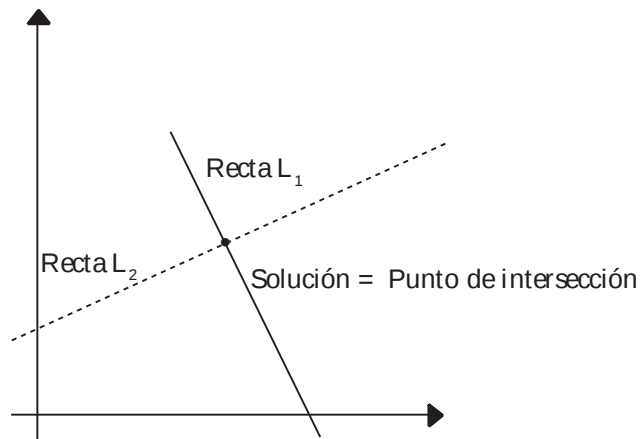


Figura 16. Sistema independiente.

Dependientes

Si las rectas son la misma, el sistema tiene infinitas soluciones.

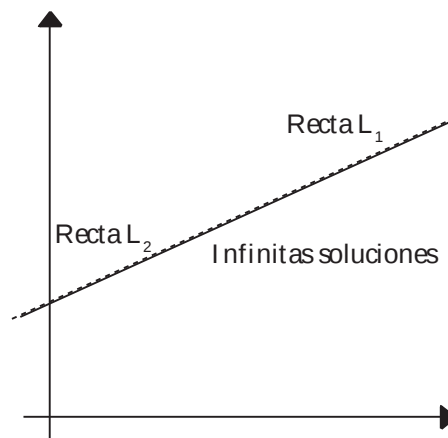


Figura 17. Sistema dependiente.

Inconsistentes

Si las rectas son paralelas, el sistema no tiene solución.

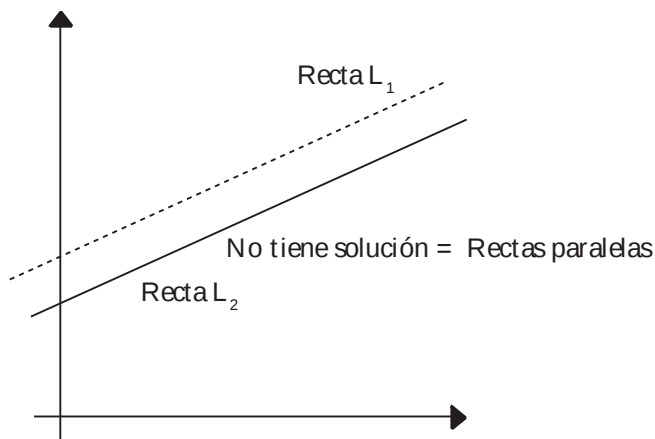


Figura 18. Sistema inconsistente.

En este texto sólo se tratará el caso de sistemas de ecuaciones lineales independientes con una solución única, de la forma (x, y) .

4.3.2. Solución de un sistema de ecuaciones

Existen varios métodos para encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, cada uno de ellos tiene sus ventajas y desventajas.

Los métodos gráficos requieren representar gráficamente las rectas que forman el sistema de ecuaciones y localizar el punto de intersección, cuyas coordenadas, en muchos casos, no son fáciles de localizar a menos que sean números enteros, de lo contrario sólo se tendrá una aproximación a la solución.

Los métodos algebraicos, en cambio proporcionan una solución exacta y no requieren de la gráfica del sistema. Todos ellos tienen como objetivo eliminar una de las variables para obtener una ecuación lineal con una variable la cual se despeja para encontrar su valor. Posteriormente se sustituye este valor en alguna de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra variable, formando así la solución del sistema.

4.3.2.1. Método de sustitución

Este método, como su nombre lo indica, utiliza la sustitución de una de las variables; se usa cuando alguna de éstas tiene coeficiente 1 y se puede despejar fácilmente. Para aplicarlo se siguen los siguientes pasos:

Resolver el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Se despeja una de las variables de alguna de las ecuaciones.	$x + 2y = 0$ $x = -2y$
Se sustituye el valor de esta variable en la otra ecuación y se realizan las operaciones indicadas hasta tener una ecuación con una sola variable.	$3x - 2y = 5$ $3(-2y) - 2y = 5$ $-6y - 2y = 5$ $-8y = 5$
Se resuelve esta ecuación.	$-8y = 5$ $y = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$
Este valor se sustituye en el despeje de la otra variable.	$x = -2y$ $x = -2\left(-\frac{5}{8}\right)$ $x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$
La solución del sistema es (x, y).	Respuesta: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{8}\right)$

4.3.2.2. Método de igualación

Este método se utiliza en cualquier sistema de ecuaciones lineales. Su objetivo es despejar alguna de las variables de las dos ecuaciones e igualarlas.

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

Se despeja una de las variables de las dos ecuaciones.	$x + 2y = 0$ $x = -2y$	$3x - 2y = 5$ $3x = 2y + 5$ $x = \frac{2y+5}{3}$
Se igualan los despejes, se quitan denominadores y se realizan las operaciones indicadas hasta tener una ecuación con una sola variable.	$\begin{aligned} -2y &= \frac{2y+5}{3} \\ 3(-2y) &= 2y+5 \\ -6y &= 2y+5 \\ -6y-2y &= 5 \\ -8y &= 5 \end{aligned}$	
Se resuelve esta ecuación.	$\begin{aligned} -8y &= 5 \\ y &= \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8} \end{aligned}$	
Este valor se sustituye en el cualquiera de los dos despejes.	$x = -2y$ $x = -2\left(-\frac{5}{8}\right)$ $x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$	$x = \frac{2y+5}{3}$ $x = \frac{2\left(-\frac{5}{8}\right)+5}{3}$ $x = \frac{-\frac{10}{8}+5}{3}$ $x = \frac{\frac{30}{8}}{3}$ $x = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$
La solución del sistema es (x, y).	Solución: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{8}\right)$	

4.3.2.3. Método de reducción o suma y resta

En el método de reducción o suma y resta se trata de tener alguna de las variables con coeficientes iguales pero signos contrarios en las ecuaciones, para que al sumarlas esta variable se anule.

Resolver el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Se elige una de las variables, en este caso la x y se multiplican las ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de esta variable sean iguales pero de signos contrarios.	Se multiplica la segunda ecuación por (-3) y la primera se deja igual. $\begin{array}{rcl} 3x - 2y = 5 & & 3x - 2y = 5 \\ -3(x + 2y = 0) & \Rightarrow & -3x - 6y = 0 \end{array}$
Se suman las dos ecuaciones para eliminar una de las variables quedando una ecuación con una sola variable.	$\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ -3x - 6y = 0 \\ \hline -8y = 5 \end{array}$
Se resuelve esta ecuación.	$\begin{array}{l} -8y = 5 \\ y = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8} \end{array}$
Este valor se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones.	$\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x = -2y \\ x = -2\left(-\frac{5}{8}\right) \\ x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{array}$ $\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 3x - 2\left(-\frac{5}{8}\right) = 5 \\ 3x + \frac{10}{8} = 5 \\ 3x = 5 - \frac{10}{8} \\ 3x = \frac{30}{8} \\ \frac{30}{8} \\ x = \frac{30}{24} = \frac{5}{4} \end{array}$
La solución del sistema es (x, y).	Solución: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{8}\right)$

Actividad 8

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} -x - 3y = -4 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x - 6y = -11 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} -x - 3y = -5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 9x + 3y = -12 \\ 3x + 5y = -8 \end{cases}$$

4.4. Solución de problemas de la empresa a partir de un sistema de ecuaciones

Retomando el problema que sirvió de introducción a la unidad, se inicia el estudio de problemas empresariales que se resuelven mediante la solución de un sistema de ecuaciones.

- **Ejemplo 19**

El gerente de un almacén de aparatos domésticos desea incluir en su línea un nuevo modelo de refrigerador y uno de lavadora. El refrigerador cuesta \$2 000 y la lavadora \$1 500. Si reacomoda la mercancía tendrá 16 m^2 de espacio para acomodar la nueva mercancía. ¿Cuántos refrigeradores y cuántas lavadoras podrá comprar si sólo tiene disponible \$9 000 y cada refrigerador ocupa 3 m^2 y cada lavadora 3.5 m^2 ?

El primer paso para resolver este tipo de problemas es plantear el sistema de ecuaciones correspondiente:

Si denotamos por x al número de refrigeradores y por y el número de lavadoras, se tienen dos ecuaciones; una de ellas representará el costo y la otra el espacio físico.

Como el refrigerador cuesta \$2 000 y la lavadora \$1 500, el costo total que debe ser de \$9 000 estará dado por:

$$2\,000x + 1\,500y = 9\,000$$

Cada refrigerador ocupa 3 m^2 y cada lavadora 3.5 m^2 ; como tiene disponible 16 m^2 , la relación queda:

$$3x + 3.5y = 16$$

Ya se tiene el sistema de ecuaciones que hay que resolver:

$$\begin{cases} 2\,000x + 1\,500y = 9\,000 \\ 3x + 3.5y = 16 \end{cases}$$

Lo resolveremos por el método de igualación.

$2\,000x + 1\,500y = 9\,000$ $x = \frac{9\,000 - 1\,500y}{2\,000}$	$3x + 3.5y = 16$ $x = \frac{16 - 3.5y}{3}$
$\frac{9\,000 - 1\,500y}{2\,000} = \frac{16 - 3.5y}{3}$ $3(9\,000 - 1\,500y) = 2\,000(16 - 3.5y)$ $2\,7000 - 4\,500y = 3\,2000 - 7\,000y$ $7\,000y - 4\,500y = 3\,2000 - 2\,7000$ $2\,500y = 5\,000$ $y = 2$	
$x = \frac{16 - 3.5y}{3}$ $x = \frac{16 - 3.5(2)}{3}$ $x = 3$	

Respuesta: El gerente deberá comprar 3 refrigeradores y 2 lavadoras.

● Ejemplo 20

Una persona invierte \$450 000 en dos tipos distintos de inversión. El tipo I da 10% de interés mensual y el tipo II da 12% de interés mensual. Si los intereses al cabo de un mes fueron de \$50 000, ¿cuánto dinero invirtió en cada uno?

Si denotamos con x la cantidad invertida en el tipo I de inversión y con y la cantidad invertida en el tipo II, la primera ecuación correspondiente al dinero invertido queda:

$$x + y = 450\,000$$

El interés que se obtiene al invertir x pesos en el tipo I está dado por $0.10x$, mientras que el interés obtenido por la cantidad y en el tipo II es $0.12y$. Como los intereses totales fueron de \$50 000 000, la segunda ecuación que corresponde al interés obtenido es

$$0.10x + 0.12y = 50\,000$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que hay que resolver es

$$\begin{cases} x + y = 450\,000 \\ 0.10x + 0.12y = 50\,000 \end{cases}$$

Como una de las ecuaciones tiene una variable con coeficiente 1 podemos utilizar el método de sustitución.

$x + y = 450\,000$ $x = 450\,000 - y$	$0.10x + 0.12y = 50\,000$ $0.10(450\,000 - y) + 0.12y = 50\,000$ $45\,000 - 0.10y + 0.12y = 50\,000$ $45\,000 + 0.02y = 50\,000$ $0.02y = 50\,000 - 45\,000$ $0.02y = 5\,000$ $y = 250\,000$
$x = 450\,000 - y$ $x = 450\,000 - 250\,000$ $x = 200\,000$	

Respuesta: Se invertirán \$200 000 en la inversión del tipo I y \$250 000 en la del tipo II para obtener intereses por \$50 000.

Actividad 9

Resuelve los siguientes problemas

- Una persona invierte \$380 000 en dos tipos distintos de inversión. El tipo I da 18% de interés mensual y el tipo II da 15% de interés mensual. Si los intereses al cabo de un mes fueron de \$63 000. ¿Cuánto dinero invirtió en cada uno?
- Un fabricante de muebles produce dos estilos de comedores. Por cada comedor del estilo A que vende gana \$250 y \$350 por cada comedor del estilo B. Si vende 20% más comedores del estilo A que del B, ¿cuántos comedores de cada estilo deberá vender si desea tener ganancias por \$ 65 000.

- c) Una empresa fabrica dos tipos de productos: A y B. Cada uno de estos productos tiene que ser procesado por las máquinas I y II. Supóngase que la máquina I está disponible 96 horas al mes y la máquina II 67 horas. Si el producto A requiere 3 horas en la máquina I y 2 horas en la máquina II y el producto B, 2 horas en la máquina I y 1.5 horas en la máquina II. ¿Cuántos productos de cada uno puede procesar la fábrica si utiliza todas sus horas máquina?

4.5. La oferta y la demanda: una aplicación de la línea recta al entorno de los negocios

Dentro del análisis económico, dos de las relaciones fundamentales son las leyes de la oferta y la demanda. La cantidad de artículos que será adquirida por los consumidores depende del precio de venta del artículo.

Se denomina **ley de la demanda** a la relación que especifica la cantidad de artículos que los consumidores están dispuestos a comprar, considerando varios niveles de precios. En esta relación si el precio del artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye ya que menos personas podrán adquirirlo, mientras que si el precio del artículo disminuye, la demanda aumentará, esto quiere decir que la relación es inversa.

La ley de la demanda tiene como ecuación: $p = mx + b$ donde p representa el precio de venta por unidad, x representa la cantidad de artículos que se compran y m y b son constantes; como la relación es inversa, m debe ser negativa. De modo que la recta que representa la demanda siempre estará inclinada hacia la izquierda y como el precio y la cantidad son siempre positivas, la recta debe dibujarse en el primer cuadrante.

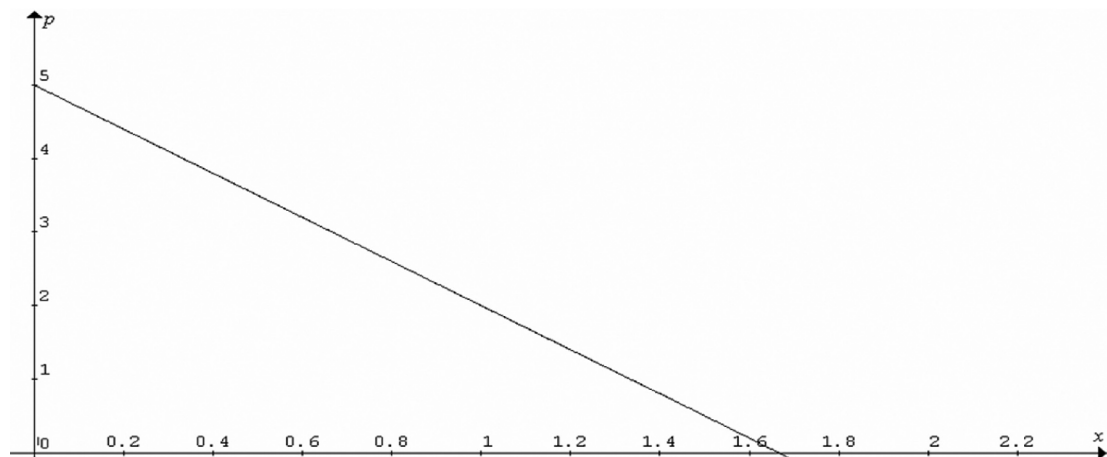


Figura 19. Gráfica de una función de demanda.

Se denomina **ley de la oferta** a la relación que especifica la cantidad de artículos que los proveedores están dispuestos a ofrecer dependiendo del precio del artículo. Los proveedores pondrán en el mercado una gran cantidad de artículos si el precio de cada uno es alto, sin embargo si el precio es bajo, esta cantidad será más pequeña. En otras palabras, al subir el precio la oferta aumenta, y al disminuir el precio, la oferta bajará; esto indica una relación directa.

La ley de la oferta tiene como ecuación: $p = mx + b$ donde p representa el precio de venta por unidad, x representa la cantidad de artículos que se compran y m y b son constantes; como la relación es directa, m debe ser positiva. De modo que la recta que representa la oferta siempre estará inclinada hacia la derecha y del mismo modo que la demanda, sólo debe dibujarse en el primer cuadrante.

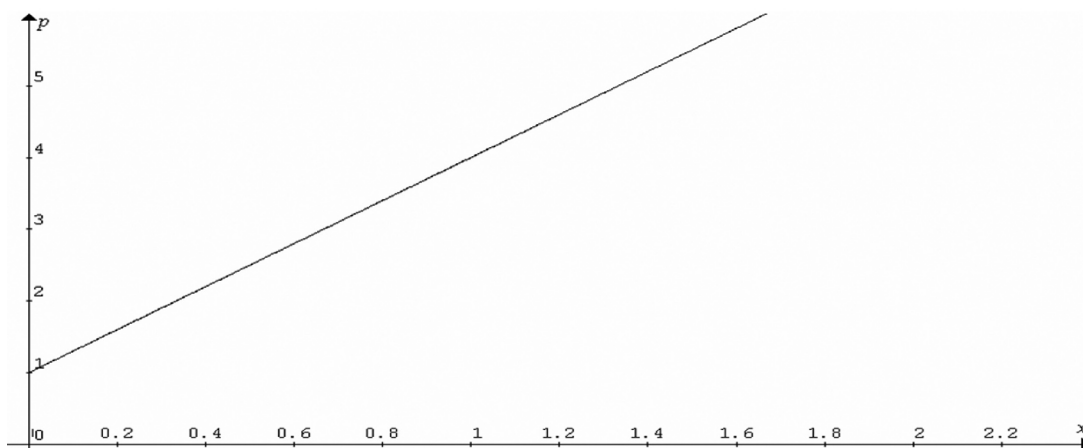


Figura 20. Gráfica de una función de oferta.

4.5.1 Determinación de la oferta

Para determinar la oferta es necesario recordar que se trata de una función lineal, es decir tiene como ecuación $p = mx + b$ donde la pendiente es positiva.

● Ejemplo 21

Un fabricante por experiencia sabe que puede producir 35 artículos a un costo de \$200, pero si su costo baja a \$180, producirá 28 artículos. Determina la función de oferta.

Si denotamos por x la cantidad de artículos que se pueden producir y por p el costo de los artículos, se tienen dos puntos de la forma (x, p) : $(35, 200)$ y $(28, 180)$.

Con ellos obtenemos la pendiente de la recta que representa la oferta sustituyendo

en la fórmula:
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{200 - 180}{35 - 28} = \frac{20}{7}$$

■ **Nota:** p sustituye a y en la ecuación de la recta.

Para obtener la ecuación elegimos uno de los puntos y lo sustituimos en la fórmula de punto-pendiente.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$p - 200 = \frac{20}{7}(x - 35)$$

$$p - 200 = \frac{20}{7}x - 100$$

$$p = \frac{20}{7}x - 100 + 200$$

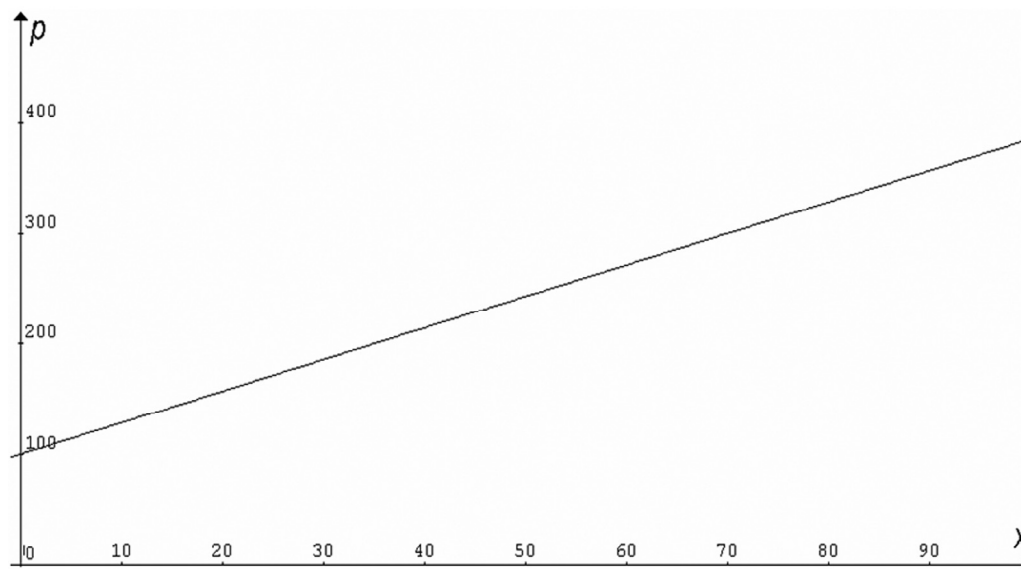


Figura 21. Gráfica de la oferta $p = (20/7)x + 100$

Respuesta: La ecuación de oferta es $p = \frac{20}{7}x + 100$

● Ejemplo 22

Una distribuidora automotriz pone a la venta un nuevo modelo de llanta. Ha determinado que puede ofrecer 300 llantas a \$290 cada una; sin embargo ofrecerá 100 llantas a \$200 por introducción.

- Determina la función de oferta y la gráfica.
- ¿Cuántas llantas podrá ofrecer, si el precio por introducción aumenta a \$250?

- a) Determina la función de oferta y la gráfica.

Para determinar la función de oferta se tienen dos puntos (300, 290) y (100, 200), con ellos se obtiene la pendiente de la recta que representa la oferta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{290 - 200}{300 - 100} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}$$

Para obtener la ecuación elegimos uno de los puntos y lo sustituimos en la fórmula de punto-pendiente.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$p - 200 = \frac{9}{20}(x - 100)$$

$$p - 200 = \frac{9}{20}x - 45$$

$$p = \frac{9}{20}x - 45 + 200$$

$$p = \frac{9}{20}x + 155$$

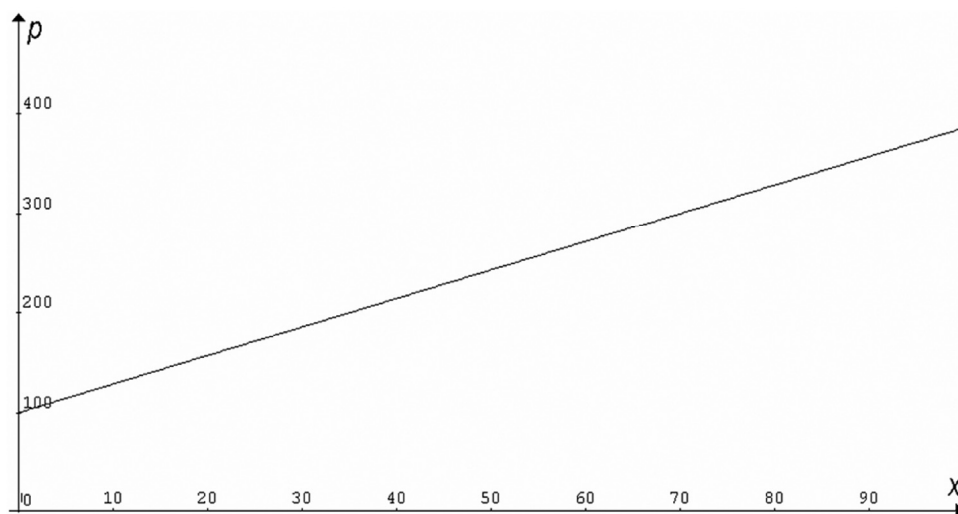


Figura 22. Gráfica de la oferta $p = \frac{9}{20}x + 155$

Respuesta: La ecuación de la oferta es $p = \frac{9}{20}x + 155$

- b) ¿Cuántas llantas podrá ofrecer si el precio por introducción aumenta a \$250?

Para saber el número de llantas que se puede ofrecer si el precio es de \$250, sustituimos este valor en la ecuación y despejamos x .

$$p = \frac{9}{20}x + 155$$

$$250 = \frac{9}{20}x + 155$$

$$250 - 155 = \frac{9}{20}x$$

$$95 = \frac{9}{20}x$$

$$x = 211.11$$

Respuesta: Se podrán ofrecer 211 llantas si el precio es de \$250.

4.5.2. Determinación de la demanda

A continuación estudiaremos el procedimiento para determinar la función de la demanda.

● Ejemplo 23

Un comerciante vende cinco pares de zapatos diarios si el precio es de \$248, pero sólo venderá tres pares si aumenta el precio a \$340.

- Determina la función de la demanda y la gráfica.
- ¿Cuál deberá ser el precio del par de zapatos si quiere vender seis pares de zapatos diarios?

- Determina la función de la demanda y la gráfica

Si consideramos a x como el número de zapatos y a p como el precio de venta, se tienen dos puntos de la forma (x, p) : $(5, 248)$ y $(3, 340)$.

Con ellos obtenemos la pendiente de la recta que representa la demanda sustituyendo en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{340 - 248}{3 - 5} = \frac{92}{-2} = -46$$

■ **Nota:** p sustituye a y en la ecuación de la recta.

Para obtener la ecuación elegimos uno de los puntos y lo sustituimos en la fórmula de punto-pendiente.

$$\begin{aligned}
 y - y_1 &= m(x - x_1) \\
 p - 248 &= -46(x - 5) \\
 p - 248 &= -46x + 230 \\
 p &= -46x + 230 + 248 \\
 p &= -46x + 478
 \end{aligned}$$

La ecuación de la demanda es $p = -46x + 478$

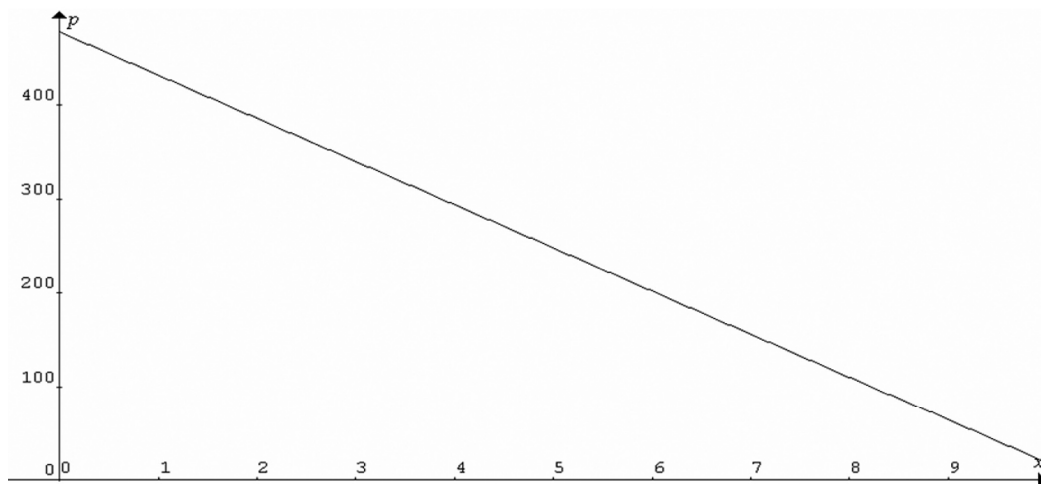


Figura 23. Gráfica de la demanda $p = -46x + 478$

- b) ¿Cuál deberá ser el precio del par de zapatos si quiere vender seis pares de zapatos diarios?

La ecuación de la demanda para los pares de zapatos es

$$p = -46x + 478$$

Para saber a qué precio hay que vender seis pares de zapatos sustituimos $x = 6$ en la ecuación.

$$p = -46x + 478$$

$$p = -46(6) + 478$$

$$p = 202$$

Respuesta: Eso quiere decir que para poder vender seis pares de zapatos diariamente, su precio deberá ser de \$202.

● Ejemplo 24

Una tienda departamental vende 105 prendas diarias a un precio normal de \$80; el gerente de la tienda espera vender 180 prendas diarias durante una liquidación en la cual el precio de las mismas será de \$68.

- a) Determina la función de demanda de las prendas y la gráfica.
- b) Si un vendedor propone al gerente bajar el precio de las prendas a \$50 durante los dos últimos días de la liquidación, ¿cuántas prendas se espera vender durante cada uno de esos dos últimos días?

- a) Determina la función de demanda de las prendas y la gráfica.

Para determinar la función de demanda simbolizamos con x al número de prendas que se venden diariamente y con p al precio de venta.

Tenemos dos puntos (105, 80) y (180, 68).

Con ellos se obtiene la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{80 - 68}{105 - 180} = \frac{12}{-75} = -\frac{4}{25}$$

Elegimos y sustituimos uno de los puntos y la pendiente en la fórmula punto-pendiente.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$p - 68 = -\frac{4}{25}(x - 180)$$

$$p - 68 = -\frac{4}{25}x + \frac{144}{5}$$

$$p = -\frac{4}{25}x + \frac{144}{5} + 68$$

$$p = -\frac{4}{25}x + \frac{484}{5}$$

Respuesta: La ecuación que representa la demanda es $p = -\frac{4}{25}x + \frac{484}{5}$

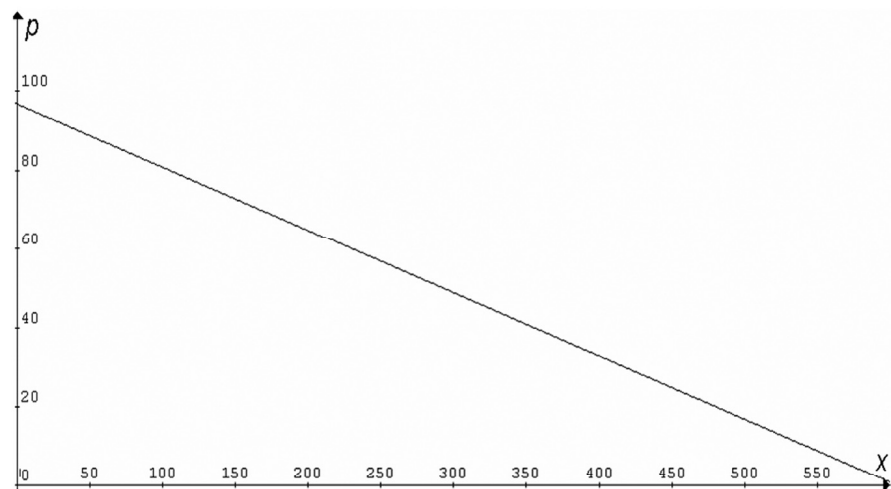


Figura 24. Gráfica de la demanda $p = -\frac{4}{25}x + \frac{484}{5}$

- b) Si un vendedor propone al gerente bajar el precio a \$50 durante los dos últimos días de la liquidación, ¿cuántas prendas se espera vender durante cada uno de esos dos últimos días?

Para encontrar el número de prendas que se venderán si el precio es de \$50 es suficiente sustituir el precio en la ecuación de demanda y despejar x .

$$p = -\frac{4}{25}x + \frac{484}{5}$$

$$50 = -\frac{4}{25}x + \frac{484}{5}$$

$$50 = -\frac{-4x + 2420}{25}$$

$$50(25) = -4x + 2420$$

$$4x = 2420 - 1250$$

$$4x = 1170$$

$$x = \frac{1170}{4} = 292.5$$

Respuesta: Si el precio es de \$50 se venderán aproximadamente 292 prendas.

Actividad 10

Resuelve los siguientes problemas de oferta y demanda:

- a) Un fabricante de artículos de limpieza ha determinado que sus ventas son de 10 000 escobas si el precio es de \$12, y de 12 000 si el precio disminuye a \$11. Determina la función de la demanda.
- b) Una tienda de abarrotes vende 20 botellas del refresco A a un precio normal de \$7.00; durante una promoción el precio bajó a \$5.50 y vendió 28 botellas.
 - i) Determina la función de demanda y la gráfica.
 - ii) Si el dueño se propone bajar el precio de los refrescos durante el fin de semana a \$5, ¿cuántos refrescos espera vender durante esos dos días?
- c) Un fabricante de zapatos, puede ofrecer 150 pares mensuales si el precio de venta es de \$256, pero ofrecerá 100 pares mensuales si el precio disminuye a \$230.
 - i) Determina la función de la oferta y gráficala.
 - ii) ¿A qué precio podría ofrecer 200 pares mensuales el fabricante de zapatos?

- d) Una fábrica ofrece 3 500 sacos mensuales, de cemento, a un precio de \$50 cada uno pero si el precio disminuye a \$46 ofrecerá sólo 3 200 sacos.
- Determina la función de la oferta y gráficala.
 - ¿Cuántos sacos podrá ofrecer, si debido a la inflación el precio aumenta a \$58 por saco?
- e) Si el precio de un artículo es de \$3, la oferta y la demanda serán de 350 y 200 artículos respectivamente, pero si el precio aumenta a \$4.50, la oferta será de 400 artículos mientras que la demanda será de 185 artículos.
- Determina la función de la oferta
 - Determina la función de la demanda
 - En caso de que el precio siga aumentando a \$5.25, ¿cuál será la oferta y la demanda respectivamente?

4.6. Determinación del punto de equilibrio a través de la visión algebraica

Los bienes y servicios que se ofrecen en el mercado tienden a un punto en el cual el precio al que se ofrecen se ajusta a la cantidad de bienes y servicios que el consumidor puede adquirir. Este ajuste depende tanto de la oferta como de la demanda, en él influyen tanto la cantidad de producción de la empresa como el dinero que los consumidores están dispuestos a pagar por los productos.

Cuando la producción aumenta, el precio tiende a bajar y en consecuencia la demanda de esos productos aumenta, sin embargo una empresa no puede mantener una producción alta para vender barato, por consiguiente la producción se reduce elevando el precio del producto.

4.6.1. Punto de equilibrio a partir de la oferta y la demanda

Cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida, se dice que el mercado alcanza **el punto de equilibrio**.

Algebraicamente, el punto de equilibrio es la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables: la oferta y la demanda.

● **Ejemplo 25**

Un comerciante puede vender 200 unidades de cierto artículo si el precio es de \$30 por unidad y 250 unidades a \$27. Si la ecuación de oferta para este producto es $6p - x = 48$. Determina el precio y la cantidad de equilibrio.

Como se tiene sólo la ecuación de oferta, necesitamos determinar la ecuación de la demanda, para poder tener el sistema de ecuaciones.

a) Determina la ecuación de oferta.

Tomamos los dos puntos (200, 30) y (250, 27) definidos por las condiciones del problema:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{30 - 27}{200 - 250} = \frac{3}{-50}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$p - 30 = -\frac{3}{50}(x - 200)$$

$$p - 30 = -\frac{3}{50}x + 12$$

$$p = -\frac{3}{50}x + 12 + 30$$

$$p = -\frac{3}{50}x + 42$$

La ecuación de oferta es

$$p = -\frac{3}{50}x + 42$$

b) Ahora resolveremos el sistema de ecuaciones formado por la oferta y la demanda:

$$\begin{cases} p = -\frac{3}{50}x + 42 \\ 6p - x = 48 \end{cases}$$

Usaremos el método de sustitución, ya que se tiene a p despejada en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} & 6p - x = 48 \\ & 6\left(-\frac{3}{50}x + 42\right) - x = 48 \quad p = -\frac{3}{50}x + 42 \\ & \begin{cases} p = -\frac{3}{50}x + 42 \\ 6p - x = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & -\frac{9}{25}x + 252 - x = 48 \\ & -\frac{34}{25}x = -204 \\ & x = 150 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & p = -\frac{3}{50}(150) + 42 \\ & p = 33 \end{aligned} \end{aligned}$$

Respuesta: El punto de equilibrio es de 150 unidades a un precio de \$33.

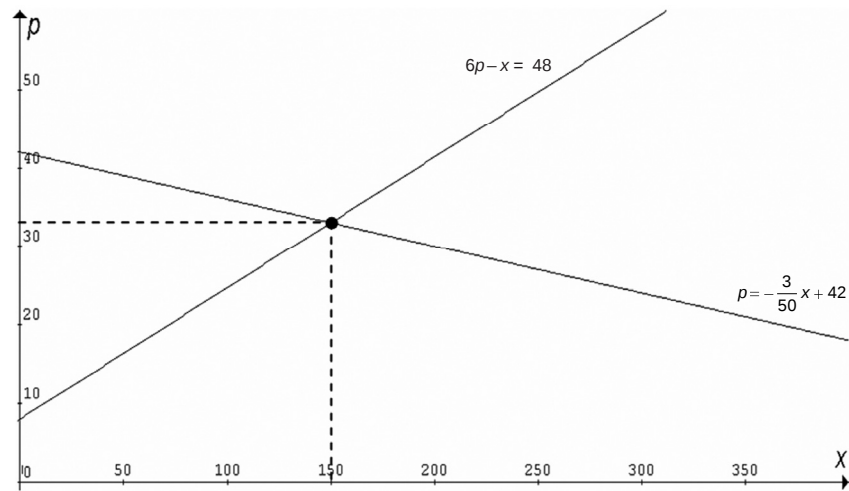


Figura 25. Punto de equilibrio.

● Ejemplo 26

Una fábrica de dulces lanza un nuevo producto. Un estudio de mercado mostró que a un precio de \$2.50, la oferta era de 250 unidades mientras que la demanda era de 350. Si el precio se aumenta a \$3, la oferta será de 300 unidades pero la demanda bajará a 330 unidades. El gerente de la fábrica desea conocer la cantidad y el precio de equilibrio.

- a) Determina la ecuación de oferta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2.5}{300 - 250} = \frac{0.5}{50} = 0.01$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$p - 3 = 0.01(x - 300)$$

$$p - 3 = 0.01x - 3$$

$$p = 0.01x - 3 + 3$$

$$p = 0.01x$$

La ecuación de la oferta es $p = 0.01x$

- b) Determina la ecuación de demanda.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$p - 3 = -0.025(x - 330)$$

$$p - 3 = -0.025x + 8.25$$

$$p = -0.025x + 8.25 + 3$$

$$p = -0.025x + 11.25$$

La ecuación de demanda es $p = -0.025x + 11.25$

c) Determina el punto de equilibrio.

Se determina el sistema de ecuaciones $\begin{cases} p = 0.01x \\ p = -0.025x + 11.25 \end{cases}$

Lo resolveremos por el método de igualación ya que en las dos ecuaciones la variable p está despejada.

$$0.01x = -0.025x + 11.25$$

$$0.01x + 0.025x = 11.25$$

$$0.035x = 11.25$$

$$x = \frac{11.25}{0.035}$$

$$x = 321.43$$

Como no se pueden vender 321.43 unidades, se toman 321 unidades para calcular el precio de equilibrio:

$$p = 0.01x$$

$$p = 0.01(321)$$

$$p = 3.21$$

Respuesta: Por tanto, el punto de equilibrio es de 321 unidades a \$3.21.

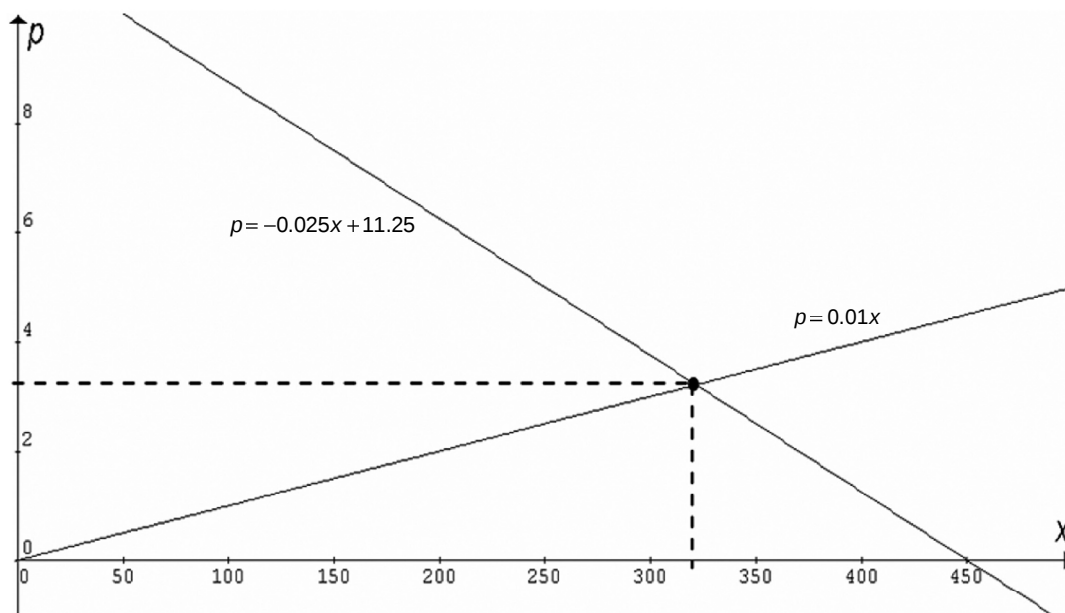


Figura 26. Gráfica del punto de equilibrio.

Actividad 11

Resuelve los siguientes problemas

- a) Un fabricante de rompecabezas de madera determina que vende 15 diarios si el precio es de \$20, pero si lo rebaja a \$15 vende 23 rompecabezas. En cada caso su proveedor le dará 30 y 25 productos respectivamente. Determina el punto de equilibrio para estos rompecabezas.
- b) Cuando un producto se vende a \$50, el fabricante suministra 42 unidades, mientras que los consumidores demandarán 200. En cambio, cuando el precio de venta disminuye a \$45, los consumidores demandan 210 productos y los productores ofrecen 82 productos. Determina el precio y la cantidad de equilibrio y grafícalo.
- c) Una tienda departamental ha determinado que si el precio del producto A es de \$15, la demanda del producto es de 25 artículos, mientras que la oferta es de 870; si el precio disminuye durante una barata a \$12, la demanda será de 40 artículos mientras que la oferta es de 690. Determina el precio y la cantidad de equilibrio para el producto A.
- d) Si las funciones de oferta y demanda tienen las siguientes expresiones
 Oferta:
 $q + 20p = 340$
 Demanda:
 $q + 20 = 10p$
 Determina la cantidad y el precio de equilibrio, grafícalo.

4.6.2. Punto de equilibrio a partir del ingreso y el costo

En la producción de bienes y servicios, el punto de equilibrio de una empresa se determina cuando los costos de producción son iguales a los ingresos obtenidos. Cuando los ingresos son mayores a los costos, significa que se superó el punto de equilibrio y por consecuencia se registran utilidades o ganancias; en caso contrario cuando los ingresos son inferiores a los costos, se opera con pérdidas.

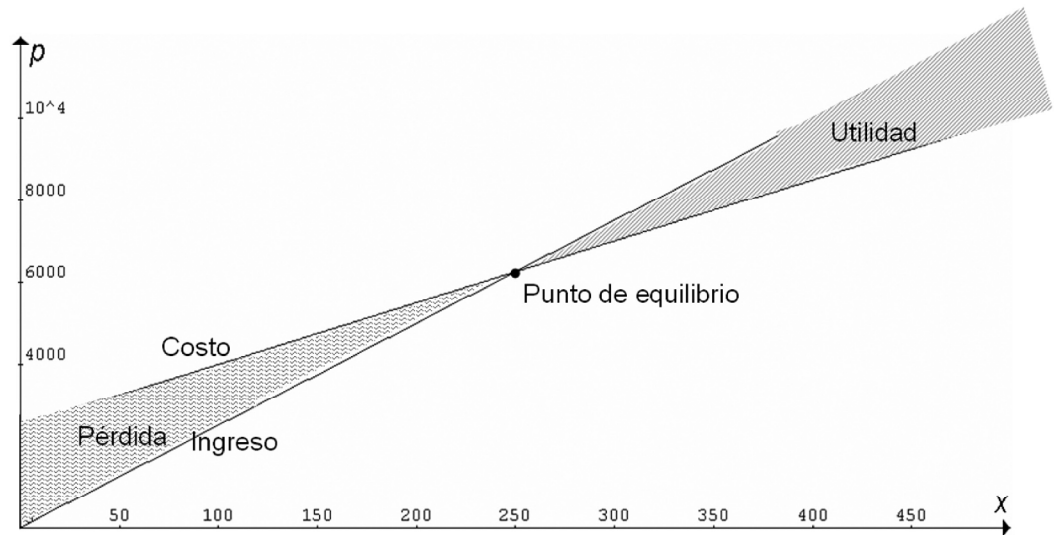


Figura 27. Punto de equilibrio del ingreso y el costo.

● Ejemplo 27

A un fabricante de aparatos eléctricos le cuesta \$2.50 producir un artículo que vende a \$8. Si sus costos fijos son de \$5 000. Encuentra la cantidad y el ingreso de equilibrio.

- a) Determina la función de ingreso.

Para determinar la función de ingreso, debemos recordar que el ingreso tiene como expresión $I = px$; de los datos del problema tenemos que $p = 8$, por lo tanto, $I = 8x$ es la función de ingreso.

- b) Determina la función de costo total.

Para determinar la función de costo total recordemos que ésta tiene como expresión:

$$C_T = Cx + C_f$$

De los datos del problema sabemos que:

$$C = 2.50; C_f = 5\,000$$

Por lo tanto:

$$C_T = 2.50x + 5\,000 \text{ es la función de costo total.}$$

- c) Determina el punto de equilibrio.

Como el punto de equilibrio se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, se igualan las dos funciones y se resuelve la ecuación:

$$I = C_T$$

$$8x = 2.50x + 5\,000$$

$$8x - 2.50x = 5\,000$$

$$5.5x = 5\,000$$

$$x = \frac{5\,000}{5.5}$$

$$x = 909.09$$

En este caso, como no se pueden producir 909.09 artículos, la cantidad se redondea. Por lo cual la cantidad de equilibrio es de 909 artículos.

Para encontrar el ingreso de equilibrio, sustituimos el valor de x encontrado en alguna de las dos ecuaciones: ingreso o costo.

$$I = 8x$$

$$I = 8(909)$$

$$I = 7\,272$$

El punto de equilibrio es (909, 7 272).

Respuesta: Por lo tanto, el ingreso de equilibrio es de \$7 272 por la producción de 909 artículos.

● Ejemplo 28

El gerente de una empresa ha determinado que su punto de equilibrio lo alcanza con un volumen de ventas por \$200 000. Si los costos fijos son de \$40 000 y cada unidad se vende a \$500. Determina el costo de producción de cada artículo.

De los datos del problema se tiene que:

$$C_f = 40\,000$$

$$p = 500$$

Si x representa la cantidad de artículo producidos, entonces la función de ingreso es

$$I = 500x.$$

Como el ingreso de equilibrio es de \$200 000, y sabemos que el punto de equilibrio se tiene cuando:

$$I = C_T$$

Entonces

$$I = C_T = 200\,000$$

Sustituyendo la expresión de la función de ingreso tenemos que:

$$500x = 200\,000$$

Resolvemos la ecuación:

$$500x = 200\,000$$

$$x = \frac{200\,000}{500}$$

$$x = 400$$

De aquí se tiene que la cantidad de equilibrio es de 400 unidades.

Para encontrar el costo de producción C de cada artículo sustituimos los datos del problema y los del punto de equilibrio en la función de costo total y despejamos C (costo por unidad).

$$C_T = Cx + C_f$$

$$C_T = 200\,000$$

$$x = 400$$

$$C_f = 40\,000$$

$$C_T = Cx + C_f$$

$$200\,000 = C(400) + 40\,000$$

Por tanto:

$$200\,000 - 40\,000 = C(400)$$

$$160\,000 = C(400)$$

$$C = \frac{160\,000}{400} = 400$$

Respuesta: Esto quiere decir, que el costo de producción de cada artículo es de \$400.

Actividad 12

Resuelve los siguientes problemas de punto de equilibrio.

- A una fábrica de bicicletas, le cuesta \$720 producir cada una. Si las vende en \$1 035 y sus costos fijos son de \$211 365, ¿cuál será el nivel de producción para estar en el punto de equilibrio?
- El punto de equilibrio de una empresa se tiene cuando vende productos por \$249 900. Si cada unidad se vende en \$350 y sus costos fijos son de \$56 800. ¿Cuánto le cuesta producir cada artículo?

- c) Una empresa ha determinado que su punto de equilibrio se encuentra cuando se producen y venden 13 500 unidades a \$45 cada una. Si le cuesta \$37 producir cada unidad. ¿De cuánto son sus costos fijos?
- d) El punto de equilibrio de una empresa se alcanza cuando se producen 600 unidades y se venden a \$17 500 cada una. Si se tienen costos fijos por \$5 500 000. ¿Cuánto le cuesta producir cada unidad?

4.6.3. La utilidad

En una empresa, la utilidad es un concepto muy importante, ya que representa las ganancias de la misma, por lo cual es necesario determinar el nivel de producción que se requiere para tener ciertas utilidades.

De la sección anterior sabemos que el punto de equilibrio de una empresa se alcanza cuando los ingresos son iguales a los costos totales, es decir cuando $I = C_T$.

De aquí se deduce que cuando los ingresos son mayores que los costos $I > C_T$, se tendrá utilidad y cuando son menores, $I < C_T$ se tendrán pérdidas.

Por lo tanto, podemos considerar que la utilidad se obtiene restando el total del ingreso menos el costo total.

$$U = I - C_T$$

Veamos cómo afecta este hecho al nivel de producción de una empresa.

● Ejemplo 29

Una empresa automotriz, lanza al mercado un nuevo modelo de auto compacto; un estudio de mercado ha determinado que el costo de producción del nuevo modelo está dado por $C_T = 123x + 2\,000$ donde x representa el nivel de producción y los costos están dados en miles de pesos. Si el precio de venta que se propone es de \$267 000, ¿qué nivel de producción le dejaría utilidades a la empresa por \$1 000 000?

- a) Determinar las funciones de ingreso y costo total.

Se nos proporciona la función de costo total:

$$C_T = 123x + 2\,000$$

Para encontrar la función de ingreso hay que recordar que $I = px$ donde p representa el precio de venta y x el nivel de producción; como el precio de venta es de \$267 000 se tiene que:

$$I = 267x$$

- b) Determinar la expresión para la utilidad.

La utilidad tiene como expresión:

$$U = I - C_f$$

Por tanto:

$$U = 267x - (123x + 2000)$$

$$U = 267x - 123x - 2000$$

$$U = 144x - 2000$$

- c) Determinar el nivel de producción para tener una utilidad de \$1 000 000.

Primero tenemos que convertir la cantidad a unidades de miles de pesos.

$$1\,000\,000 = 1\,000 \text{ miles de pesos}$$

Después sustituimos esta cantidad en la expresión de la utilidad y despejamos el valor de x que representa el nivel de producción.

$$U = 144x - 2\,000$$

$$1000 = 144x - 2\,000$$

$$144x = 1\,000 + 2\,000$$

$$144x = 3\,000$$

$$x = \frac{3\,000}{144}$$

$$x = 20.83$$

Esto quiere decir que para tener una utilidad de \$1 000 000 se tendrían que producir 20.83 autos del nuevo modelo; como esto no puede suceder, se producirán 21 autos. Si sustituimos este valor en la utilidad, tendremos la utilidad real obtenida de la producción y venta de los 21 autos del nuevo modelo.

$$U = 144x - 2000$$

$$U = 144(21) - 2000$$

$$U = 1024$$

Respuesta: Como la utilidad está dada en miles de pesos, multiplicamos este resultado por 1 000, la utilidad real por la producción y venta de 21 autos del nuevo modelo es de \$1 024 000.

● **Ejemplo 30**

Una empresa produce 50 artículos en \$21 750 y 75 artículos en \$23 625. Si el precio de venta es 15% superior al costo variable por artículo.

- Determina el punto de equilibrio.
- ¿Cuántos artículos se deberán producir y vender para tener utilidades equivalentes a \$50 000?
- El gerente de producción de la empresa indica que hay posibilidades de posicionar en el mercado 9 000 unidades, sin embargo, esto elevaría los costos fijos 20% y el costo por unidad 5%. ¿Es conveniente tomar esa decisión?

- Determina el punto de equilibrio.

Para determinar el punto de equilibrio se requieren las funciones de ingreso y costo total.

- Determinación de la función de costo total.

Sabemos que 50 artículos le cuestan \$21 750 y que 75 artículos \$23 625.

De aquí tenemos dos puntos (50, 21 750) y (75, 23 625)

Con ellos se obtiene la expresión del modelo de costo lineal:

$$m = \frac{23\,625 - 21\,750}{75 - 50} = 75$$

$$y - 21\,750 = 75(x - 50)$$

$$y = 75x + 18\,000$$

Por lo tanto, la ecuación que representa al costo total es:

$$C_T = 75x + 18\,000$$

- Determinación de la función de ingreso.

Del enunciado del problema sabemos que el precio de venta es 15% superior al costo variable. Como el costo variable es de \$75.

$$p = 75 + 0.15(75)$$

$$p = 86.25$$

El precio de venta es de \$86.25, con lo cual la función de ingreso queda:

$$I = 86.25x$$

iii) Determinar el punto de equilibrio.

$$I = C_T$$

$$86.25x = 75x + 18000$$

$$86.25x - 75x = 18000 \quad I = 86.25x$$

$$11.25x = 18000 \quad I = 86.25(1600)$$

$$x = \frac{18000}{11.25} \quad I = 138\,000$$

$$x = 1600$$

Respuesta: Por tanto, el punto de equilibrio se alcanza con una producción de 1 600 artículos con un Ingreso de equilibrio de \$138 000.

b) ¿Cuántos artículos se deberán producir y vender para tener utilidades equivalentes a \$50 000?

Para conocer el número de artículos necesitamos la función de utilidad:

$$U = I - C$$

$$U = 86.25x - (75x + 18\,000)$$

$$U = 86.25x - 75x - 18\,000$$

$$U = 11.25x - 18\,000$$

Como queremos que la utilidad sea de \$50 000 sustituimos este valor en la ecuación y despejamos x:

$$U = 11.25x - 18\,000$$

$$50\,000 = 11.25x - 18\,000$$

$$50\,000 + 18\,000 = 11.25x$$

$$68\,000 = 11.25x$$

$$x = \frac{68\,000}{11.25}$$

$$x = 6\,044.44$$

Esto quiere decir que se requiere producir 6 044.44 artículos para tener utilidades por \$50 000 como esto no puede suceder, se producen 6 044 artículos.

Con ellos se obtiene una utilidad real de:

$$U = 11.25x - 18\,000$$

$$U = 11.25(6\,044) - 18\,000$$

$$U = 49\,995$$

Respuesta: La utilidad real de producir 6 044 artículos es de \$49 995.

- c) El gerente de producción de la empresa indica que hay posibilidades de posicionar en el mercado 9 000 unidades, sin embargo esto elevaría los costos fijos 20% y el costo por unidad 5%. ¿Es conveniente tomar esa decisión?

Para responder esta pregunta es necesario volver a encontrar la función de costo, para determinar la utilidad de este aumento en la producción.

Como la producción de 9 000 unidades aumenta el costo fijo en 20% y el costo variable en 5%, entonces:

$$C_f = 18\,000 + 0.20(18\,000)$$

$$C_f = 21\,600$$

$$C = 75 + 0.05(75)$$

$$C = 78.75$$

Por tanto, la nueva ecuación del costo total es $C_t = 78.75x + 21\,600$, mientras que la función de ingreso no sufre cambios $I = 86.25x$

Obtenemos la función de utilidad:

$$U = I - C$$

$$U = 86.25x - (78.75x + 21\,600)$$

$$U = 86.25x - 78.75x - 21\,600$$

$$U = 7.5x - 21\,600$$

La utilidad de producir 9 000 artículos es:

$$U = 7.5x - 21\,600$$

$$U = 7.5(9\,000) - 21\,600$$

$$U = 45\,900$$

Esto quiere decir, que por 9 000 artículos se tendría una utilidad de \$45 900.

Con estos resultados, no es conveniente elevar la producción ya que:

Utilidad anterior	\$49 995	6 044 artículos
Utilidad nueva	\$45 900	9 000 artículos

Respuesta: En el caso anterior se obtuvieron \$49 995 con 6 044 artículos y en este caso se obtiene una utilidad menor es decir \$45 900 con 9 000 artículos. Por lo tanto, no es conveniente tomar esa decisión.

Actividad 13

Resuelve los siguientes problemas

- a) Una fábrica de pantalones ha determinado que el costo de producir 30 pantalones mensuales es de \$8 000, si cada pantalón le cuesta \$100 y lo vende 25% más caro. Determina cuántos pantalones deberá producir y vender para tener utilidades por \$45 000?
- b) Una empresa produce 25 artículos en \$2 500 y 45 artículos en \$4 200. Si el precio de venta es 20% superior al costo variable por artículo.
 - i) Determina el punto de equilibrio.
 - ii) ¿Cuántos artículos se deberán producir y vender para tener utilidades equivalentes a \$10 000?
- c) Un fabricante de tubos de acero, vende todo lo que produce. Si sus costos fijos son de \$5 000, sus costos de producción son de \$23 y vende sus productos a \$35 cada uno.
 - i) Determina el punto de equilibrio.
 - ii) ¿Cuál será la utilidad si se producen y venden 500 tubos?
 - iii) Determina la utilidad si se producen y venden 150 tubos.
 - iv) Determina el nivel de producción para obtener una utilidad de \$8 000.

Respuestas a las actividades

Actividad 1

- a) Pendiente $m = 2$; ordenada al origen $b = -5$; se inclina hacia la derecha.
- b) Pendiente $m = -\frac{1}{2}$; ordenada al origen $b = 0$; se inclina hacia la izquierda.
- c) Pendiente $m = -\frac{3}{2}$; ordenada al origen $b = \frac{9}{2}$; se inclina hacia la izquierda.
- d) Pendiente $m = \frac{3}{5}$; ordenada al origen $b = \frac{4}{5}$; se inclina hacia la derecha.
- e) Pendiente $m = 0$; ordenada al origen $b = -8$; es una recta horizontal.

Actividad 2

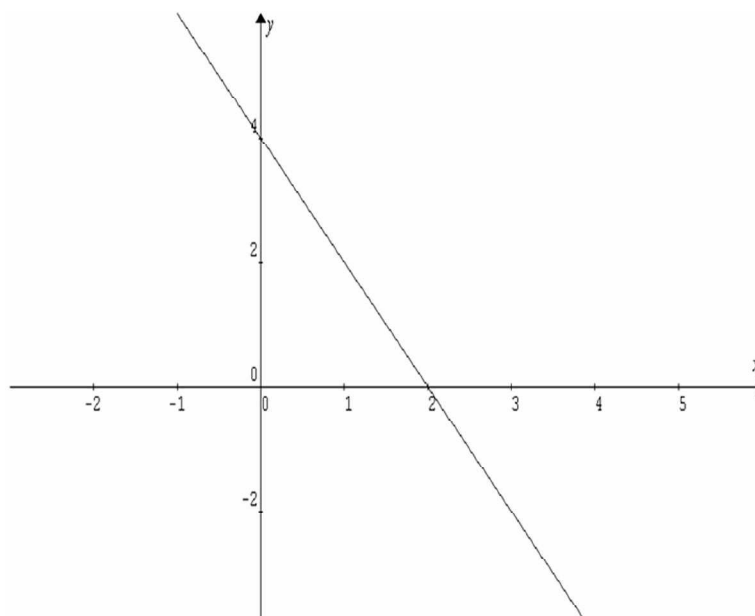
- a) $y = \frac{2}{5}x - \frac{21}{5}$
- b) $y = -4x - 13$
- c) $y = -\frac{1}{4}x - 1$
- d) $y = 2x$
- e) $y = 0$

Actividad 3

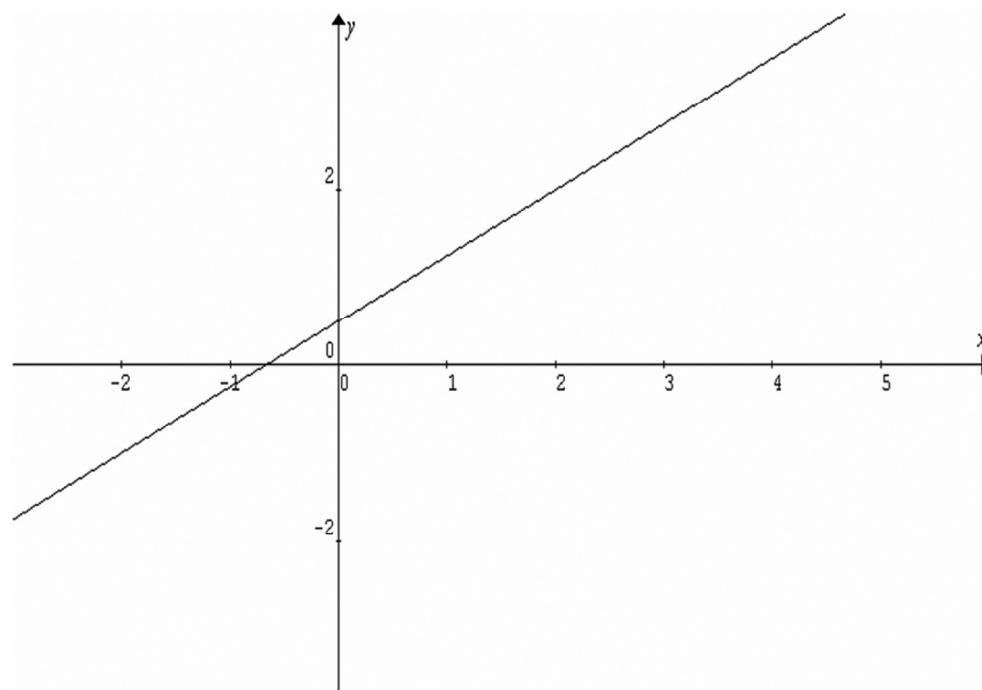
- a) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{22}{5}$
- b) $y = \frac{10}{7}x - \frac{20}{7}$
- c) $y = 15x$
- d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
- e) $y = \frac{3}{7}x - \frac{5}{7}$

Actividad 4

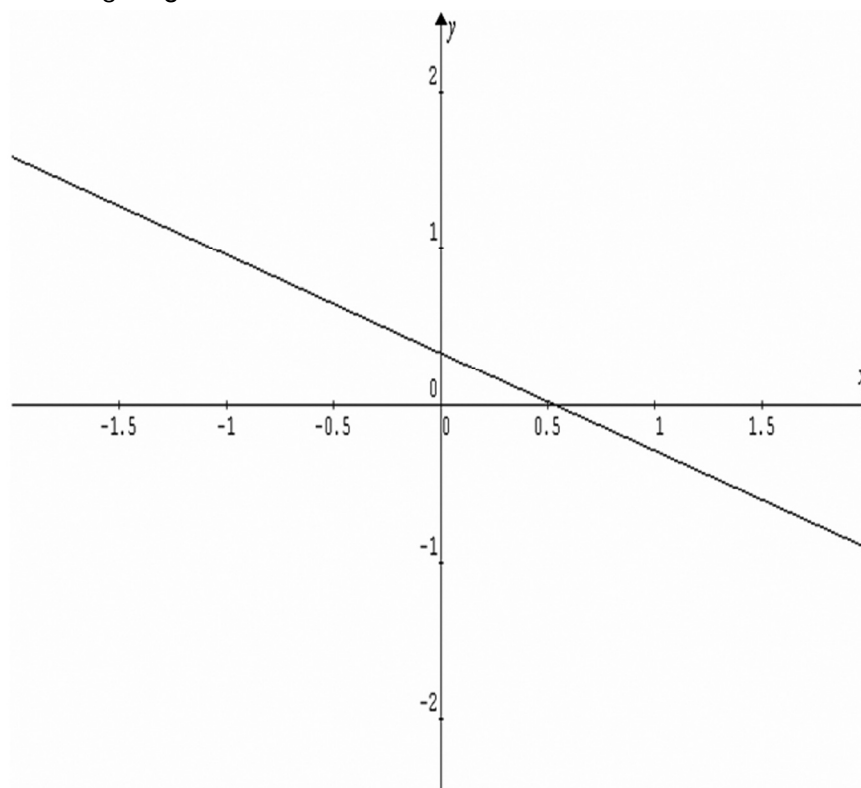
a) $y = -2x + 4$



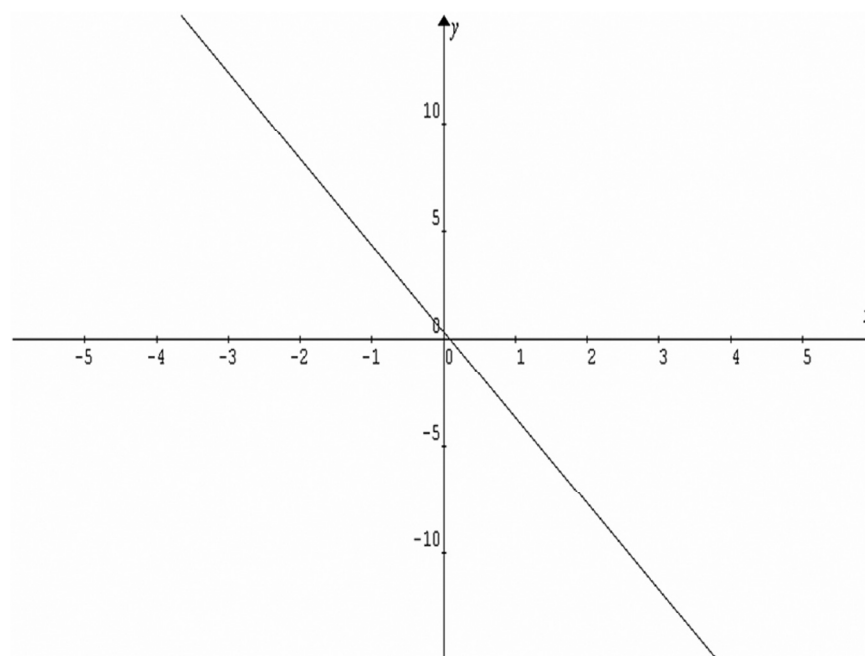
b) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



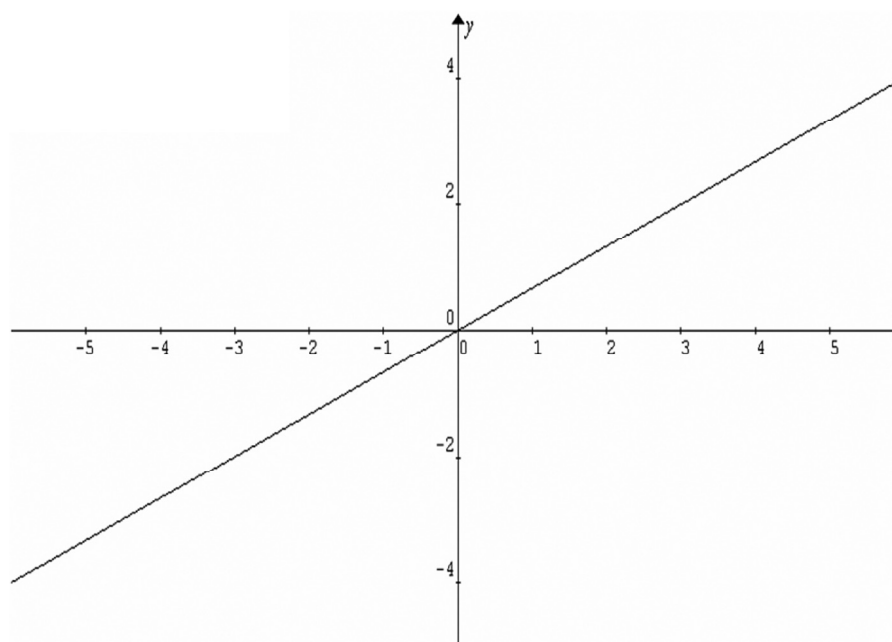
c) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{1}{3}$



d) $y = -4x + \frac{1}{3}$



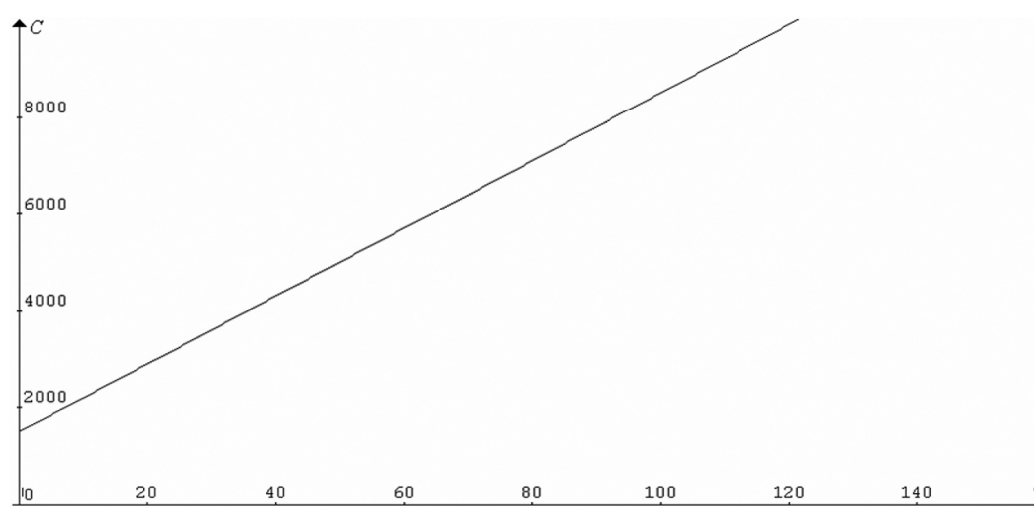
e) $y = \frac{2}{3}x$



Actividad 5

a)

i) $C_T = 70q + 1\,500$ donde q representa el número de sillas.



ii) El costo total de fabricar 100 sillas es de \$ 8 500.

b)

- i) $C_T = 100q + 2\,500$ donde q representa al número de personas.
- ii) Se podrá invitar a 25 personas con \$5 000.

c)

- i) $C_T = 35q + 50\,500$ donde q representa el número de artículos.
- ii) $I = 60q$
- iii) Se pueden producir 170 artículos.
- iv) El ingreso obtenido por 170 artículos es de \$10 200.

d)

- i) $C_T = 78q + 23\,000$ donde q representa la cantidad de pares de zapatos que se producen.
- ii) $I = 265q$
- iii) Necesita aportar \$28 460.
- iv) El ingreso que obtendrá por el pedido es de \$18 550.

e)

- i) $C_T = 35q + 3\,800$ donde q representa la cantidad artículos.
- ii) $I = 125q$
- iii) El costo por fabricar 150 artículos es de \$9 050.
- iv) Para obtener un ingreso mensual de \$15 000 necesita vender 120 artículos.

Actividad 6

- a) Para tener costos totales por \$35 000 se requiere producir 1 340 artículos.
- b) El nivel de producción para no sobrepasar \$10 000 de costos mensuales debe ser $q \leq 154.28$. Como el nivel de producción mínimo es de 50 unidades, entonces el nivel de producción deberá estar entre 50 y 154 unidades mensuales.
- c)
 - i) $3x + 2y = 250$
 - ii) Esta relación sí representa una recta. Su pendiente es $m = -\frac{3}{2}$.
Indica que por cada 2 kg de cemento de la marca A que se fabrican se dejan de fabricar 3 kg de la marca B.

- iii) Si se fabrican 10 kg de la marca B y se usan 170 horas-máquina, se podrán fabricar 50 kg de cemento de la marca A .

Actividad 7

- a) La tasa de depreciación anual es de \$4 600.
- b) El valor de rescate del automóvil es de \$89 000.
- c) El valor en libros del edificio a los 15 años es de \$14 785 714.
- d)
 - i) El valor de rescate de la mina es de \$340 000.
 - ii) La tasa de depreciación anual es de \$89 600.

Actividad 8

- a) (1, 1)
- b) (0, -1)
- c) (-1, 1)
- d) (2, 1)
- e) (-1, -1)

Actividad 9

- a) Invirtió \$200 000 en el tipo I y \$180 000 en el tipo II.
- b) Deberá vender 120 comedores del modelo A y 100 del modelo B para tener ganancias por \$65 000.
- c) La fábrica puede procesar 20 productos A y 18 productos B utilizando todas sus horas máquina.

Actividad 10

Resuelve los siguientes problemas de oferta y demanda.

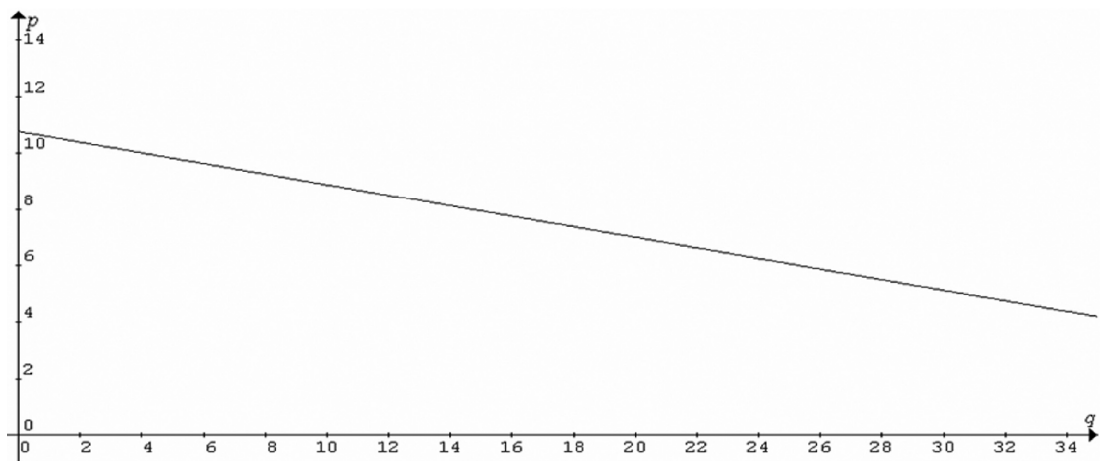
a) La función de demanda es

$$p = -0.0005q + 17$$

b)

i) La función de demanda es:

$$p = -0.1875q + 10.75$$

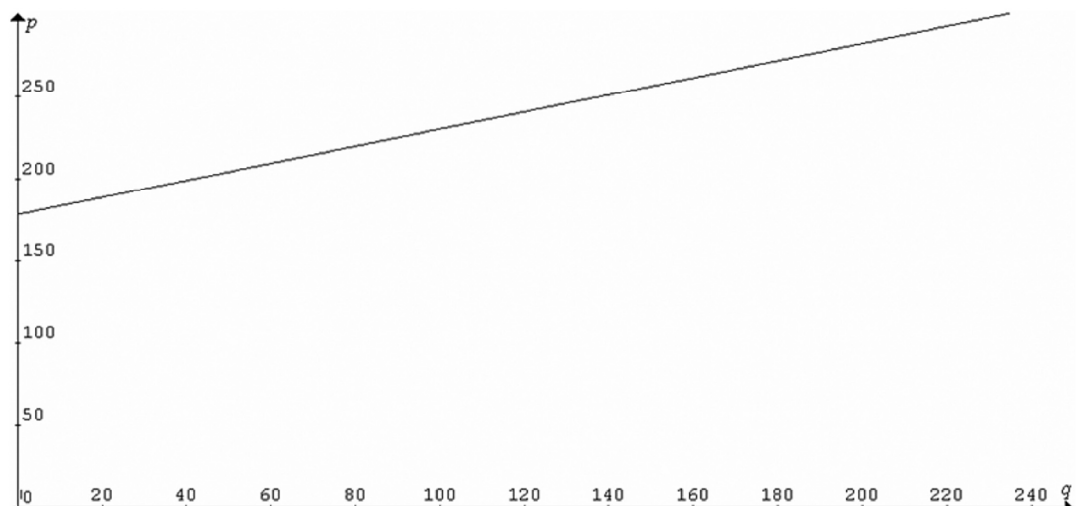


ii) Venderá 30 refrescos durante esos dos días si los vende a \$5.

c)

i) La función de oferta es

$$p = 0.52q + 178$$

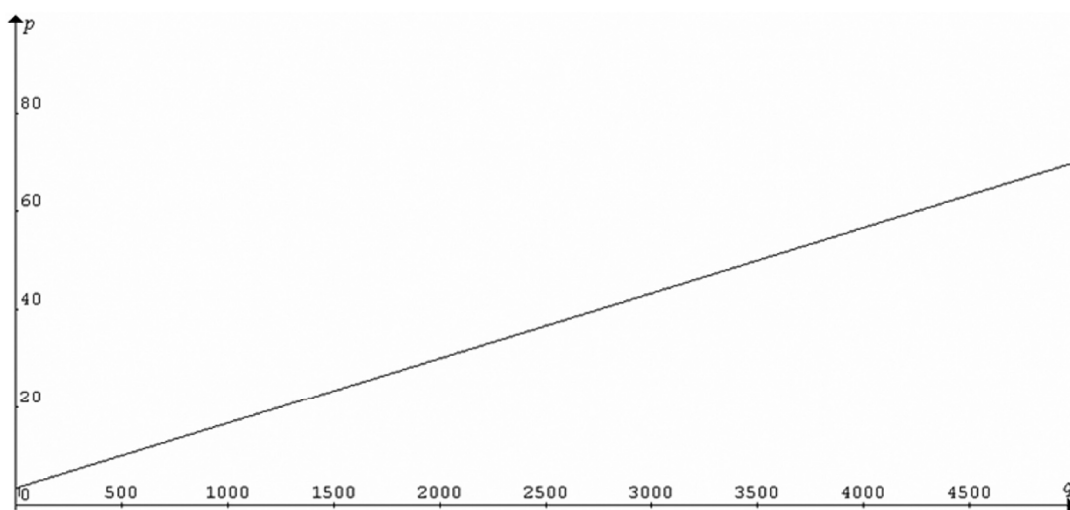


ii) Podría ofrecer 200 pares si el precio es de \$282.

d)

i) La función de oferta es

$$p = \frac{1}{75}q + \frac{10}{3}$$



ii) Podrá ofrecer 4 100 sacos si el precio es de \$58.

e)

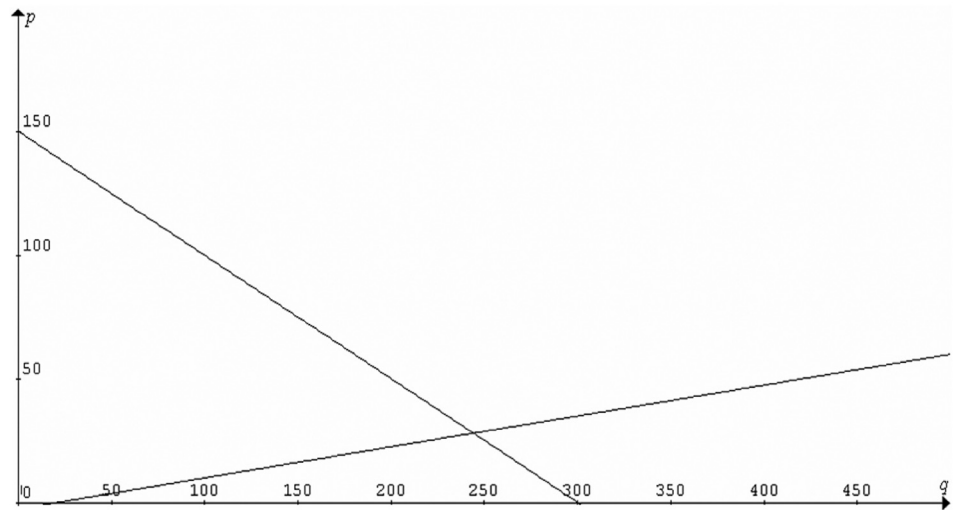
i) La función de oferta es $p = 0.03q - 7.5$

ii) La función de demanda es $p = -0.1q + 23$

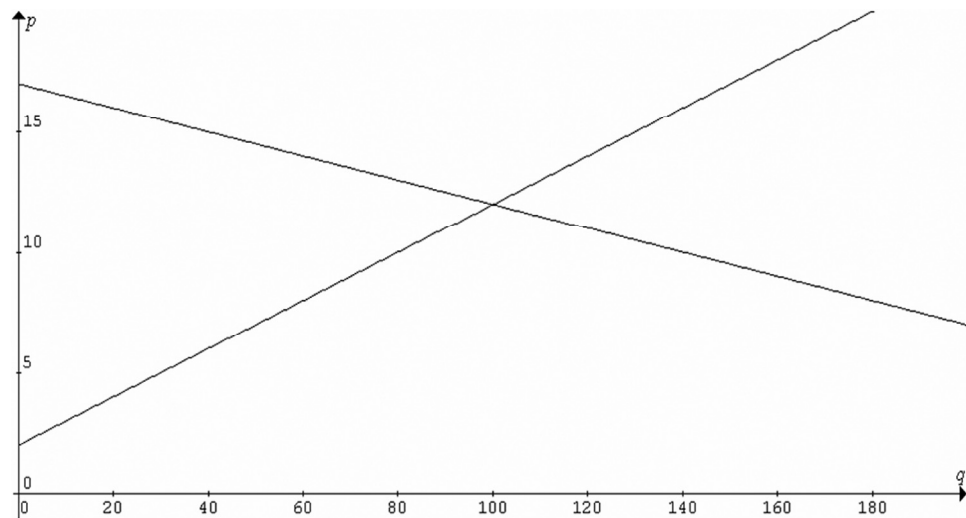
iii) La oferta será de 425 unidades y la demanda será de 177 unidades.

Actividad 11

- a) El punto de equilibrio es de 24 rompecabezas a \$14.
- b) El precio de equilibrio es de \$28 y la cantidad de equilibrio es de 244 unidades.



- c) El precio y la cantidad de equilibrio para el producto A son 90 unidades y \$2.
- d) La cantidad y el precio de equilibrio son 100 unidades a \$12.



Actividad 12

- a) El nivel de producción para estar en el punto de equilibrio es de 671 bicicletas.
- b) Le cuesta \$270.45 producir cada artículo.
- c) Sus costos fijos son de \$108 000.
- d) Le cuesta \$8 333.33 producir cada unidad.

Actividad 13

- a) Deberá producir y vender 2 000 pantalones para tener utilidades por \$45 000.
- b)
 - i) El punto de equilibrio es de 22 artículos con un ingreso de \$2 244.
 - ii) Se deberán producir y vender 610 artículos para tener utilidades equivalentes a \$10 000.
- c)
 - i) El punto de equilibrio es de 417 tubos con un ingreso de \$14 595.
 - ii) La utilidad si se producen y venden 500 tubos es de \$1 000.
 - iii) La utilidad si se producen y venden 150 tubos es de -\$3 200.
 - iv) El nivel de producción para obtener una utilidad de \$8 000 es de 1 083 tubos.