UNIDAD 7

MODELO DE TRANSPORTE

Objetivos

Al finalizar la unidad, el alumno:

- Obtendrá el modelo de transporte asociado a un problema.
- Construirá el esquema y la tabla inicial asociada al modelo de transporte.
- Resolverá problemas de transporte utilizando los métodos computacionales conocidos como: método de la esquina noreste, método de aproximación de Vogel y método Modi.
- Resolverá problemas de transporte no balanceados.

Introducción

La globalización de los mercados ha permitido que las empresas manufactureras puedan emplear los insumos de regiones o países donde éstos tienen más poder económico; de tal forma que cuando el producto está terminado, nos damos cuenta que ha requerido de partes hechas en países asiáticos, que la mano de obra para el ensamblado es latinoamericana y la publicidad se hizo en Estados Unidos. Esta situación plantea desafíos cada vez mayores. Por un lado requiere de sistemas de comunicación y de manejo de grandes volúmenes de información ágiles y rápidos; por otro, necesita contar con esquemas de logística que abatan los costos de envío, así como medios de transporte cada vez más económicos, seguros y puntuales.

El **modelo de transporte** *de la P. L.* tiene que ver con situaciones como las antes descritas. *El objetivo es encontrar el costo mínimo de envío* de una cantidad determinada de productos *desde ciertos puntos geográficos llamados orígenes, hasta los puntos de distribución llamados destinos.*

Históricamente el problema de transporte data de 1941, cuando F. L. Hitchcook presentó un estudio titulado "The distribution of a product from several source to numerous localities", que se considera el primer trabajo realizado que aborda el problema de transporte.

Iniciamos la presente unidad definiendo las partes componentes del modelo general de transporte, continuamos con la construcción de un esquema descriptivo y las tablas asociadas al modelo de transporte que usaremos para obtener la solución óptima del problema, aplicando alguna de las tres técnicas más conocidas:

- Esquina noroeste.
- Vogel.
- Modi.

Presentamos el algoritmo para llegar a la solución óptima del problema, si es que esta existe. En la actualidad, el **método Modi** es el más usado para resolver problemas de transporte.

7.1. Definición del modelo de transporte

En la industria constantemente se presenta el problema de trasladar productos desde los *centros de producción* hasta los *centros de distribución,* esto genera un *costo,* que incrementa el precio de venta; costo que buscamos reducir.

Para desarrollar el modelo suponemos que conocemos los costos unitarios de transporte desde cada una de las plantas a cada uno de los centros de distribución, además de la *oferta* y la *demanda* en cada centro (determinar de dichos costos queda fuera del objetivo de este libro). *El objetivo que perseguimos es minimizar los costos asociados con el transporte.*

Las variables de decisión las denotaremos por x_{ij}, la cual nos indica el número de bienes que serán transportados del origen i al destino j. Si además, c_{ij} son los costos por unidad trasladada del origen i al destino j, entonces la función que representa los costos de transporte de todas las unidades se calcula sumando el producto del costo unitario por el número de unidades transportadas desde cada uno de los orígenes a cada uno de los destinos, es decir:

$$Z_{\text{mín}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Las restricciones asociadas con el modelo son:

- La oferta de cada una de las fuentes:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,\ 2, \dots\ m$$

- La demanda de cada uno de los centros de distribución:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,\ 2, \dots\ n$$

Para el modelo matemático suponemos que existe equilibrio entre la oferta y la demanda, condición que escribimos matemáticamente como:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Si éste no es el caso, debemos agregar un *origen artificial*, el cual va a producir la cantidad de bienes que haga falta para cubrir la demanda faltante, o bien, si es mayor la oferta, se crea un *destino artificial* que absorba el excedente de la oferta. En ambos casos *los costos de transporte asociados con estos orígenes o destinos ficticios es cero.* Veremos ejemplos relacionados con lo anterior en la sección de problemas desbalanceados.

- Condiciones de no negatividad:

$$x_{ij} > 0 \; i = 1, 2, \ldots m \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

Finalmente, el modelo de trasporte en su forma general lo podemos escribir como:

$$Z_{\text{mín}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots m \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

Con el propósito de aclarar esto analizaremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Obtén el modelo de transporte asociado con el siguiente problema. Una empresa dedicada a la fabricación de automóviles tiene dos plantas armadoras, una en Guadalajara y otra en Oaxaca. La planta de Guadalajara dispone de 5 000 automóviles listos para su distribución, mientras que la de Oaxaca cuenta con 3 500. La empresa tiene tres centros de distribución, mismos que atienden a todas y cada una de las agencias comercializadoras de esta marca de automóviles. Uno de estos centros de distribución se encuentra en la Ciudad de México, otro en Monterrey y el tercero en Mérida. Por la experiencia de años anteriores, se estima que la demanda por automóviles de cada uno de estos centros es de 4 000, 3 000 y 1 500, respectivamente. Por otro lado, sabemos que los costos de envío por cada unidad entre las plantas armadoras y las agencias distribuidoras son:

	Cd. de Monterrey (1)	Cd. de México (2)	Cd. de Mérida (3)
Cd. de Guadalajara (1)	$50	$100	$300
Cd. de Oaxaca (2)	$200	$120	$180

El gerente de distribución de la compañía desea saber de qué armadora a qué distribuidora debe enviar los automóviles, de tal forma que los costos de envío sean mínimos.

Iniciaremos el planteamiento del problema mediante su representación esquemática:

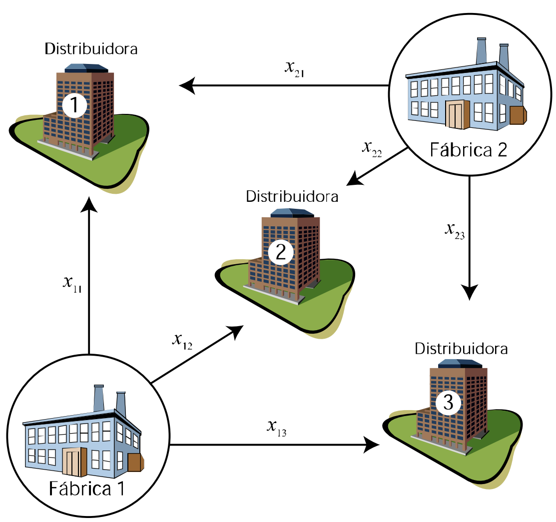


Figura 7.1. Diagrama de transporte que representa los orígenes y los destinos.

La variable x_{ij} representa el número de unidades que se envían del origen i-ésimo al destino j-ésimo. Como sólo son dos plantas armadoras i = 1, 2 que mandan sus unidades a tres distribuidoras, por lo que j = 1, 2, 3.

Si además, c_{ij} son los costos por unidad trasladada del origen i al destino j, entonces la función que representa los costos de transporte de todas las unidades estará dada por la expresión:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 100x_{11} + 50x_{12} + 300x_{13} + 120x_{21} + 200x_{22} + 180x_{23}$$

Las restricciones asociadas con el problema son:

El número de unidades (a_i) que se puede enviar desde las dos plantas armadoras a los tres centros de distribución debe ser igual a 8 500. Asimismo, el número de unidades (b_j), que deben recibir las distribuidoras también debe ser de 8500.

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 5\ 000 + 3\ 500 = 8\ 500$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 4\ 000 + 3\ 000 + 1\ 500 = 8\ 500$$

El número de automóviles enviados desde cada una de las plantas armadoras hasta los tres centros de distribución (x_{ij}) debe cumplir con las limitantes:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} = 5\ 000$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} = 3\ 500$$

Por su parte las restricciones de demanda que tiene cada una de las distribuidoras se expresan mediante las igualdades:

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i1} = x_{11} + x_{21} = 4\ 000$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i2} = x_{12} + x_{22} = 3\ 000$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i3} = x_{13} + x_{23} = 1\ 500$$

Reuniendo la función objetivo y restricciones, el problema de transporte adopta la forma:

$$Z_{\text{mín}} = 100x_{11} + 50x_{12} + 300x_{13} + 120x_{21} + 200x_{22} + 180x_{23}$$

s.a.:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 5\ 000 + 3\ 500 = 8\ 500$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 4\ 000 + 3\ 000 + 1\ 500 = 8\ 500$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} = 5\ 000$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} = 3\ 500$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i1} = x_{11} + x_{21} = 4\ 000$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i2} = x_{12} + x_{22} = 3\ 000$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i3} = x_{13} + x_{23} = 1\ 500$$

$x_{ij} \geq 0$ con i = 1, 2 y j = 1, 2, 3

Ejemplo 2

Obtén el modelo de transporte asociado con el siguiente problema.

Una fábrica de computadoras tiene 2 plantas ensambladoras, la primera en Guadalajara y la segunda en Toluca. La oferta mensual de cada una de ellas es: 3 000 y 4 000, respectivamente. Se tiene un pedido por parte del gobierno federal de 7 000 computadoras que deben ser entregadas a más tardar en un mes. La siguiente tabla indica el número de computadoras requeridas y el lugar donde deben ser entregadas.

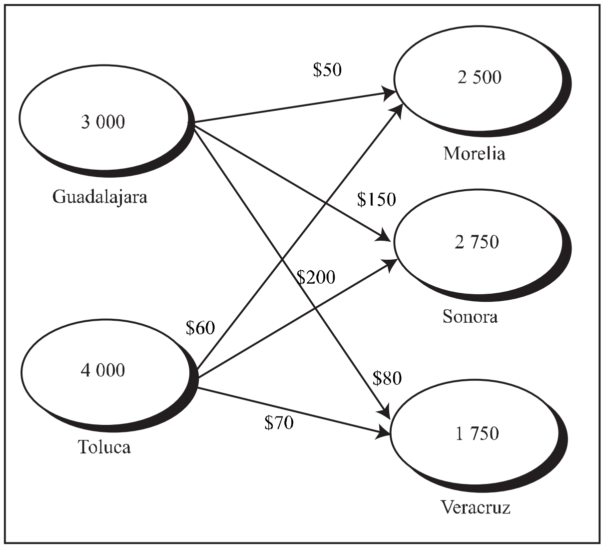
Ciudad	Cantidad
Morelia	2 500
Sonora	2 750
Veracruz	1 750

El ingeniero del área de entrega estima que los costos de transporte por unidad de cada una de las plantas a cada uno de los destinos es el siguiente:

	Morelia	Sonora	Veracruz
Guadalajara	$50	$150	$80
Toluca	$60	$200	$70

Con esta información queremos hallar la combinación que minimiza los costos de transporte, es decir, debemos decidir cuántas computadoras de cada una de las plantas deben ser transportadas a cada uno de los destinos, de tal manera que el costo total de transporte sea mínimo.

Podemos proporcionar una representación en red del problema, lo cual nos ayudaría significativamente a comprenderlo. Colocamos dos columnas de círculos, la columna alineada a la izquierda representa cada una de las plantas productoras (fuentes), mientras que la columna de la derecha representa cada uno de los destinos; dentro de cada círculo se coloca la cantidad de oferta o demanda, según corresponda. Las flechas indican las diferentes conexiones que se pueden realizar, el costo se coloca sobre esta flecha. A continuación presentamos el esquema asociado con el ejemplo.



Para el ejemplo, el modelo de transporte es:

$$Z_{\text{mín}} = 50x_{11} + 150x_{12} + 80x_{13} + 60x_{21} + 200x_{22} + 70x_{23}$$

$$\begin{aligned} \text{s. a: } & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 3\ 000 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 4\ 000 \\ & x_{11} + x_{21} = 2\ 500 \\ & x_{12} + x_{22} = 2\ 750 \\ & x_{13} + x_{23} = 1\ 750 \\ & x_{i,j} \geq 0 \quad i = 1,\ 2 \quad j = 1,\ 2,\ 3 \end{aligned}$$

7.1.1. El modelo de transporte como caso especial de P. L.

Los modelos de transporte tienden a incluir una gran cantidad de variables y restricciones, lo que hace que su solución, usando el método símplex con tablas, requiera una gran cantidad de memoria y operaciones computacionales. Por este motivo se han buscado métodos alternos que aprovechan que varias entradas de la tabla son cero.

Ejemplo 3

Construir la tabla inicial asociada con el siguiente modelo de transporte (ejemplo 2):

$$Z_{\text{mín}} = 50x_{11} + 150x_{12} + 80x_{13} + 60x_{21} + 200x_{22} + 70x_{23}$$

$$\begin{aligned}
\text{s. a: } & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 3\ 000 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 4\ 000 \\
& x_{11} + x_{21} = 2\ 500 \\
& x_{12} + x_{22} = 2\ 750 \\
& x_{13} + x_{23} = 1\ 750 \\
& x_{i,j} \geq 0 \quad i = 1,\ 2 \quad j = 1,\ 2,\ 3
\end{aligned}$$

Si formamos la tabla símplex inicial de este modelo de transporte como modelo de programación lineal, sin considerar variables de holgura, obtenemos lo siguiente:

Variables básicas	Z	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	Solución
Z	1	50	150	80	60	200	70	
	0	1	1	1	0	0	0	3 000
	0	0	0	0	1	1	1	4 000
	0	1	0	0	1	0	0	2 500
	0	0	1	0	0	1	0	2 750
	0	0	0	1	0	0	1	1 750

Nos damos cuenta de que la mayoría de las entradas de la tabla son ceros. El resto de las entradas son unos, con excepción de las entradas de la función objetivo. Este tipo de tabla hace necesario que se busque un método alterno más eficiente para resolver este modelo y que tome en cuenta las características particulares del modelo de transporte.

7.1.2. Tabla y algoritmo asociado con el modelo de transporte

Tabla inicial

Independientemente del método que utilicemos para resolver el modelo de transporte (*esquina noroeste*, *Vogel* o *Modi*) la forma de trabajar con él es por medio de una tabla que contiene la información de orígenes, destinos, oferta, demanda y costos. A continuación damos el procedimiento para la construcción de esta tabla, la cual simplifica la solución del modelo de transporte:

1. Verificamos que la *oferta total* = *demanda total*.

2. Construimos una tabla con *s* columnas y *r* renglones. El número *s* es igual al número de destinos más dos. Y *r* es igual al número de plantas más dos.

3. En la primera fila, a partir de la segunda columna, se colocan como etiquetas el nombre o número de cada uno de los destinos. En la última columna se coloca la etiqueta *oferta*.

4. En la primera columna a partir de la segunda fila, se colocan como etiquetas el nombre o número de cada una de las plantas. En la última fila se coloca la etiqueta *demanda.*

5. En las intersecciones de cada fila y columna se coloca el costo de transportar una unidad desde el origen asociado a esa fila, hasta el destino asociado con la columna.

6. En la columna de oferta se coloca la oferta disponible en el origen asociado con cada una de las filas.

7. En la fila de la demanda se escribe la demanda de cada destino, asociada con cada columna.

La tabla inicial para el ejemplo 2 se presenta a continuación:

Creamos una tabla de 4 filas por 5 columnas. Y colocamos las etiquetas correspondientes:

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50	$150	S80	3 000
Toluca	$60	$200	S70	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	7 000

Una vez que se plantea la tabla asociada al modelo de transporte, debemos buscar técnicas matemáticas para su solución. A continuación presentamos el algoritmo general para la solución del modelo de transporte.

Algoritmo general

1. Se construye la tabla inicial del modelo y se busca una solución inicial.

2. Se verifica que la solución inicial sea óptima. Si es así, se *termina* porque ya se encontró la solución del modelo, si no, *se continua.*

3. Se hacen los ajustes necesarios para hallar una mejor solución y se regresa al punto 2.

Existen diferentes métodos que utilizan este algoritmo, entre ellos tenemos los siguientes:

- Método de la esquina noroeste.
- Método de Vogel.
- Método Modi.

En las siguientes secciones de la unidad analizaremos cada uno de ellos.

Ejercicio 1

1. El objetivo del modelo de transporte es ____________ el costo de transporte.

2. Se dice que un problema de transporte está ______________ si la oferta total es igual a la demanda total.

3. La mayoría de las entradas en la tabla símplex asociada con el modelo de transporte son____________y unos.

4. El método __________ es el que vamos a utilizar para resolver el modelo de transporte de forma eficiente.

5. El costo de transportar una unidad de la fuente *i* al destino *j* se designa por________.

6. Construir la tabla inicial del siguiente problema de trasporte:

Una empresa dedicada a la fabricación de autos desea transportarlos desde sus tres plantas de producción a sus cuatro centros de distribución. La oferta de cada una de las plantas es: 300, 200 y 100, respectivamente, mientras que la demanda es 100, 200, 150 y 100, respectivamente. Los costos de transporte asociados por unidad son:

	1	2	3	4
1	\$50	\$78	\$85	\$20
2	\$40	\$35	\$100	\$90
3	\$55	\$25	\$60	\$80

7.2. Método de la esquina noroeste

El primer paso para resolver el modelo de transporte es formar una tabla inicial. A continuación presentamos el algoritmo llamado de la esquina noroeste empleando los valores numéricos del siguiente ejemplo:

Ejemplo 4

Hallar la solución óptima para el ejemplo 2 de la fábrica de computadoras. La tabla inicial es:

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50	$150	$80	3 000
Toluca	$60	$200	$70	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	7 000

Colocamos en la celda superior izquierda 2 500, ya que es el número menor entre la oferta (3 000) y la demanda (2 500). Tachamos la columna 1, ya que la demanda ya está satisfecha.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50 2 500	$150	$80	3 000
Toluca	$60	$200	$70	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

Nos trasladamos una celda a la derecha. A la oferta que es 3 000 le restamos 2 500, que es la cantidad asignada a la celda (1, 1), por lo tanto asignamos 500 a la celda (1, 2) y tachamos la fila 1, ya que agotamos la oferta.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50 **2 500**	$150 **500**	$80	3 000
Toluca	$60	$200	$70	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

Nos trasladamos una celda hacia abajo y restamos a 2 750 la cantidad de 500. En la celda (2, 2) asignamos 2 250 ya que es la cantidad menor entre 2 750 y 4 000 y tachamos el resto de la columna, ya que la demanda ya está satisfecha.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	\$50 **2 500**	\$150 **500**	\$80	3 000
Toluca	\$60	\$200 **2 250**	\$70	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

Nos trasladamos una celda a la derecha y restamos a 4 000 la cantidad de 2 250. Asignamos 1 750 a la celda (2, 3), con lo cual se satisfacen tanto la oferta como la demanda y llegamos a la esquina inferior izquierda.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	\$50 **2 500**	\$150 **500**	\$80	3 000
Toluca	\$60	\$200 **2 250**	\$70 **1 750**	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

Ésta es la *primera solución factible* del modelo. La forma de interpretarla es:

Se mandan 2 500 computadoras de Guadalajara a Morelia, 500 de Guadalajara a Sonora, 2 250 de Toluca a Sonora y 1 750 de Toluca a Veracruz. El costo asociado es:

$$Z = 50 \times 2\,500 + 150 \times 500 + 200 \times 2\,250 + 70 \times 1\,750 = 772\,500$$

Esto quiere decir que las variables básicas son:

$$x_{11} = 2\,500,\ x_{12} = 500,\ x_{22} = 2\,250,\ x_{23} = 1\,750$$

Una vez que tenemos la primera solución factible, debemos calcular los costos marginales asociados a cada una de las celdas no básicas (no empleadas en la solución).

Trasladamos una unidad a la celda (2, 1) y a (1, 3):

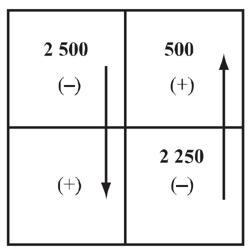
- Si los costos marginales son cantidades positivas, entonces hemos llegado a la solución óptima ya que no existe otro arreglo que disminuya los costos. *Termina*.

- Si los costos marginales generan una cantidad negativa, entonces será necesario formar otra tabla de solución ya que significa que existe otro arreglo que disminuye los costos. *Continuar*.

a) Trasladamos una unidad de la trayectoria (1, 1) a la trayectoria no básica (2, 1) y colocamos un (–) y (+), respectivamente.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	\$50 **(–) 2 500**	\$150 **500**	\$80	3 000
Toluca	\$60 **(+)**	\$200 **2 250**	\$70 **1 750**	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

b) Regla **para equilibrar la transferencia:** *consideramos siempre trayectorias empleadas en la solución.* Las celdas (1, 2) y la (2, 2) se utilizan en la transferencia:



c) Colocamos un signo (–) en la celda básica (2, 2) y un signo (+) en la celda (1, 2).

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	\$50 **(–) 2 500**	\$150 **(+)500**	\$80	3 000
Toluca	\$60 **(+)**	\$200 **(–) 2 250**	\$70 **1 750**	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

Calculemos el costo marginal de trasladar una unidad a la cantidad asignada a la celda (2, 1). Construimos una tabla y escribimos los rótulos y datos correspondientes.

Celda (2, 1)	Costo marginal
	+60
	–200
	+150
	–50

Al sumar los valores de la columna obtenemos:

$$60 + (-200) + 150 + (-50) = -40$$

Hay una disminución en costo al trasladar una unidad a la celda (2, 1). El costo marginal de esta trayectoria es – $40, por lo tanto, *es necesario formar otra tabla de solución*.

Calculemos el costo marginal asociado a la celda no básica (2, 3).

La tabla con la trayectoria posible se presenta a continuación:

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50 **(–) 2 500**	$150 **(–) 500**	$80 (+)	3 000
Toluca	$60	$200 **(+) 2 250**	$70 **(–) 1 750**	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

El costo marginal es:

Celda (1, 3)	Costo marginal
	+80
	–70
	+200
	–150

El costo marginal es: $60.

Como al trasladar una unidad hay un aumento en los costos marginales (+60), la solución actual no es óptima. Para mejorar la solución debemos incrementar tanto como sea posible la cantidad asignada a la celda (2, 1), conservando las restricciones de oferta y demanda:

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50 (–) **2 500**	$150 (+) **500**	$80	3 000
Toluca	$60 (+)	$200 (–) **2 250**	$70 **1 750**	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

La celda con signo negativo y costo mayor es la (2, 2) con 2 250. Asignamos a la celda (2, 1) la cantidad de 2 250, para la celda (1, 1) restamos 2 250 a 2 500 y queda 250, para la celda (1, 2) restamos 250 a 3 000 y queda con 2 750 y, finalmente, a la celda (2, 3) le restamos 2 250 a 4 000 y tenemos 1 750. Se genera la siguiente tabla:

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50 **250**	$150 **2 750**	$80	3 000
Toluca	$60 **2 250**	$200	$70 **1 750**	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

Volvemos a calcular los costos marginales de las celdas no básicas: (2, 2) y (1, 3).

A continuación mostramos las trayectorias y sus costos marginales asociados.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	S50 (+) **250**	$150 (–) **2 750**	$80	3 000
Toluca	S60 (–) **2 250**	$200 (+)	$70 **1 750**	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

Celda (2, 2)

Costo marginal
+200
–150
+50
–60

Costo marginal $40.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	\$50 **(–) 250**	\$150 **2 750**	\$80 **(+)**	3 000
Toluca	\$60 **(+) 2 250**	\$200	\$70 **(–) 1 750**	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	

Celda (1, 3)	Costo Marginal
(1, 3) *	+80
(2, 3)	–70
(2, 1)	+60
(1, 1)	–50

Costo marginal $20.

Como los dos costos marginales son positivos, la última tabla de solución es la óptima.

La solución óptima del problema de transporte es:

x_{11} = 250, x_{12} = 2 750, x_{21} = 2 250, x_{23} = 1 750
con $Z_{mín}$ = \$682 500.

Ejercicio 2

1. El primer paso para resolver un problema de transporte es hallar una ___________ inicial.

2. El método de la esquina noroeste empieza en la celda ______________ izquierda de nuestra tabla.

3. A la celda superior izquierda se le asigna la cantidad _____________ entre la oferta y la demanda asociada con dicha celda.

4. Si los costos marginales son todos______________, la solución actual es óptima.

5. Hallar una solución inicial del siguiente problema de transporte:

Una empresa de transporte debe llevar el maíz de tres graneros a cuatro molinos. La oferta en cada uno de los graneros es 15, 25 y 10 toneladas de maíz, respectivamente. La capacidad de cada uno de los molinos es de 5, 12, 17 y 16 toneladas cada uno. Los costos de transporte por tonelada son:

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4
Granero 1	\$10	\$2	\$20	\$11
Granero 2	\$12	\$7	\$9	\$20
Granero 3	\$4	\$14	\$16	\$18

7.3. Método de aproximación de Vogel

A diferencia del método de la esquina noroeste, este método, trata de buscar una mejor solución inicial y así reducir el número de iteraciones necesarias para llegar a la solución óptima.

El método de Vogel es un algoritmo que requiere una mayor cantidad de operaciones para generar la primera solución factible, pero que tiene la ventaja de acercarnos a la solución óptima. A continuación escribimos el algoritmo:

1. Para cada renglón (columna) con una oferta (demanda) estrictamente positiva, determina una medida de penalidad calculando el valor absoluto de la diferencia de los dos costos por unidad más bajos en el mismo renglón (columna).

2. Identifica el renglón o la columna con la penalidad más grande. Rompa los empates arbitrariamente. Asigna tantas unidades como sea posible a la variable con el costo más bajo por unidad en el renglón (columna) seleccionados. Ajusta la oferta y la demanda y tacha el renglón o columna satisfechos. Si se satisfacen simultáneamente un renglón y una columna sólo se tacha uno de los dos, y al renglón (columna) restante se le asigna una oferta (demanda) de cero.

3. a) Si queda exactamente un renglón y una columna sin tachar con oferta y demanda cero, detente.
   b) Si queda sin tachar un renglón (columna) con una oferta (demanda) positiva, determina las variables básicas en el renglón (columna) ajustando la oferta (demanda), detente.
   c) Si todos los renglones y las columnas no tachadas tienen una oferta y una demanda de cero, determina las variables básicas cero, comenzando por los cuadros de costo más bajo, detente.
   d) De lo contrario, ve al paso 1.

Ejemplo 5

Hallar una solución inicial para el problema de transporte utilizando el método de Vogel.

La tabla inicial es:

	1	2	3	4	Oferta
1	\$15	\$10	\$20	\$16	10
2	\$12	\$7	\$10	\$8	12
3	\$5	\$9	\$4	\$20	15
Demanda	12	8	6	11	37

Agregamos un renglón y una columna para calcular las medidas de penalidad.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	\$15	\$10	\$20	\$16	10	5
2	\$12	\$7	\$10	\$8	12	1
3	\$5	\$9	\$4	\$20	15	1
Demanda	12	8	6	11		
Penalidad	7	2	6	8		

La columna con penalidad máxima es la cuarta, buscamos la celda con costo menor en la columna. La celda es la (2, 4). A esta celda le asignamos 11 unidades y tachamos la columna cuatro, pues su demanda está satisfecha.

Como todavía quedan celdas sin tachar, volvemos a repetir el algoritmo tomando en cuenta sólo las celdas vacías.

Calculamos las nuevas penalidades.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	$15	$10	$20	$16	10	5
2	$12	$7	$10	$8 **11**	12	3
3	$5	$9	$4	$20	15	1
Demanda	12	8	6	11		
Penalidad	7	2	6	X		

La columna con penalidad máxima es la 1, buscamos la celda con costo menor en la columna. La celda es la (3, 1). A esta celda le asignamos 12 unidades y tachamos la columna 1, pues su demanda está satisfecha. Continuamos el algoritmo; calculamos las penalidades.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	$15	$10	$20	$16	10	10
2	$12	$7	$10	$8 **11**	12	3
3	$5 **12**	$9	$4	$20	15	5
Demanda	12	8	6	11		
Penalidad	X	2	6	X		

El renglón con penalidad máxima es el uno, buscamos la celda con costo menor en el renglón, la celda es la (1, 2) a esta celda le asignamos 8 unidades y tachamos la columna 2, pues está satisfecha su demanda.

Sólo quedan las celdas (1, 3), (2, 3) y (3, 3) para asignarles una cantidad. La celda de costo menor es la (3, 3), a esta celda le asignamos 3 unidades, la siguiente es la (2, 3) y a ésta le asignamos 1 unidad y finalmente a la (1, 3) le asignamos 2 unidades (para completar al máximo las cantidades en demanda).

	1	2	3	4	Oferta
1	$15	$10 **8**	$20 **2**	$16	10
2	$12	$7	$10 **1**	$8 **11**	12
3	$5 **12**	$9	$4 **3**	$20	15
Demanda	12	8	6	11	

Se obtiene la primera solución factible. Las variables básicas son:

$$x_{12} = 8,\ x_{13} = 2,\ x_{23} = 1,\ x_{24} = 11,\ x_{31} = 12,\ x_{33} = 3, \text{ con } Z = \$290$$

Hallar una solución por el método de Vogel implica un número mayor de operaciones, pero al comparar los costos de las soluciones obtenidas con este método y considerando el costo mínimo, nos damos cuenta de que Vogel brinda una solución inicial más cercana a la óptima.

Para verificar que la solución obtenida por el método de Vogel sea óptima podemos aplicar la técnica de esquina noroeste junto con el análisis del costo mínimo.

Ejercicio 3

Califica cada una de las siguientes aseveraciones como verdaderas o falsas, según corresponda.

1. El método de Vogel brinda la solución óptima del modelo de transporte. _____

2. La medida de penalidad es mayor o igual a cero. _____

3. La fila seleccionada es aquella con penalidad máxima. _____

4. Los empates entre penalidades se rompen arbitrariamente. _____

5. Hallar la primera solución factible y el valor de Z para el siguiente ejemplo, utilizando el método de la esquina noroeste.

	1	2	3	4	Oferta
1	$10	$2	$20	$11	15
2	$12	$7	$9	$20	25
3	$4	$14	$16	$18	10
Demanda	5	12	17	16	

6. Hallar la primera solución factible y el valor de Z para el modelo anterior, utilizando el algoritmo de Vogel.

7.4. Método Modi

La técnica de la esquina noroeste tiene el inconveniente de que tenemos que analizar todas las trayectorias posibles que se pueden formar a partir de las celdas no básicas (trayectorias no empleadas en la solución). El método Modi también calcula costos marginales pero sólo se busca la trayectoria asociada a la variable no básica que va a entrar al sistema. Los pasos hacia la solución óptima se presentan a continuación.

Paso 1. Se calcula una solución inicial factible, por cualquiera de los métodos presentados anteriormente

Paso 2. Calculamos los valores de los multiplicadores u_i y v_j. Asociamos los multiplicadores u_i y v_j con el renglón i y la columna j de la tabla de transporte. Para cada variable básica x_{ij} de la solución actual, los multiplicadores u_i y v_j deben satisfacer la ecuación siguiente:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

De esta manera obtenemos $m + n - 1$ ecuaciones con $m + n$ incógnitas. Los valores de los multiplicadores se pueden determinar a partir de estas ecuaciones *suponiendo un valor arbitrario para cualquiera de los multiplicadores* y resolviendo las $m + n - 1$ multiplicadores desconocidos restantes.

Paso 3. Calcular los costos marginales asociados con las variables no básicas. Esto lo hacemos utilizando la siguiente fórmula:

$$c.\,m. = c_{ij} - u_i - v_j$$

Paso 4. Si todos los costos marginales no son negativos, entonces la solución actual es óptima, parar y salir. Si no, continuar.

Paso 5. Seleccionamos la celda con el mayor valor negativo en costo marginal, *creamos un circuito y hacemos que esta variable no básica pase a ser básica, y que una básica pase a ser no básica.* El circuito empieza y termina en la variable no básica designada. Éste consta de segmentos sucesivos horizontales y verticales cuyos puntos extremos deben ser variables básicas, salvo para los puntos extremos que están asociados con la variable que entra. Esto significa que todo elemento de esquina del ciclo debe ser una celda que contenga una variable básica.

Paso 6. Ajustamos el valor de las variables básicas para satisfacer las restricciones de oferta y demanda. Asignamos a la variable no básica la cantidad θ y moviéndonos sobre los vértices del circuito en el sentido de las manecillas del reloj, vamos restando y sumando (a la primera celda se le resta, a la segunda se le suma, a la tercera se le resta, etc.) la cantidad θ al valor asignado a cada una de las celdas, hasta regresar a la celda de la variable no básica. Para determinar el valor de θ debemos recordar que el valor de las variables x_{ij} debe ser mayor o igual a cero, por lo tanto le asignamos a θ el máximo valor posible, de tal manera que ninguna de las variables x_{ij} sea negativa. *Regresamos al paso 2*.

Ejemplo 6

Resolver el problema de la fábrica de computadoras (ejemplo 4), que tiene la tabla inicial siguiente.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50	$150	$80	3 000
Toluca	$60	$200	$70	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	**7 000**

La primera solución factible utilizando el método de la esquina noroeste es:

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50 **2 500**	$150 **500**	$80	3 000
Toluca	$60	$200 **2 250**	$70 **1 750**	4 000
Demanda	2 500	2 750	1 750	7 000

El costo de esta solución es $772 500. Aumentamos una columna para la variable u_i y una fila para la variable v_j. Le asignamos el valor 0 a la variable $u_2 = 0$

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta	u_i
Guadalajara	$50 **2 500**	$150 **500**	$80	3 000	
Toluca	$60	$200 **2 250**	$70 **1 750**	4 000	**0**
Demanda	2 500	2 750	1 750	7 000	
v_j					

Para las celdas básicas utilizamos la ecuación: $c_{ij} - u_i - v_j = 0$

Celda (1, 1)	$50 - u_1 - v_1 = 0$
Celda (1, 2)	$150 - u_1 - v_2 = 0$
Celda (2, 2)	$200 - u_2 - v_2 = 0$
Celda (2, 3)	$70 - u_2 - v_3 = 0$

Sustituyendo el valor de $u_2 = 0$ y resolviendo el resto de las ecuaciones obtenemos los valores de las u_i y las v_j. Estos valores los sustituimos en la tabla.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta	u_i
Guadalajara	\$50 **2 500**	\$150 **500**	\$80	3 000	**–50**
Toluca	\$60	\$200 **2 250**	\$70 **1 750**	4 000	**0**
Demanda	2 500	2 750	1 750	7 000	
v_j	**100**	**200**	**70**		

Calculamos los costos marginales de cada una de las celdas no básicas utilizando la ecuación: $c.\ m. = c_{ij} - u_i - v_j$

Celda (1, 3)	80 – (–50) – 70 =60
Celda (2, 1)	60 – 0 – 100 = –40

Escribimos estos datos en la tabla:

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta	u_i
Guadalajara	\$50 **2 500**	\$150 **500**	\$80 60	3 000	**–50**
Toluca	\$60 –40	\$200 **2 250**	\$70 **1 750**	4 000	**0**
Demanda	2 500	2 750	1 750	7 000	
v_j	**100**	**200**	**70**		

Como el costo marginal de la celda (2, 1) es negativo la solución actual no es óptima. Partiendo de esta celda construimos una trayectoria. En la celda (1, 1) colocamos un signo (–), en la celda (1, 2) un signo (+) y en la celda (2, 2) un signo (–)

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta	u_i
Guadalajara	\$50 (–)**2 500**	\$150 (+) **500**	\$80 60	3 000	**–50**
Toluca	\$60 (+) –40	\$200 (–)**2 250**	\$70 **1 750**	4 000	**0**
Demanda	2 500	2 750	1 750		
v_j	**100**	**200**	**70**		

Asignamos a la celda (2, 1) la cantidad θ, a la celda (1, 1) debemos restarle la cantidad θ para cumplir con la demanda, a la celda (1, 2) le sumamos θ para no afectar la oferta de la fila uno y finalmente a la celda (2, 2) le restamos θ. Como todas las asignaciones deben ser mayores o iguales a cero, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\theta \geq 0$$
$$2\,500 - \theta \geq 0$$
$$500 + \theta \geq 0$$
$$2\,250 - \theta \geq 0$$

El máximo valor de θ que satisface todas las desigualdades es 2 250. Al realizar los ajustes en cada una de las celdas obtenemos la siguiente solución:

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta	u_i
Guadalajara	\$50 **250**	\$150 **2 750**	\$80 60	3 000	
Toluca	\$60 **2 250**	\$200 (Variable no básica)	\$70 **1 750**	4 000	
Demanda	2 500	2 750	1 750		
v_j	100	200	70		

El costo de esta nueva solución es \$682 500, por lo tanto, esta solución es mejor, para determinar si es la óptima calculamos el valor de las variables u_i y v_j y los costos marginales asociados a cada una de las celdas no básicas. La información completa se presenta en la siguiente tabla.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta	u_i
Guadalajara	\$50 **250**	\$150 **2 750**	\$80 20	3 000	**0**
Toluca	\$60 **2 250**	\$200 40	\$70 **1 750**	4 000	**10**
Demanda	2 500	2 750	1 750	7 000	
v_j	**50**	**150**	**60**		

Por lo tanto, como todos los costos marginales son positivos esta solución es la óptima. El valor de las variables básicas es:

x_{11} = 250, x_{12} = 2 750, x_{21} = 2 250, x_{23} = 1 750 con un costo mínimo de \$682 500.

Ejercicio 4

1. La variable que entra en el sistema es la que tiene el costo marginal:

   a) Más positivo.
   b) Más negativo.
   c) Cero.
   d) Uno.

2. La solución actual es óptima si los costos marginales son:

   a) Mayores a cero.
   b) Menores a cero.
   c) Negativos.
   d) No negativos.

3. Una trayectoria incluye sólo una celda:

   a) Positiva.
   b) Básica.
   c) No básica.
   d) Por fila.

4. Para calcular el costo marginal de las celdas no básicas utilizamos la ecuación:

   a) $c.\ m. = c_{ij} - u_i - v_j$
   b) $c.\ m. = c_{ij} + u_i - v_j$
   c) $c.\ m. = c_{ij} - u_i + v_j$
   d) $c.\ m. = c_{ij} + u_i + v_j$

5. Hallar la solución óptima del siguiente modelo de transporte, utilizando la técnica de Modi:

	1	2	3	4	Oferta
1	\$10	\$2	\$20	\$11	15
2	\$12	\$7	\$9	\$20	25
3	\$4	\$14	\$16	\$18	10
Demanda	5	12	17	16	

7.5. Problemas no balanceados

Cuando la oferta total no es igual a la demanda total, se dice que el modelo de transporte no está balanceado. La forma en la que siempre es posible balancear un modelo no balanceado es añadiendo un punto de origen o de destino ficticio con costos cero.

Ejemplo 7

Hallar una solución inicial para el siguiente problema de transporte:

Tres plantas de energía eléctrica, con capacidades de 25, 40 y 50 millones de kilovatios/hora, proporcionan electricidad a tres ciudades. La demanda máxima es de 30, 35 y 25 millones de kilovatios/hora. El costo de transporte por millón de kilovatio/hora está dado en la siguiente tabla:

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
Planta 1	$600	$700	$400
Planta 2	$320	$300	$350
Planta 3	$500	$480	$450

Verificamos que la oferta total sea igual a la demanda total.

Oferta total: 25 + 40 + 50 = 115.

Demanda total: 30 + 35 + 25 = 90.

Tenemos un excedente de oferta de 25 millones de kilovatios/hora, por lo tanto debemos agregar una ciudad ficticia que consuma dicha cantidad. La tabla inicial la construimos con 6 columnas y 5 filas.

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Oferta
Planta 1	$600	$700	$400	0	25
Planta 2	$320	$300	$350	0	40
Planta 3	$500	$480	$450	0	50
Demanda	30	35	25	25	**115**

Buscamos una solución inicial por el método de la esquina noroeste:

Asignamos 25 unidades a la celda (1, 1), y tachamos la fila 1, nos trasladamos a la celda (2, 1) y asignamos 5 unidades y tachamos el resto de la columna 1. Nos trasladamos a la celda (2, 2) y asignamos 35 unidades. Al hacer esto se satisface tanto la oferta como la demanda, por lo tanto tachamos de manera arbitraria la fila y nos pasamos hacia la celda (3, 2), pero como ya está satisfecha la demanda colocamos un cero y tachamos el resto de la columna, nos movemos a la celda (3, 3) y le asignamos 25 unidades, finalmente llegamos a la celda (3, 4) y asignamos 25 unidades, con lo cual tenemos la siguiente *solución inicial:*

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Oferta
Planta 1	600 **25**	700	400	0	25
Planta 2	320 **5**	300 **35**	350	0	40
Planta 3	500	480 **0**	450 **25**	0 **25**	50
Demanda	30	35	25	25	**115**

Ejemplo 8

Hallar una solución inicial para el siguiente problema.

Una empresa de transportes tiene que llevar el maíz de tres campos distintos a 4 molinos. La oferta de cada uno de los campos es de 15, 25 y 10 toneladas, respectivamente. La cantidad de maíz que pueden procesar cada uno de los molinos es de 5, 15, 15 y 15 toneladas, respectivamente. Los costos por tonelada de maíz entre los campos y cada uno de los molinos se muestra en la siguiente tabla.

	1	2	3	4
1	\$10	\$2	\$20	\$11
2	\$12	\$7	\$9	\$20
3	\$4	\$14	\$16	\$18

Hallar la combinación que minimiza los costos de transportación.

Formamos la tabla inicial.

	1	2	3	4	Oferta
1	$10	$2	$20	$11	15
2	$12	$7	$9	$20	25
3	$4	$14	$16	$18	10
Demanda	5	15	15	15	**50**

Calculamos las medidas de penalidad de cada fila.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	$10	$2	$20	$11	15	8
2	$12	$7	$9	$20	25	2
3	$4	$14	$16	$18	10	10
Demanda	5	15	15	15	11	
Penalidad	6	5	7	7		

El renglón con penalidad máxima es el tercero, por lo tanto, buscamos la celda con costo menor, la cual es la (3, 1). A esta celda le asignamos 5 unidades y tachamos la columna uno, pues su demanda está satisfecha.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	$10	$2	$20	$11	15	8
2	$12	$7	$9	$20	25	2
3	$4 **5**	$14	$16	$18	10	10
Demanda	5	15	15	15		
Penalidad	6	5	7	7		

Como todavía quedan celdas sin tachar volvemos a repetir el algoritmo tomando en cuenta sólo las celdas vacías.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	$10	$2	$20	$11	15	9
2	$12	$7	$9	$20	25	2
3	$4 **5**	$14	$16	$18	10	2
Demanda	5	15	15	15		
Penalidad	X	5	7	7		

El renglón con penalidad máxima es el uno, de las celdas vacías la de costo menor es la (1, 2), a esta celda le asignamos 15 unidades y tachamos el renglón uno pues la oferta ya está satisfecha.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	$10	$2 **15**	$20	$11	15	X
2	$12	$7	$9	$20	25	1
3	$4 **5**	$14	$16	$18	10	2
Demanda	5	15	15	15	11	
Penalidad	X	7	7	2		

Continuamos el algoritmo con las celdas vacías.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	$10	$2 **15**	$20	$11	15	X
2	$12	$7	$9	$20	25	2
3	$4 **5**	$14	$16	$18	10	2
Demanda	5	15	15	15		
Penalidad	X	7	7	2		

La columna con penalidad máxima es la tercera, de las celdas vacías la de costo menor es la (2, 3), a esta celda le asignamos 15 unidades y tachamos la columna 3 pues la demanda ya está satisfecha.

Continuamos con el algoritmo.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	$10	$2 **15**	$20	$11	15	X
2	$12	$7	$9 **15**	$20	25	13
3	$4 **5**	$14	$16	$18	10	4
Demanda	5	15	15	15		
Penalidad	X	7	X	2		

El renglón con penalidad máxima es el segundo. La celda con costo mínimo es la (2, 2), le asignamos 0 unidades y tachamos la columna dos pues su demanda ya está satisfecha.

	1	2	3	4	Oferta	Penalidad
1	\$10	\$2 **15**	\$20	\$11	15	X
2	\$12	\$7 **0**	\$9 **15**	\$20	25	13
3	\$4 **5**	\$14	\$16	\$18	10	4
Demanda	5	15	15	15	11	
Penalidad	X	7	X	2		

Como sólo queda una columna sin tachar, la celda de costo menor es la (3, 4), le asignamos 5 unidades y a la celda (2, 4) le asignamos 10 unidades.

	1	2	3	4	Oferta
1	\$10	\$2 **15**	\$20	\$11	15
2	\$12	\$7 **0**	\$9 **15**	\$20 **10**	25
3	\$4 **5**	\$14	\$16	\$18 **5**	10
Demanda	5	15	15	15	

Y ésta es la solución inicial. Las variables básicas son:

$$x_{12} = 15,\ x_{22} = 0,\ x_{23} = 15,\ x_{24} = 10,\ x_{31} = 5,\ x_{34} = 5 \text{ con } Z = \$475$$

Una vez que obtuvimos la solución inicial, utilizamos el *algoritmo de Modi* para hallar la solución óptima.

Aumentamos la columna de la variable u_i y el renglón de v_j. Le asignamos el valor cero a la variable u_2 y calculamos el resto de las variables.

	1	2	3	4	Oferta	u_i
1	$10	$2 **15**	$20	$11	15	**–5**
2	$12	$7 **0**	$9 **15**	$20 **10**	25	**0**
3	$4 **5**	$14	$16	$18 **5**	10	**–2**
Demanda	5	15	15	15		
v_j	**6**	**7**	**9**	**20**		

Ahora calculamos los costos marginales de cada una de las celdas no básicas.

	1	2	3	4	Oferta	u_i
1	$10 9	$2 **15**	$20 16	$11 –4	15	**–5**
2	$12 6	$7 **0**	$9 **15**	$20 **10**	25	**0**
3	$4 **5**	$14 9	$16 9	$18 **5**	10	**–2**
Demanda	5	15	15	15		
v_j	**6**	**7**	**9**	**20**		

Como el costo marginal de la celda (1, 4) es negativo, la solución actual no es óptima. Construimos una trayectoria que parta de esta celda; la trayectoria contiene las celdas: (1, 4) – (2, 4) – (2, 2) – (1, 2). Observamos que la trayectoria contiene la variable degenerada.

	1	2	3	4	Oferta	u_i
1	$10 9	$2 **15**(–)	$20 16	$11 –4(+)	15	**–5**
2	$12 6	$7 **0** (+)	$9 **15**	$20 **10** (–)	25	**0**
3	$4 **5**	$14 9	$16 9	$18 **5**	10	**–2**
Demanda	5	15	15	15		
v_j	**6**	**7**	**9**	**20**		

Para determinar el valor del incremento resolvemos las siguientes desigualdades.

$$10 - \theta \geq 0$$
$$15 - \theta \geq 0$$

El máximo valor de θ que satisface estas desigualdades es 10, por lo tanto, el incremento de la celda (1, 4) es en 10 unidades (hacemos los ajustes necesarios).

	1	2	3	4	Oferta	u_i
1	\$10	\$2 **5**	\$20	\$11 **10**	15	
2	\$12	\$7 **10**	\$9 **15**	\$20	25	
3	\$4 **5**	\$14	\$16	\$18 **5**	10	
Demanda	5	15	15	15		
v_j						

Calculamos nuevamente los valores de las variables u_i y v_j y los costos marginales de las celdas no básicas.

	1	2	3	4	Oferta	u_i
1	\$10 13	\$2 **5**	\$20 18	\$11 **10**	15	**2**
2	\$12 10	\$7 **10**	\$9 **15**	\$20 4	25	**7**
3	\$4 **5**	\$14 5	\$16 5	\$18 **5**	10	**9**
Demanda	5	15	15	15		
v_j	**–5**	**0**	**2**	**9**		

Como los costos marginales son todos positivos, entonces la solución actual es óptima. La solución óptima es:

$x_{12} = 5$, $x_{14} = 10$, $x_{22} = 10$, $x_{23} = 15$, $x_{31} = 5$, $x_{34} = 5$ con un costo mínimo de \$435.

Ejercicio 5

1. Si una de las variables básicas es igual a cero, el modelo de transporte es:

   a) Mixto.
   b) Entero.
   c) No entero.
   d) Degenerado.

2. El número de variables básicas de un modelo de transporte es:

   a) $n + m + 1$
   b) $n + m - 1$
   c) $n - m + 1$
   d) $-n + m - 1$

3. Si la celda no tachada de costo menor tiene satisfecha la oferta y la demanda, debemos asignarle:

   a) 2 unidades.
   b) 1 unidad.
   c) 0 unidades.
   d) No se sabe.

4. Si una celda básica tiene asignadas 0 unidades, utilizamos la fórmula.

   a) $c_{ij} - u_i + v_j = 0$
   b) $c_{ij} + u_i + v_j = 0$
   c) $c_{ij} + u_i - v_j = 0$
   d) $c_{ij} - u_i - v_j = 0$

5. Resolver el siguiente modelo de transporte degenerado.

	Morelia	Sonora	Veracruz	Oferta
Guadalajara	$50	$150	$80	3 000
Toluca	$60	$200	$70	4 000
Demanda	2 000	2 000	3 000	

Ejercicios propuestos

Hallar la solución óptima de los siguientes problemas de transporte utilizando el algoritmo *Modi*. Para hallar una solución inicial utilizar Vogel o el método de la esquina noroeste.

1. Una empresa dedicada a la fabricación de automóviles tiene dos plantas productoras, una en Guadalajara y otra en Oaxaca. La planta de Guadalajara tiene 5 000 automóviles listos para su distribución, mientras que la de Oaxaca cuenta con 3 500. Los automóviles se venden en tres centros de distribución. Uno en el D. F., otro en Monterrey y uno más en Mérida. La demanda de cada uno de estos centros de distribución es de 4 000, 3 000 y 1 500, respectivamente. En la tabla siguiente se muestran los costos unitarios de transportación de cada una de las fuentes a cada uno de los destinos.

	D.F. (1)	Monterrey (2)	Mérida (3)
Guadalajara (1)	$100	$50	$300
Oaxaca (2)	$120	$200	$180

El gerente desea saber qué combinación es la mejor, en el sentido de minimizar los costos de transporte.

2. Una tienda de cosméticos tiene dos plantas productoras, una en Panamá y otra en Estados Unidos. Los productos deben ser comercializados a través de tiendas en España, México y Brasil. La oferta de cada una de las plantas es de 4 000 y 5 000 respectivamente, mientras que la demanda es de 4 000, 2 800 y 2 000. Los costos unitarios de transporte son:

	España	México	Brasil
Panamá	$200	$150	$190
EUA	$180	$100	$220

El gerente de almacén desea buscar la combinación que minimice los costos de transportación.

3. Se tienen tres plantas productoras de gas natural para la Ciudad de México. La oferta diaria de cada una de estas plantas es de 200, 300 y 100 m^3, respectivamente. Las delegaciones que actualmente cuentan con la red de distribución para gas natural son Iztapalapa, Miguel Hidalgo, Venustiano Carranza e Iztacalco. La demanda diaria de cada una de estas delegaciones es 100, 100, 250 y 50 m^3, respectivamente. Los costos por m^3 de transporte desde cada una de las plantas a cada una de las delegaciones se muestran en la siguiente tabla.

	Iztapalapa	Miguel Hidalgo	Venustiano Carranza	Iztacalco
Planta 1	\$100	\$50	\$300	\$200
Planta 2	\$120	\$200	\$180	\$170
Planta 3	\$87	\$125	\$85	\$110

Hallar el programa de transporte óptimo, calculando el costo total mínimo.

Autoevaluación

1. ¿En qué año aparece el problema de transporte?

    a) 1945
    b) 1943
    c) 1941
    d) 1942

2. El método más utilizado para resolver el modelo de transporte es:

    a) Modi.
    b) Esquina noroeste.
    c) Símplex dual.
    d) Símplex tabular.

3. El método que proporciona da una buena aproximación inicial para el método de transporte es:

    a) Esquina noroeste.

b) Costo mínimo.
c) Símplex dual.
d) Vogel.

4. Para desarrollar el método de transporte la demanda total y la oferta total deben ser:

a) Negativas.
b) Cero.
c) Iguales.
d) Diferentes.

5. Para determinar si una solución es óptima, el método de la esquina noroeste analiza todas las trayectorias posibles a partir de las celdas:

a) Básicas.
b) No básicas.
c) Mayores a cero.
d) Negativas.

6. Una solución en el modelo de transporte es óptima si todos los costos marginales son:

a) Menores o iguales a cero.
b) No negativos.
c) Positivos.
d) Mayores al costo total.

7. Costo mínimo utiliza en cada paso la celda con:

a) Costo mínimo.
b) Una variable básica.
c) Una variable no básica.
d) Costo mayor.

8. Cuál es valor de θ en la siguiente trayectoria:

\$10 **(+) 15**	\$20 **(–)5**
\$4 **(–)10**	\$12 (+)

a) 10
b) 15
c) 20
d) 5

9. La solución inicial por el método de esquina noroeste para el siguiente problema es:

	1	2	3	Oferta
Planta 1	$100	$50	$300	25
Planta 2	$120	$200	$180	50
Planta 3	$87	$125	$85	30
Demanda	15	35	55	

a) $x_{11} = 15$, $x_{12} = 10$, $x_{22} = 25$, $x_{23} = 25$, $x_{33} = 30$
b) $x_{11} = 10$, $x_{12} = 15$, $x_{22} = 25$, $x_{23} = 25$, $x_{33} = 30$
c) $x_{11} = 15$, $x_{21} = 10$, $x_{22} = 25$, $x_{32} = 25$, $x_{33} = 30$
d) $x_{11} = 15$, $x_{12} = 10$, $x_{22} = 25$, $x_{23} = 30$, $x_{33} = 25$

10. La solución inicial por el método de Vogel del problema de la pregunta 9 es:

a) $x_{21} = 10$, $x_{12} = 15$, $x_{22} = 25$, $x_{23} = 25$, $x_{33} = 30$
b) $x_{11} = 10$, $x_{12} = 15$, $x_{22} = 25$, $x_{23} = 25$, $x_{33} = 30$
c) $x_{21} = 25$, $x_{12} = 15$, $x_{22} = 10$, $x_{23} = 25$, $x_{33} = 30$
d) $x_{21} = 15$, $x_{12} = 25$, $x_{22} = 10$, $x_{23} = 25$, $x_{33} = 30$

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

1. Minimizar.
2. Equilibrado.
3. Ceros.
4. Modi.
5. C_{ij}
6. Oferta total 600 unidades, demanda total 550 unidades. Creamos un destino ficticio con una demanda de 50 unidades:

	1	2	3	4	5*	Oferta
1	$ 50	$ 78	$ 85	$ 20	$ 0	$ 300
2	$ 40	$ 35	$ 100	$ 90	$ 0	$ 200
3	$ 55	$ 25	$ 60	$ 80	$ 0	$ 100
Demanda	100	200	150	100	50*	

Ejercicio 2

1. Solución.
2. Superior.
3. Menor.
4. No negativos.
5.

	1	2	3	4	Oferta
1	$10 **5**	$2 **10**	$20	$11	15
2	$12	$7 **2**	$9 **17**	$20 **6**	25
3	$4	$14	$16	$18 **10**	10
Demanda	5	12	17	16	

$Z_{\text{mín}} = \$537$

Ejercicio 3

1. F
2. V
3. V
4. V
5.

	1	2	3	4	Oferta
1	\$10 **5**	\$2 **10**	\$20	\$11	15
2	\$12	\$7 **2**	\$9 **17**	\$20 **6**	25
3	\$4	\$14	\$16	\$18 **10**	10
Demanda	5	12	17	16	

6.

	1	2	3	4	Oferta
1	\$10	\$2 **12**	\$20	\$11 **3**	15
2	\$12	\$7	\$9 **17**	\$20 **8**	25
3	\$4 **5**	\$14	\$16	\$18 **5**	10
Demanda	5	12	17	16	

$Z_{\text{mín}}$ = \$480

Ejercicio 4

1. b)
2. d)
3. c)
4. a)

5.

	1	2	3	4	Oferta
1	\$10 13	\$2 **4**	\$20 16	\$11 **11**	15
2	\$12 10	\$7 **8**	\$9 **17**	\$20 4	25
3	\$4 **5**	\$14 5	\$16 5	\$18 **5**	10
Demanda	5	12	17	16	

$Z = \$448$

Ejercicio 5

1. d)
2. b)
3. c)
4. d)
5.

	1	2	3	Oferta
1	\$50 **2 000**	\$150 **2 000**	\$80 **0**	4 000
2	\$60	\$200	\$70 **3 000**	3 000
Demanda	2 000	2 000	3 000	

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. $x_{11} = 2\,000$, $x_{12} = 3\,000$, $x_{21} = 2\,000$, $x_{23} = 1\,500$ $Z = \$860\,000$

   Voguel una iteración; esquina noroeste 2 iteraciones.

2. $x_{11} = 1\,800$, $x_{13} = 2\,000$, $x_{21} = 2\,200$, $x_{22} = 2\,800$, $Z = \$1\,416\,000$

   Voguel una iteración, esquina noroeste 4 iteraciones.

3. $x_{11} = 100$, $x_{12} = 100$, $x_{23} = 150$, $x_{24} = 50$, $x_{33} = 100$, $Z = \$59\,000$

   Voguel dos iteraciones; esquina noroeste 3 iteraciones.

Respuestas a la autoevaluación

1. c)
2. a)
3. d)
4. c)
5. b)
6. b)
7. a)
8. d)
9. a)
10. d)