Unidad 2

- LOGARITMOS

Los logaritmos fueron inventados en 1614 por el matemático escocés John Napier (1550-1617) y fueron llevados a la práctica por Henry Briggs (15561631), profesor en Oxford. Los logaritmos tuvieron un éxito inmediato ya que son una herramienta muy útil para efectuar abreviadamente diversas operaciones aritméticas; sobre todo, fueron utilizados para realizar cálculos aritméticos complejos y tediosos, como los llevados a cabo en Astronomía. Actualmente, con el surgimiento de las calculadoras electrónicas, el uso de los logaritmos con propósitos computacionales ha sido relegado a un papel menor. Aun así, los logaritmos tienen amplia aplicación en muchas áreas de la ciencia, la tecnología, la economía, las finanzas, etcétera.

La palabra logaritmo viene del griego: logos que si lea razonar o calcular, y arithmos que quiere decir número. Por tanto, logaritmo significa número para calcular.

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

La logaritmación es una operación que consiste en, dada una base y el resultado de una elevación a potencia, hallar el exponente. Por ejemplo, ¿a qué potencia hay que elevar la base 8 para obtener el número 64? Como para obtener el número 64 hay que elevar 8 al cuadrado, se dice que 2 es el logaritmo de 64 en la base 8, y se escribe de la siguiente forma:

$$\text{Log}_8 64 = 2$$

Otro ejemplo: puesto que $5^3 = 125$, se dice que 3 es el logaritmo de 125 en la base 5, y se escribe:

$$\log_5 125 = 3$$

En general, si b L = N, entonces L se llama logaritmo de N en la base b. Es decir, el logaritmo de un número N es el exponente L a que hay que elevar una base b para obtener el número N. En forma simbólica la definición se escribe como:

$$\log_b N = L \text{ si y sólo si } b^L = N \qquad (2.1)$$

EJEMPLO 2.1

Cambie las igualdades siguientes a la forma logarítmica:

a) $4^2 = 16$

b) $15625 = 5^6$

c) $49^{1/2}=7$

SOLUCION

Haciendo uso de la definición de logaritmo (2.1) se tiene:

a) 10g $_4$ 16=2

b) $\log_5 15625 = 6$

c) $\log_{49} 7=½ =0.5$

EJEMPLO 2.2

Cambie las igualdades siguientes a la forma exponencial:

a) $\log_{10} 1000 = 3$

b) $\log_{81} 9 = 0.5$

c) $\log_4 1/64 = –3$

SOLUCION

Usando la definición (2.1) se tiene:

a) $10^3 = 1000$

b) $81^{0.5}= 9$

c) $4^{–3}= 1/64$

LEYES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS

A continuación se enuncian y demuestran las leyes básicas de los logaritmos, las cuales son, simplemente, una reformulación de las leyes de los exponentes. Después de cada demostración se da un ejemplo numérico de la ley enunciada.

Teorema 1

El logaritmo de cero y de los números negativos no existe en el conjunto de los números reales.

Esto es:

log $_b$, N no existe, para todo N ≤ 0

DEMOSTRACIÓN

La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa, porque si lo fuera sus potencias pares serían positivas y las impares serían negativas, y se tendría un conjunto de números alternados positivos y negativos; y por tanto, algunos números positivos no tendrían logaritmo.

Usando como base lo expuesto en el párrafo anterior, el logaritmo de un número negativo sería un número L tal que b^L sea un número negativo. Tal número no existe en el conjunto de los números reales; por tanto, el logaritmo de cero y el logaritmo de los números negativos no existe.

En matemáticas superiores se demuestra que los logaritmos de los números negativos son números complejos.

Ejemplo:

$\log_5 -38$ no existe en el conjunto de los números reales

Teorema 2

El logaritmo de 1 es igual a cero.

Esto es:

$\log_b 1=0$

DEMOSTRACIÓN

Se sabe que $b^0 = 1$ para toda b elemento del conjunto de los números reales. Por (2.1) se tiene que:

$\log_b 1 = 0$

Ejemplos:

$\log_7 1 = 0$

$\log_{14} 1 = 0$

Teorema 3

El logaritmo del número b en la base b es igual a 1. Esto es:

$\log_b b=1$

DEMOSTRACIÓN

Como $b^1 = b$, entonces, por (2.1), se tiene que $\log_b b = 1$.

Ejemplos:

$\log_9 9 = 1$

$\log_{25} 25= 1$

Teorema 4

El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números. Esto es:

$\mathbf{\log_b MN = \log_b M + \log_b N}$

DEMOSTRACIÓN

Sea:

$$b^u = M \quad (2.2)$$

$$b^v = N \quad (2.3)$$

Por la definición de logaritmo, se puede escribir:

$$\log_b M = u \quad (2.4)$$

$$\log_b N = v \quad (2.5)$$

Multiplicando (2.2) y (2.3),

$b^u\, b^v = MN$

Por una ley de los exponentes se tiene:

$b^{u+v} = MN$

Por la definición (2.1),

$\log_b MN = u + v$

Sustituyendo u y v de la expresión anterior por (2.4) y (2.5),

$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

Esta propiedad puede extenderse al caso del producto de tres o más números positivos.

Ejemplo:

$\text{Log}_3 (10)(5) = \log_3 10 + \log_3 5$

Teorema 5

El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador. Esto es:

$\mathbf{\log_b M/N = \log_b M - \log_b N}$

DEMOSTRACIÓN

Se divide (2.2) entre (2.3),

$b^u/b^v = M/N$

Por una ley de los exponentes se tiene:

$b^{u-v} = M/N$

Pasando la igualdad anterior a la forma logarítmica:

$\log_b M/N = u - v$

Sustituyendo u y v,

$\text{Log}_b M/N = \log_b M - \log_b N$

Ejemplo:

$\log_8 15/4 = \log_8 15 - \log_8 4$

Teorema 6

El logaritmo de un número positivo elevado a un exponente es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número. Esto es:

$\mathbf{Log_b M^n = n \log_b M}$

DEMOSTRACIÓN

Se eleva (2.2) a la potencia n:

$(b^u)n = M^n$

Por una ley de los exponentes,

$b^{u\,n} = M^n$

La igualdad anterior es equivalente a:

$\log_b M^n = u\,n$

Sustituyendo u,

$\text{Log}_b M^n = n \log_b M$

Ejemplos:

$\log_{10} 7^{1.5} = 1.5 \log_{10} 7$

$\log_6 \sqrt[3]{25} = \log_6 25^{1/3} = (1/3) \log_6 25$

En el ejemplo anterior se utilizó la siguiente ley de los radicales:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

EJEMPLO 2.3

Utilice las leyes de los logaritmos para escribir las expresiones siguientes en formas logarítmicas más sencillas:

a) $\log_b (7.12)(7.5^3)$

b) $\log_b (m\,n)/(p\,q)$

c) $\log_8 (\sqrt[5]{100})(8^7)$

SOLUCIÓN

a)

$\log_b (7.12)(7.5^3) = \log_b 7.12 + \log_b 7.5^3$ teorema 4

$= \log_b 7.12 + 3 \log_b 7.5$ teorema 6 *b)*

$$\log_b (m\,n)/(p\,q) = \log_b m\,n - \log_b p\,q \qquad \text{teorema 5}$$

$$= \log_b m + \log_b n - (\log_b p + \log_b q) \qquad \text{teorema 4}$$

$$= \log_b m + \log_b n - \log_b p - \log_b q$$

c)

$$\log_8 (\sqrt[5]{100})(8^7) = \log_8 \sqrt[5]{100} + \log_8 8^7 \qquad \text{teorema 4}$$

$$= \log_8 100^{1/5} + \log_8 8^7$$

$$= 1/5 \log_8 100 + 7 \log_8 8 \qquad \text{teorema 6}$$

$$= 1/5 \log_8 100 + 7 \qquad \text{teorema 3}$$

EJEMPLO 2.4

Utilice las leyes de los logaritmos para escribir las expresiones siguientes como un solo logaritmo:

a) $\log_b W + \log_b Y + \log_b Z$

b) $2 \log_{10} X – 3 \log_{10} Y$

SOLUCION

Se utilizan las leyes de los logaritmos leídas de derecha a izquierda.

a)

$$\log_b W + \log_b Y + \log_b Z = \log_b W\,Y\,Z \qquad \text{teorema 4}$$

b)

$$2 \log_{10} X - 3 \log_{10} Y = \log_{10} X^2 - \log_{10} Y^3 \qquad \text{teorema 6}$$

$$= \log_{10} X^2/Y^3 \qquad \text{teorema 5}$$

Ejercicios 2.1

En los ejercicios 1 a 6 cambie las igualdades dadas a la forma logarítmica:

1. $5^0 = 1$
2. $15^1 = 15$
3. $10^{-2} = 0.01$
4. $9^5 = 59049$
5. $2^7 = 128$
6. $p^q = t$

En los ejercicios 7 a 12 cambie las igualdades dadas a la forma exponencial:

7. $\log_8 4 = 2/3$

8. $\log_7 1 = 0$

9. $\log_2 0.25 = -2$

10. $\log_{20} 400 = 2$

11. $\log_{11} 1331 = 3$

12. $\log_m t = 55$

Escriba las siguientes expresiones en formas logarítmicas más sencillas:

13. $\log_b U^2 V^3$

14. $\log_b 83/XY$

15. $\log_b (M \sqrt[3]{N})/(P \sqrt{Q})$

16. $\log_{20} \sqrt[4]{(20m/n)}$

17. $\log_3 (30^{0.5})(40^5)/50^{0.6}$

Escriba cada expresión dada como un solo logaritmo:

18. $5.11 \log_b u - \log_b v$

19. $3 \log_b A + 2 \log_b C - 5 \log_b D - \log_b E$

20. $1/7 [2 \log_4 M + 10 \log_4 N]$

SISTEMAS DE LOGARITMOS

Debido a que cualquier número positivo, excepto el 1, puede ser usado como base de un sistema de logaritmos, el número de tales sistemas es infinito. Sin embargo, sólo dos sistemas logarítmicos se utilizan actualmente en la mayoría de las aplicaciones: el sistema de logaritmos naturales y el sistema de logaritmos decimales.

Sistema de Logaritmos Decimales

Este sistema, llamado también Sistema de Logaritmos Comunes o de Briggs (en honor del matemático inglés Henry Briggs), emplea el número 10 como base. Por tanto, el logaritmo decimal de un número positivo N se escribe como log lo N. Es costumbre omitir el subíndice 10 al trabajar con logaritmos decimales; de esta forma: $\log_{10} N = \log N$.

En este sistema los únicos números cuyos logaritmos son números enteros son las potencias enteras de 10, como se muestra a continuación:

--		--
--		--
--		--
$10^4 = 10{,}000$	por tanto	log 10,000 = 4
$10^3 = 1{,}000$	por tanto	log 1,000 = 3
$10^2 = 100$	por tanto	log 100 = 2
$10^1 = 10$	por tanto	log 10 = 1
$10^0 = 1$	por tanto	log 1 = 0
$10^{-1} = 1/10 = 0.1$	por tanto	log 0.1 = –1
$10^{-2} = 1/100 = 0.01$	por tanto	log 0.01 = –2
$10^{-3} = 1/1000 = 0.001$	por tanto	log 0.001 = –3
--		--
--		--
--		--

De la lista anterior resulta fácil ver que log $10^n = n$, y, como se puede observar, los números mayores que 1 tienen logaritmos positivos, mientras que los números que se encuentran entre 0 y 1 tienen logaritmos negativos. Además, puesto que el logaritmo de una potencia entera de 10 es un número entero, se concluye que los logaritmos de otros números no son enteros, sino un número entero más una fracción. Por ejemplo, para un número comprendido entre 1 y 10, el logaritmo está comprendido entre 0 y 1; para un número entre 10 y 100, el logaritmo está entre 1 y 2, y así sucesivamente. Para un número que se encuentra entre 0.1 y 1, el logaritmo está comprendido entre 0 y -1; para un número entre 0.1 y 0.01, el logaritmo está comprendido entre -1 y -2, y así sucesivamente. Así, por ejemplo, el logaritmo de 150 es 2.17609125906 y el logaritmo de 0.75 es -0.124938736608. Sin embargo, la parte decimal no puede determinarse por simple observación. La parte decimal se obtiene mediante tablas de logaritmos.

El uso de las tablas de logaritmos es raro en la actualidad; la forma más rápida, fácil y precisa de obtener el logaritmo de un número es por medio de la calculadora científica o financiera.

Se acaba de mencionar que el logaritmo decimal consta de la suma de dos partes, una de ellas es un entero y la otra es una fracción decimal. La parte entera se llama característica y la fracción decimal, mantisa. La mantisa siempre es positiva, y es la que se obtiene mediante el uso de las tablas, pero la característica puede ser cero, positiva o negativa. Al utilizar una calculadora para obtener logaritmos no es necesario considerar la separación en característica y mantisa, ya que ella proporciona ambas al efectuar el cálculo de un logaritmo.

Para encontrar el logaritmo decimal de un número N empleando la calculadora se sigue una, dependiendo de la calculadora que se tenga, de las secuencias de tecleo siguientes:

N $\boxed{\text{log}}$ o bien $\boxed{\text{log}}$ N

EJEMPLO 2.5

Halle el logaritmo decimal de los números 718 y 0.00019.

SOLUCION

$\log\ 718 = 718\ \boxed{\log}\ \rightarrow\ 2.85612444424$

$\log 0.00019 = 0.00019\ \boxed{\log}\ \rightarrow\ -3.72124639905$

Uso de la Calculadora HP

Para obtener el logaritmo de un número es necesario entrar al menú MATH, el cual se encuentra como función secundaria de la tecla %. Al presionar MATH aparece en la parte inferior de la pantalla el menú matemáticas, el cual consta de 6 rótulos que indican la función de cada uno. En este menú se encuentran disponibles diversas operaciones matemáticas. Las 6 teclas de color blanco en la parte superior del teclado y los seis rótulos del menú se relacionan entre sí. Al oprimir la tecla de color blanco que se encuentra debajo del rótulo LOGS se exhibe el menú de las funciones exponenciales y logarítmicas (así como las funciones hiperbólicas, que en este curso no son necesarias). El rótulo marcado como LOG permite el cálculo del logaritmo decimal de un número- Si se desea obtener, por ejemplo, el logaritmo de 20, se teclea el número y a continuación se oprime la tecla de color blanco que se encuentra debajo del rótulo LOG; es decir:

$$20\ \boxed{\log}\ \rightarrow\ 1.30102999566$$

Al oprimir la tecla EXIT, se regresa al menú MATH. Si de oprime de nuevo EXIT se sale del menú MATH y se regresa al menú principal (MAIN). Otra forma de regresar al menú principal es oprimiendo la tecla MAIN, la cual se encuentra como función secundaria de la tecla EXIT.

Consideremos ahora el problema inverso, es decir, conocido el logaritmo de un número N, encontrar el número N, el cual recibe el nombre de anti-logaritmo y se abrevia como antilog. Por ejemplo, se sabe que log de 718 es igual a 2.85612444424, entonces el antilogaritmo de 2.85612444424 es igual a 7l8.

Supóngase que se tiene la siguiente igualdad:

$$\log x = 1.39794$$

y se desea encontrar el valor de x, es decir, se desea encontrar el antilogaritmo de 1.39794. Aplicando a la igualdad anterior la definición de logaritmo (2.1), es posible escribir:

$10^{1.39794} = x$

Como x es el antilogaritmo de 1.39794, se acostumbra escribir:

$$x = \text{antilog } 1.39794 = 10^{1.39794}$$

Al llevar a cabo la elevación a potencia se tiene:

$$x = 25$$

Como se ve, el cálculo de un antilogaritmo es sencillo, simplemente se utiliza la definición de logaritmo. En las calculadoras científicas y financieras existe, sin embargo, una tecla específica para obtener el antilogaritmo de un número. Esta tecla viene marcada como 10^x y, por lo general, se encuentra como función secundaria de la tecla log.

Para encontrar el antilogaritmo decimal de un número se teclea el número y en seguida se oprime la tecla 10^x o bien la secuencia INV log.

EJEMPLO 2.6

Halle el antilogaritmo decimal de los números 1.81954393554 y –0.602059991328.

SOLUCION

antilog $1.81954393554 = 1.81954393554$ $\boxed{10^x}$ $\rightarrow$ 66

antilog $-0.602059991328 = -0.602059991328$ $\boxed{10^x}$ $\rightarrow$ 0.25

Para obtener el antilogaritmo de un número, es necesario estar en el menú de funciones exponenciales y logarítmicas. El rótulo marcado como 10^X permite el cálculo de un antilogaritmo decimal. Por ejemplo, si se desea obtener el antilogaritmo decimal de 1.54406804435 se teclea el número y en seguida se oprime la tecla de color blanco que se encuentra debajo del rótulo 10^X;

Es decir:

1.54406804435 $\boxed{10\text{^}X}$ $\rightarrow$ *35*

Sistema de Logaritmos Naturales

Este sistema, llamado también sistema de logaritmos Neperianos (en honor de John Napier), emplea como base un número irracional representado por la letra e, y cuyo valor aproximado a 12 decimales es 2.718 281828 459... En cálculo se explica la razón de porqué se eligió como base este número en apariencia tan extraño. La letra e se eligió en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783).

La notación log e N se lee "logaritmo de N en la base e", o bien, "logaritmo natural (o Neperiano) de N". Se acostumbra escribir In N en lugar de $\log_e$ N.

Para calcular el logaritmo natural de un número se puede hacer por tablas o por calculadora. Si se utiliza la calculadora, se teclea el número y en seguida se oprime la tecla In, o bien, se oprime primero In y en seguida se teclea el número, dependiendo del tipo de calculadora que se tenga.

EJEMPLO 2.7

Encuentre el logaritmo natural de 26.

SOLUCION

$\ln 26 = 26$ $\boxed{\text{In}}$ $\rightarrow$ 3.25809653802

Para encontrar el antilogaritmo natural de un número, se teclea el número, en seguida se oprime la tecla e^x, o bien, se oprime primero e^x y después se teclea el número. El antilogaritmo natural se abrevia como anti In.

EJEMPLO 2.8

Encuentre el antilogaritmo natural de 4.5108595065.

SOLUCION

anti ln 4.5108595065 = 4.5108595065 $\boxed{e^x}$ $\rightarrow$ 91

Uso de la Calculadora HP

El rótulo marcado como EXP permite el cálculo de un antilogaritmo natural. Si se desea obtener el antilogaritmo natural de 4.5108595065 se teclea el número y en seguida se oprime la tecla blanca que corresponde al rótulo EXP.

Ejercicios 2.2

Encuentre los siguientes logaritmos:

1. log 15.17
2. log 1
3. log 10
4. log 340.6
5. log 0.01417
6. log 0.374
7. ln 10
8. ln 516
9. ln 25.85
10. ln e
11. ln 0.510
12. ln 0.000842

Encuentre los siguientes antilogaritmos:

13. antilog 0.3714
14. antilog 0.81
15. antilog 7.10
16. antilog – 1.15
17. log N = 1.5
18. log N = – 3.8
19. anti ln 2.103
20. anti ln 30.1156
21. anti ln – 1.60943791243
22. ln N = 0
23. ln N = 5.81173961616
24. ln N = – 32.52

CALCULOS CON LOGARITMOS

Utilizar logaritmos para efectuar cálculos aritméticos puede presentar grandes ventajas ya que, de acuerdo con las leyes de los logaritmos, es posible reemplazar la multiplicación, división, elevación a potencia y extracción de raíces por suma, resta, multiplicación y división de logaritmos, respectivamente. Sin embargo, dada la disponibilidad de calculadoras los logaritmos han perdido parte de su importancia como instrumentos de cálculo. Aún así, los logaritmos siguen siendo útiles, tanto en matemática pura como aplicada. Por ejemplo, para obtener el valor de x de la ecuación 3.16x = 20, es necesario el uso de los logaritmos.

Los ejemplos siguientes tienen como objetivo ilustrar el uso de los logaritmos en los cálculos:

EJEMPLO 2.9

Encuentre el valor de $8.5^{2.3}$ utilizando logaritmos.

SOLUCION

Sea $N = 8.5^{2.3}$

Aplicando logaritmos decimales a ambos lados de la igualdad, para que ésta no se altere, se tiene:

$\log N = \log 8.5^{2.3}$

Por el teorema 6:

$\log N = 2.3 \log 8.5$
$\log N = (2.3)(0.929418925714)$
$\log N = 2.13766352914$

Por tanto:

$N = 10^{2.13766352914} = \text{antilog } 2.13766352914$

$N = 137.297784444$

Si resolvemos este problema de manera directa, utilizando una calculadora, obtenemos:

$8.5 \ \boxed{y^x} \ 2.3 \ = \ \rightarrow \ 137.297784444$

Al aplicar logaritmos a ambos lados de una igualdad, éstos pueden ser de cualquier base. El lector puede resolver el ejemplo 2.9 utilizando logaritmos naturales y verificar que el resultado es el mismo.

EJEMPLO 2.10

Use logaritmos para calcular $\dfrac{(37.8^{2.5})(345)}{2.85^{1.25}}$

SOLUCIÓN

Sea:

$$N = \frac{(37.8^{2.5})(345)}{2.85^{1.25}}, \text{ entonces}$$

$$\log N = \log \frac{(37.8^{2.5})(345)}{2.85^{1.25}}$$

Por los teoremas 4 y 5

$\log N = \log 37.8^{2.5} + \log 345 - \log 2.85^{1.25}$

Por el teorema 6:

$\log N = 2.5 \log 37.8 + \log 345 - 1.25 \log 2.85$

$\log N = (2.5)(1.57749179984) + 2.53781909507 - (1.25)(0.45484486)$

$\log N = 5.91299251966$

$N = \text{antilog } 5.91299251966$

$N = 818{,}450.69092$

EJEMPLO 2.11

Use logaritmos para resolver la operación siguiente: $4 + 2.1^{2.1}$

SOLUCION

Sea $X = 4 + 2.1^{2.1}$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad se tiene:

$\log X = \log (4 + 2.1^{2.1})$

A pesar de que la expresión anterior es correcta, no se puede resolver el problema debido a que no existen leyes de los logaritmos para sumas y restas. Si se escribe la igualdad anterior como $\log X = \log 4 + \log 2.1^{21}$, resulta incorrecto.

Para resolver el problema se procede de la siguiente forma:

Sea $W = 2.1^{2.1}$

Por tanto:

$\log W = \log 2.1^{2.1}$

$\log W = 2.1 \log^{2.1}$

$\log W = (2.1)(0.322219294734)$

$\log W = 0.676660518941$ $W = 4.7496380917$

Por tanto:

$X = 4 + 4.7496380917$

$X = 8.7496380917$

EJEMPLO 2.12

Una ecuación exponencial es una ecuación en la cual la variable aparece como exponente. Por ejemplo:

$5^{2x + 1} = 3^{x}$

En la solución de tales ecuaciones, los logaritmos y sus propiedades desempeñan un papel importante.

Resuelva la anterior ecuación exponencial.

SOLUCION

Se aplican logaritmos a ambos lados de la igualdad. En esta ocasión se aplicarán logaritmos naturales.

$\ln 5^{2x+1} = \ln 3^{x}$

Por el teorema 6:

$(2x+1)\ln 5 = x\ln 3$

$(2x+1)(1.60943791243) = (x)(1.09861228867)$

La igualdad anterior es una ecuación de primer grado con una incógnita.

$3.21887582486\,x + 1.60943791243 = 1.09861228867\,x$

$3.21887582486\,x - 1.09861228867\,x = -1.60943791243$

$2.12026353619\,x = -1.60943791243$ $X = -1.60943791243/2.12026353619$ $x = -0.759074466433$

EJEMPLO 2.13

Cuando una cantidad crece exponencialmente, a partir de un valor inicial Q_0, la cantidad final Q obtenida después de transcurrido un intervalo de tiempo t, viene dada por la siguiente ecuación:

$$Q = Q_0 e^{kt} \qquad (2.6)$$

en donde k es el porcentaje de crecimiento y e es la base de los logaritmos naturales. Ejemplos de procesos crecientes en forma exponencial son: el interés capitalizable continuamente, el crecimiento de la población, la inflación y el crecimiento del PNB (Producto Nacional Bruto).

Cuando una cantidad decrece exponencialmente a partir de un valor inicial Qo, la cantidad final Q obtenida después de transcurrido un intervalo de tiempo t, se describe mediante la siguiente ecuación:

$$Q = Q_0 e^{-kt} \qquad (2.7)$$

en donde k es el porcentaje de decrecimiento. Ejemplos de procesos decrecientes en forma exponencial son: la descomposición radiactiva, las ventas de un artículo al interrumpir la publicidad, la devaluación de ciertos bienes de capital (maquinaria) y el enfriamiento de un objeto caliente.

En 1986, en nuestro país había 77.9 millones de habitantes y una tasa de crecimiento promedio del 2.1% anual. Calcule el número de habitantes para el año 2000.

SOLUCION

Q = número de habitantes en el año 2000

Q_0 = número de habitantes iniciales = 77.9 millones

t = tiempo transcurrido = 2000 - 1986 = 14 años

k = 2.1% anual = 0.021 por año

Sustituyendo los datos anteriores en la ecuación (2.6) se tiene:

$Q = 77'900{,}000\ e^{(0.021)(14)}$

$Q = 77900{,}000\ e^{0.294}$

Por tanto:

In Q = In 77'900,000 + 0.294 In e

In Q=18.1709365108 + (0.294)(1)

In Q = 18.4649365108

Q = anti In 18.4649365108

Q = 104'524,966 habitantes

El resultado anteriores cierto solamente si la tasa decrecimiento promedio se mantiene constante durante los 14 años.

Ejercicios 2.3

Resuelva utilizando logaritmos:

1. $14.7^{5.76}$
2. $18^{-2.47}$
3. $\sqrt[4]{315.5}$
4. $(24.5^5)\ \sqrt[3]{1{,}728}\ /16^{3.2}$
5. $2^{1/3}\,3^{1/5}\,4^{7/3}$
6. $1.4^{3.2} - (55{,}500)^{1/4}$
7. $(1.735)\ e^4/2.5^{-0.25}$

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

8. $5^x = 70$
9. $4^{x+1} = 3^{2x}$
10. $5\ e^x = 36.9453$
11. $55\ e^{0.36\,x} = 544$
12. Encuentre el valor de w en: $(1 + w)^{24} = 4.0489$
13. Si $p^{5.3} = 1{,}024$, encuentre el valor de p
14. Una ecuación de curación de las heridas es:

$M = N\,e^{-n/10}$

siendo N el área originalmente dañada, en cm^2 y M el área dañada después de transcurridos *n* días, en cm^2. Encuentre el número de días necesarios para que una herida de 3 cm^2 se reduzca a 1 cm^2.

15. En Química existe una escala logarítmica conocida como pH (Potencial de Hidrógeno) que sirve para medir la acidez o alcalinidad de una solución. La escala va del 0, que representa el punto más ácido, hasta el 14, que representa lo más alcalino. Una solución totalmente neutra tiene un pH de 7.

El pH se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\mathrm{pH} = \log \frac{1}{[H^+]}$$

en donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno, en moles/litro.

Una lluvia ácida se genera al reaccionar el agua de lluvia con los contaminantes atmosféricos. Una lluvia con un pH menor de 5.6 se considera ácida.

Cierto día, en la ciudad de Guadalajara se registró una lluvia con una concentración de iones hidrógeno de 3.98 x 10 -3 moles/litro. ¿Se tuvo lluvia ácida ese día?

Para resolver los ejercicios 16 al 19, utilice las ecuaciones dadas en el ejemplo 2.13.

16. Una importante ciudad arroja diariamente 5,500 toneladas de basura, y crece a razón de 5.4% anual. Si continúa este ritmo de crecimiento, ¿cuántas toneladas diarias habrá que procesar dentro de 10 años? Si la capacidad instalada actual de la planta procesadora de basura permite manejar hasta 8,000 toneladas diarias, ¿cuándo dejará de ser suficiente?
17. Un robot industrial costó 1'850,000 dólares. ¿Cuál será su precio de venta después de 5 años de uso, sabiendo que se deprecia exponencialmente a una tasa del 15% anual?
18. La población de cierta especie animal se está extinguiendo a razón del 5% anual. Si la población actual es de 100,000 elementos, ¿cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que la población se reduzca a la mitad?
19. *El Producto Nacional Bruto (PNB) de un cierto país era de 150,000 millones de dólares en 1975 y de 220,000 millones de dólares en 1985. Suponiendo que el PNB está creciendo en forma exponencial, ¿cuál será el PNB para 1999?

TEMA ESPECIAL

LOS LOGARITMOS EN ESCENA

El truco más sorprendente de cuantos han sido presentados ante el público por calculadores profesionales es, sin duda, el siguiente:

Enterado por las carteleras de que un notable calculador se disponía a extraer de memoria las raíces de elevados índices de números muy grandes, prepara usted en casa, pacientemente, la 31 a. potencia de un número cualquiera y se dispone a hacer fracasar al calculista con su gran número de 35 cifras. En el momento oportuno se dirige al calculador con las siguientes palabras:

- Eso está bien, pero pruebe a extraer la raíz, cuyo índice es 31, del siguiente número de 35 cifras. Tome nota, se las voy a dictar.

El calculador toma la tiza, pero ya antes de que pronuncie usted la primera cifra, él ya ha encontrado el resultado: 13.

El calculador sin saber el número, ha extraído su raíz, siendo, además, de grado 31; lo ha hecho de memoria y, por añadidura, ¡con rapidez de relámpago!

Usted se maravilla y descorazona, aunque no ha sucedido nada extraordinario. El secreto reside en que no existe más que un número, precisamente el 13, que elevado a una potencia cuyo exponente sea 31, dé un resultado de 35 cifras. Los números menores a 13 dan menos de 35 cifras, y los mayores, más.

¿De dónde sabía eso el calculador? ¿Cómo halló la cifra 13? Se sirvió de los logaritmos, de logaritmos de dos cifras de mantisa, que recuerda de memoria, para los primeros 15 o 20 números. Aprendérselos no es tan difícil como parece, sobre todo si se tiene en cuenta que el logaritmo de un número compuesto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores primos. Recordando bien los logaritmos de 2, 3 y 7 se conocen ya los logaritmos correspondientes a los 10 primeros números; para saber los de la 2a. decena (de¡ 10 al 20) hay que acordarse de los logaritmos de otros cuatro números.

A cualquier calculador profesional le es fácil conservar en la memoria la siguiente tabla de logaritmos de dos cifras:

Cifras	Log	Cifras	Log
2	0.30	11	1.04
3	0.48	12	1.08
4	0.60	13	1.11
5	0.70	14	1.15
6	0.78	15	1.18
7	0.85	16	1.20
8	0.90	17	1.23
9	0.95	18	1.26
		19	1.28

** Recordemos que log 5 = log (10/2) = log 10 - log 2 = 1 - log 2,* El truco matemático que los ha llenado de asombro consiste en lo siguiente:

$\log \sqrt[31]{(35 \text{ cifras})} = 34.\_\_\_/31$

El logaritmo buscado puede encontrarse entre:

34/31 y 34.99/31 o entre 1.09 y 1.13

En este intervalo sólo se encuentra el logaritmo de un número entero 1.11, que es el logaritmo de 13. De esa manera es como se halla el resultado que los ha dejado perplejos. Claro que para hacer todo esto mental y rápidamente hay que disponerdel ingenio y la destreza de un profesional, pero en esencia, la cuestión es bastante sencilla. Cualquiera puede realizar trucos análogos, si no de memoria, al menos, por escrito.

Supongamos que le proponen resolver el siguiente problema: extraer la raíz de índice 64 de un número de 20 cifras.

Sin indagar de qué número se trata puede usted ofrecer el resultado: la raíz es igual a 2.

En efecto:

$\log \sqrt[64]{(20 \text{ cifras})} = 19.- - - - - /64;$

por lo tanto, debe estar comprendido entre 19/64 y 19.99/64, es decir, entre 0.29 y 0.32. Tal logaritmo para número entero no puede ser más que uno: 0.30..., o sea, el logaritmo del número 2.

Usted podría desconcertar definitivamente al que le planteara el problema, anticipándole el número que él se disponía a dictarle: el famoso número del "ajedrez"

$2^{64} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616$

Tomado del libro: Algebra recreativa de Y. Perelmán, Editorial Mir, Moscú, 1978.