

5.1. Algoritmo en modelos de maximización

El primer tipo de modelo que vamos a resolver por el método símplex es el que tiene como objetivo maximizar a una función lineal, la cual está sujeta a una serie de restricciones de la forma *menor igual que*. El modelo tiene la forma:

$$\begin{aligned} Z_{\text{máx}} &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s. a.: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_i &\geq 0 \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Que se representa en forma matricial por:

$$\begin{aligned} Z_{\text{máx}} &= CX \\ AX &\leq B \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde:

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ matriz de costos

A = matriz de coeficientes

B = matriz columna de términos independientes

X = matriz columna de las variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Algoritmo símplex

1. El primer paso consiste en convertir las desigualdades en igualdades al sumarles una variable de holgura h . Esta variable representa la cantidad que le falta a la desigualdad para ser igualdad. Las variables de holgura son siempre positivas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + h_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + h_2 &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + h_m &= b_m \end{aligned}$$

2. Formamos la tabla símplex.

- Se construye una tabla como la que se muestra a continuación:

Variables básicas	Z	x_1	x_2	...	x_n	h_1	h_2	...	h_m	Solución

- En la primera celda escribimos la etiqueta *variables básicas*, en la siguiente la etiqueta *Z*, en la última colocamos la etiqueta *solución* y en las intermedias escribimos los nombres de las variables originales, seguidas de las variables de holgura.

- El segundo renglón contiene la función objetivo, escrita de la siguiente manera: $Z_{\text{máx}} -c_1x_1 -c_2x_2 -\dots -c_nx_n -0h_1 -0h_2 -0h_3 = 0$, esto es, se agregan las variables de holgura h , colocándoles como coeficiente cero ($-0 = +0$) y después todas las variables se pasan del lado izquierdo de la igualdad.

Variables básicas	Z	x_1	x_2	...	x_n	h_1	h_2	...	h_m	Solución
Z	1	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	0

- A partir del tercer renglón escribimos cada una de las restricciones, en la columna de la variable básica colocamos las variables que forman la base ortogonal más simple (las componentes de la matriz identidad) que corresponden a las variables de holgura:

Variables básicas	Z	x_1	x_2	...	x_n	h_1	h_2	...	h_m	Solución
Z	1	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	0
h_1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1
h_2	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
h_m	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m

De esta manera se forma la tabla inicial símplex.

La primera solución asociada a esta tabla símplex es:

$$\begin{aligned}h_1 &= b_1 \\h_2 &= b_2 \\&\dots \\h_m &= b_m \\Z &= 0\end{aligned}$$

Esta solución se obtiene al observar que si en la tabla tomamos las columnas asociadas a las variables básicas, entonces tenemos la matriz identidad aumentada. El valor de Z se lee directamente del coeficiente que está en el renglón de Z , debajo de la columna solución.

Una vez que obtuvimos la tabla inicial símplex asociada al modelo de P. L. se continúa para encontrar la solución óptima (si es que existe) o bien determinar que el problema no tiene solución óptima.

3. Verificamos si todos los coeficientes asociados al renglón de Z son mayores o iguales a cero, si es así entonces la solución en la tabla es la óptima. Termina. Si no es así, se continúa con el proceso.
4. Del conjunto de columnas se toma la que tenga el mayor valor negativo (número menor). Ésta es la variable que entra al sistema (pasa a ser básica) de manera que una variable tiene que salir para dar paso a la nueva.
5. Se divide el coeficiente de la columna seleccionada entre los elementos de la columna solución, de la operación se selecciona el menor valor positivo. Ésta es la variable que sale de la base (pasa a ser no básica). Nota. Las divisiones entre cero o entre números negativos no se toman en cuenta. Si todas son negativas o indeterminadas el problema no tiene solución. Termina.
6. La celda que se encuentra en la intersección de la columna seleccionada con el renglón seleccionado contiene al que llamaremos **elemento pivote**, por medio de operaciones elementales entre columnas el elemento pivote se convierte en 1 y sus elementos restantes en su columna en ceros; se obtiene una nueva columna componente de matriz identidad.

7. Se repite el proceso desde el paso 3 operando sobre matrices.

Para entender mejor el algoritmo vamos a resolver el siguiente modelo de P. L.

Ejemplo 1

$$\begin{aligned} Z_{\text{máx}} &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. a.: } 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Lo primero es sumar a cada una de las desigualdades una variable de holgura, lo cual nos permite escribir:

$$\begin{aligned} Z_{\text{máx}} &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. a.: } 3x_1 + 2x_2 + h_1 &= 18 \\ x_1 + h_2 &= 4 \\ x_2 + h_3 &= 6 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Creamos la tabla símplex:

Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución

El segundo renglón contiene la función objetivo, escrita como:

$$Z_{\text{máx}} - 3x_1 - 5x_2 - 0h_1 - 0h_2 - 0h_3 = 0$$

Unidad 5

Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
Z	1	-3	-5	0	0	0	0

A partir del tercer renglón escribimos cada una de las restricciones, en la columna de las variables básicas colocamos las variables de holgura que aparecen en las restricciones:

Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución	
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	Función objetivo
h_1	0	3	2	1	0	0	18	Primera restricción
h_2	0	1	0	0	1	0	4	Segunda restricción
h_3	0	0	1	0	0	1	6	Tercera restricción

De la tabla símplex inicial, la solución asociada es:

$$\begin{aligned} h_1 &= 18 \\ h_2 &= 4 \\ h_3 &= 6 \\ Z &= 0 \end{aligned}$$

Esta solución se obtiene al tomar sólo las columnas asociadas a las variables básicas y los términos independientes que forman una matriz identidad aumentada:

Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
h_1	0	3	2	1	0	0	18
h_2	0	1	0	0	1	0	4
h_3	0	0	1	0	0	1	6

3. Observamos que los coeficientes de x_1 y x_2 en el renglón Z son negativos. *Se tendrá la solución óptima cuando los valores en Z sean todos positivos.*

4. *Seleccionamos la columna* que tiene como coeficiente a -5 , ya que es el mayor valor negativo. Entrará la variable x_2 a formar parte de la base.

5. *Realizamos la división* de los elementos de la columna solución entre los elementos de la columna seleccionada *y se elige el valor menor.*

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución	
R_0	Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
R_1	h_1	0	3	2	1	0	0	18	$18/2 = 9$
R_2	h_2	0	1	0	0	1	0	4	$4/0 = \text{indeterminado}$
R_3	h_3	0	0	1	0	0	1	6	$6/1 = 6$

El menor de los resultados positivos es 6, por lo tanto la variable que sale es h_3 .

6. El elemento pivote es 1 por lo tanto su inverso multiplicativo es 1. Multiplicamos $R_3 \times 1$ y el resultado lo escribimos en una nueva tabla.

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z							
R_1								
R_2								
R_3	x_2	0	0	1	0	0	1	6

7. Ahora se toma el elemento pivote para hacer cero los coeficientes de su misma columna. Empezamos con R_0 . El coeficiente de este renglón en la columna seleccionada es -5 , por lo tanto su inverso aditivo es 5, entonces multiplicamos R_3 (actual) por 5 y el resultado se lo sumamos a R_0 .

$5 R_3$	0	0	5	0	0	5	30
R_0	1	-3	-5	0	0	0	0
$(5 R_3) + R_0$	1	-3	0	0	0	5	30

Unidad 5

Este resultado lo escribimos en la nueva tabla.

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	-3	0	0	0	5	30
R_1								
R_2								
R_3	x_2	0	0	1	0	0	1	6

Continuamos con el renglón R_1 , el cual tiene como coeficiente 2, su inverso aditivo es -2 . Multiplicamos R_3 por -2 y el resultado se lo sumamos a R_1 .

$-2 R_3$	0	0	-2	0	0	-2	-12
R_1	0	3	2	1	0	0	18
$(-2 R_3) + R_1$	0	3	0	1	0	-2	6

Este resultado lo escribimos en la nueva tabla.

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	-3	0	0	0	5	30
R_1	h_1	0	3	0	1	0	-2	6
R_2								
R_3	x_2	0	0	1	0	0	1	6

Como R_2 ya tiene como coeficiente cero en la columna seleccionada, simplemente se transcribe a la nueva tabla:

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	-3	0	0	0	5	30
R_1	h_1	0	3	0	1	0	-2	6
R_2	h_2	0	1	0	0	1	0	4
R_3	x_2	0	0	1	0	0	1	6

8. Ésta es la tabla símplex que se obtiene después de una iteración. La solución asociada a esta tabla es:

$$h_1 = 6$$

$$h_2 = 4$$

$$x_2 = 6$$

$$Z = 30$$

Regresamos al punto 1.

3. El coeficiente asociado a la columna de x_1 es negativo, por lo tanto la solución actual no es óptima y pasamos al punto 2.

4. La columna de x_1 es la única con coeficiente negativo en R_0 , por lo tanto, ésta es la variable que pasará a formar parte de la base.

5. Realizamos la división de los elementos de la columna solución entre los elementos de la columna seleccionada.

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución	
R_0	Z	1	-3	0	0	0	5	30	
R_1	h_1	0	3	0	1	0	-2	6	$6/3 = 2$
R_2	h_2	0	1	0	0	1	0	4	$4/1 = 4$
R_3	x_2	0	0	1	0	0	1	6	$6/0$ indeterminado

El menor de los resultados positivos es 2, por lo tanto la variable que sale es h_1 .

6. El elemento pivote es 3, para convertirlo en 1 multiplicamos por su inverso multiplicativo que es $1/3$. Multiplicamos R_1 ($1/3$) y el resultado lo escribimos en una nueva tabla:

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z							
R_1	x_1	0	1	0	$1/3$	0	$-2/3$	2
R_2								
R_3								

7. Usamos el elemento pivote 1 para hacer cero los coeficientes que están arriba y debajo de él. Empezamos con R_0 . El coeficiente de este renglón en la columna seleccionada es -3, por lo tanto su inverso aditivo es 3, entonces multiplicamos R_1 (actual) por 3 y el resultado se lo sumamos a R_0 .

$3 R_1$	0	3	0	1	0	-2	6
R_0	1	-3	0	0	0	5	30
$(3 R_1) + R_0$	1	0	0	1	0	3	36

Este resultado lo escribimos en la nueva tabla.

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	0	0	1	0	3	36
R_1	x_1	0	1	0	1/3	0	-2/3	2
R_2								
R_3								

Continuamos con el renglón R_2 , el cual tiene como coeficiente 1, su inverso aditivo es -1 . Multiplicamos R_1 por -1 y el resultado se lo sumamos a R_2 .

$-1 R_1$	0	-1	0	-1/3	0	2/3	-2
R_2	0	1	0	0	1	0	4
$(-1 R_1) + R_2$	0	0	0	-1/3	1	2/3	2

Este resultado lo escribimos en la nueva tabla:

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	0	0	1	0	3	36
R_1	x_1	0	1	0	1/3	0	-2/3	2
R_2	h_2	0	0	0	-1/3	1	2/3	2
R_3								

Como R_3 ya tiene como coeficiente cero en la columna seleccionada, simplemente se transcribe a la nueva tabla.

	Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	0	0	1	0	3	36
R_1	x_1	0	1	0	1/3	0	-2/3	2
R_2	h_2	0	0	0	-1/3	1	2/3	2
R_3	x_2	0	0	1	0	0	1	6

8. Esta es la tabla símplex que se obtiene después de la segunda iteración. La solución asociada a esta tabla es:

$x_1 = 2$, $h_2 = 2$, $x_2 = 6$, $Z = 36$, $h_1 = h_3 = 0$ (por tener valores múltiples).

Regresamos al punto 1.

Como todos los coeficientes del renglón R_0 son positivos, entonces hemos llegado a la solución óptima del problema donde el valor de z máxima es 36.

Ejercicio 1

Selecciona la respuesta que completa de manera correcta los siguientes enunciados:

1. Para poder convertir una desigualdad de la forma menor o igual que en una igualdad, se debe sumar una variable de:

- a) Superávit.
- b) Holgura.
- c) Complementaria.
- d) Global.

2. La solución del método símplex es óptima si todos los coeficientes del renglón asociado con la función objetivo en la tabla símplex son:

- a) Cero.
- b) Negativos.
- c) Positivos.
- d) Mayores o iguales a cero.

3. La variable que entra a formar parte de la base es la que en el renglón asociado con la función objetivo en la tabla símplex tiene el coeficiente:

- a) Positivo.
- b) Cero.
- c) Menor negativo.
- d) Mayor negativo.

4. Para hacer 1 el elemento pivote, multiplicamos por:

- a) Su inverso aditivo.
- b) El elemento neutro.
- c) El mismo.
- d) Su inverso multiplicativo.

5. Los elementos que están arriba y abajo del elemento pivote deben convertirse en:

- a) Positivos.
- b) Negativos.
- c) Cero.
- d) Uno.

6. Resolver por método símplex el siguiente modelo de P. L.

$$\begin{aligned} Z_{\text{máx}} &= 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s. a.: } 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5.2. Soluciones básicas factibles

La forma de trabajar del método símplex puede variar en relación con otras lecturas del área, pero los resultados de optimización tendrán que ser siempre iguales para un mismo problema sin importar el método. En este libro tratamos que la enseñanza del algoritmo símplex sea lo más natural posible, partiendo desde la elaboración de la tabla inicial hasta la localización de las variables básicas entrantes y salientes, así como la interpretación de los resultados de la última tabla.

En la sección anterior aprendimos el algoritmo del método símplex, el cual es una herramienta poderosa para resolver modelos de programación lineal. En esta sección explicamos cómo es que este método encuentra la solución óptima.

Lo primero es escribir las restricciones del modelo en forma de igualdades (sumamos las variables de holgura). Esto se hace porque la solución del modelo (si es que existe) siempre está en un vértice del polígono de soluciones factibles, el cual se forma como la intersección de n restricciones (n es el número de variables del modelo).

Al convertir todas las restricciones en igualdades, se tiene un sistema de $n+m$ variables con m ecuaciones (m es el número de restricciones sin tomar en cuenta las de no-negatividad).

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n + & h_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_n + & h_2 & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots + & a_{mn}x_n + & h_m & = b_m \end{array} \quad (1)$$

Los vértices representan las soluciones del sistema anterior. El inconveniente es que como en general $n+m > m$, entonces el sistema tiene una infinidad de soluciones, ya que tenemos n grados de libertad. Para resolver este problema se divide a las variables en dos grupos:

Variables no básicas. De las $n+m$ variables se toman n y se les asigna el valor cero.

Variables básicas. El resto de las variables (m) se determinan al resolver el sistema que se obtiene al sustituir el valor de las variables no básicas en el sistema (1).

Observamos que existen varias combinaciones para seleccionar cuáles de las variables van a ser básicas y cuáles no básicas. Dependiendo de la combinación que tomemos es el vértice que encontramos, algunos de estos vértices pueden ser factibles (caen dentro de la región factible), no factibles (si alguna o algunas de las variables básicas tienen solución menor a cero) o bien puede ser que el sistema no tenga solución. De los vértices factibles debemos seleccionar aquel que optimice el valor de la función objetivo.

Realicemos un ejemplo para comprender mejor estas ideas.

Ejemplo 2

Tomemos el modelo del ejemplo 1 que resolvimos en la sección anterior.

$$\begin{aligned} Z_{\text{máx}} &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. a.: } 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El grupo de restricciones sin tomar en cuenta las de no negatividad son:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

Escritas en forma de igualdad son:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + h_1 &= 18 \\ x_1 + h_2 &= 4 \\ x_2 + h_3 &= 6 \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones con 5 variables (2 del modelo y 3 de holgura) y 3 ecuaciones ($n = 5$, $m = 3$), por lo tanto tenemos $5 - 3 = 2$ grados de libertad. Esto quiere decir que tenemos 3 variables básicas y 2 no básicas. Debemos seleccionar dos variables no básicas y determinar el valor de las básicas al resolver un sistema de 3 por 3. El número de combinaciones para seleccionar el acomodo de las variables está dado por la fórmula:

$${}_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Estas combinaciones son:

x_1, x_2	x_1, h_1	x_1, h_2	x_1, h_3	x_2, h_1
x_2, h_2	x_2, h_3	h_1, h_2	h_1, h_3	h_2, h_3

Al tomar la primera opción tenemos que $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, si sustituimos estos valores en el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} 3(0) + 2(0) + h_1 &= 18 \\ (0) + h_2 &= 4 \\ (0) + h_3 &= 6 \end{aligned}$$

Al simplificar se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución se obtiene de manera inmediata.

$$\begin{aligned} h_1 &= 18 \\ h_2 &= 4 \\ h_3 &= 6 \end{aligned}$$

Ésta es una solución factible, ya que todas las variables son mayores o iguales a cero. La solución completa es:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, h_1 = 18, h_2 = 4, h_3 = 6$$

Evaluamos la función objetivo en esta solución y obtenemos:

$$\begin{aligned} Z_{\max} &= 3x_1 + 5x_2 \\ Z &= 3(0) + 5(0) \\ Z &= 0 \end{aligned}$$

Esta solución es justamente con la que empezamos el método símplex al formar la tabla inicial.

Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
x_1	0	3	2	1	0	0	18
h_2	0	1	0	0	1	0	4
x_3	0	0	1	0	0	1	6

Al tomar las siguientes combinaciones, obtenemos los otros vértices de la región de soluciones factibles. En la siguiente tabla se resumen estos resultados.

Combinación	Variables básicas	Solución	Valor de Z
x_1, x_2	$h_1 = 18, h_2 = 4, h_3 = 6$	Factible	0
x_1, h_1	$x_2 = 9, h_2 = 4, h_3 = -3$	No factible	
x_1, h_2	No tiene solución		
x_1, h_3	$x_2 = 6, h_1 = 6, h_2 = 4$	Factible	30
x_2, h_1	$x_1 = 6, h_2 = -2, h_3 = 6$	No factible	
x_2, h_2	$x_1 = 4, h_1 = 6, h_3 = 6$	Factible	12
x_2, h_3	No tiene solución		
h_1, h_2	$x_1 = 4, x_2 = 3, h_3 = 3$	Factible	27
h_1, h_3	$x_1 = 2, x_2 = 6, h_2 = 2$	Factible	36
h_2, h_3	$x_1 = 4, x_2 = 6, h_1 = -6$	No factible	

De la tabla nos damos cuenta que el máximo valor de Z se alcanza en la combinación $h_1 = 0, h_3 = 0, x_1 = 2, x_2 = 6, h_2 = 2$ con $Z = 36$. Esta solución coincide con la del método de tablas:

Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
Z	1	0	0	1	0	3	36
x_1	0	1	0	1/3	0	-2/3	2
h_2	0	0	0	-1/3	1	2/3	2
x_2	0	0	1	0	0	1	6

El algoritmo del método símplex por tablas tiene la ventaja de que no analiza todas las combinaciones, ya que empezando por una combinación cuya solución sea factible, sólo pasa por las combinaciones que den soluciones factibles y siempre mejorando o manteniendo el valor de la función objetivo.

Lo más importante del método símplex por tablas es empezar con una tabla que contenga una solución básica factible; si el modelo tiene todas las restricciones de la forma *menor igual que*, las variables de holgura nos proporcionan una solución inicial factible, sin embargo, si una o varias de las restricciones son de la forma *mayor igual que*, tenemos que buscar técnicas que nos permitan obtener una solución inicial básica factible. Una de estas técnicas es ocupando el problema dual, el cual vamos a estudiar en la siguiente sección.

5.3. Método símplex primal-dual

Todo problema de programación lineal de maximización tiene asociado un problema de P. L. de minimización llamado dual y viceversa. Los dos problemas se construyen a partir del mismo problema real, sólo que si en uno de ellos el objetivo es maximizar las utilidades, en el otro el objetivo es minimizar los costos y como resultado el valor de la función objetivo de ambos problemas coincide, es decir, $Z_{\text{máx}} = Z_{\text{mín}}$ en las soluciones óptimas. Esto significa que hay un equilibrio entre utilidad y costo.

El estudio del problema dual se realiza con dos objetivos:

- Si tenemos un modelo de P. L. cuyo objetivo es minimizar (con restricciones de la forma *mayor igual que*) llamado modelo primal, entonces el modelo dual asociado será de maximización (con restricciones de la forma *menor igual que*), *el dual se resuelve por el algoritmo descrito en la sección anterior. La solución óptima del modelo dual estará en el valor de las variables de holgura del primal donde se cumple que $Z_{\text{máx}} = Z_{\text{mín}}$.*
- Al resolver el problema dual obtenemos un análisis de sensibilidad del modelo calculando los precios sombra.

5.3.1. Tabla primal-dual

Si el problema primal es de maximización, se utiliza el algoritmo descrito directamente. Pero si el modelo por resolver es de minimización se utiliza la llamada tabla primal-dual para trasladar el problema a maximización y volver al uso del mismo algoritmo.

Si tenemos el modelo primal de minimización:

$$\begin{aligned}
 Z_{\min} &= c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
 \text{s. a.: } &a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
 &a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
 &\vdots \\
 &a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
 &x_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2}$$

Definimos el modelo dual asociado con el modelo (2), como el modelo de programación lineal que tiene como objetivo maximizar la función objetivo (todas sus restricciones son de la forma menor o igual que):

$$\begin{aligned}
 Z_{\max} &= b_1y_1 + \cdots + b_my_m \\
 \text{s. a.: } &a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\
 &a_{12}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m \leq c_2 \\
 &\vdots \\
 &a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n \\
 &y_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3}$$

Observamos que si el modelo dual tiene m variables y n restricciones (sin incluir las de no negatividad), entonces el modelo primal tiene n variables y m restricciones. Las variables y_i son las variables del problema dual.

Para formar la tabla primal-dual se procede como sigue:

El tamaño de la tabla es de $m + 2$ renglones y $n + 2$ columnas. (m número de variables y n número de restricciones).

1. La celda de la esquina superior izquierda se divide en dos con una diagonal, en la parte superior escribimos la palabra *primal* (*mín*) y en la parte inferior *dual* (*máx*).
2. En la celda de la esquina superior derecha se escribe el símbolo $\geq$, mientras que en la primera columna del último renglón se escribe el símbolo $\leq$.

Unidad 5

3. En la primera columna a partir del segundo renglón se escriben los nombres de las variables del problema dual (m).
4. En el primer renglón se escriben los nombres de las variables del problema primal (n).

Primal Dual	x_1	x_2	...	x_n	$\geq$
y_1					
y_2					
$\vdots$					
y_m					
$\leq$					

5. Se escriben los coeficientes de la función objetivo del modelo dual en la última columna.
6. Se escribe cada una de las restricciones del problema dual en forma vertical, ocupando las columnas de la tabla.
7. En el último renglón se escriben las cantidades limitantes de las restricciones del modelo primal.
8. De esta tabla podemos obtener el modelo dual, lo único que debemos hacer es *leer el modelo de manera vertical y los coeficientes de la función objetivo se obtienen de la última columna*.

Ejemplo 3

Resolver el siguiente modelo de P. L.:

$$\begin{aligned}
 Z_{\min} &= 4x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. a.: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 4 \\
 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 3 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Como no tenemos descrito un procedimiento de solución para modelos de minimización usamos una tabla primal-dual para obtener el modelo de maximización asociado y resolvemos por el método visto anteriormente.

Creamos la tabla primal-dual, con el procedimiento descrito:

Min Máx	x_1	x_2	x_n	$\geq$
y_1	2	1	2	4
y_2	3	3	1	3
$\leq$	4	1	1	

De esta tabla podemos obtener el modelo dual, lo único que debemos hacer es leer el modelo de manera vertical y la función objetivo se obtiene de la última columna, es decir:

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{máx}} &= 4y_1 + 3y_2 \\
 \text{s. a.: } &2y_1 + 3y_2 \leq 4 \\
 &y_1 + 3y_2 \leq 1 \\
 &2y_1 + y_2 \leq 1 \\
 &y_i \geq 0 \quad i=1, 2
 \end{aligned}$$

Este es el problema dual asociado al problema primal. Existe una relación importante entre los dos modelos, *la última tabla símplex de solución del modelo dual proporciona la solución del primal, debido a la propiedad de soluciones complementarias*, la cual damos a continuación.

Propiedad de soluciones complementarias

En cada iteración el método símplex identifica simultáneamente una solución básica factible para el modelo primal y una solución complementaria para el modelo dual (que se encuentra en el primer renglón de la tabla símplex, como los coeficientes de las variables artificiales).

Esto quiere decir que los valores de las variables x_i del modelo primal son los valores que se encuentran en el renglón R_0 en las columnas de las variables de holgura de la tabla símplex del modelo dual.

Ejemplo 4

Continuando con el ejemplo 3 de la sección anterior, el modelo que se obtiene al sumar las variables de holgura es:

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{máx}} &= 4y_1 + 3y_2 \\
 \text{s. a.: } &2y_1 + 3y_2 + h_1 = 4 \\
 &y_1 + 3y_2 + h_2 = 1 \\
 &2y_1 + y_2 + h_3 = 1 \\
 &y_i \geq 0 \quad h_j \geq 0 \quad i=1, 2 \quad j=1, 2, 3
 \end{aligned}$$

La tabla inicial que obtenemos es:

	Variables básicas	Z	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	Solución	
R_0	Z	1	-4	-3	0	0	0	0	Función objetivo
R_1	h_1	0	2	3	1	0	0	4	Primera restricción
R_2	h_2	0	1	3	0	1	0	1	Segunda restricción
R_3	h_3	0	2	1	0	0	1	1	Tercera restricción

La tabla después de la primera iteración es:

	Variables básicas	Z	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	0	-1	0	0	2	2
R_1	h_1	0	0	2	1	0	-1	3
R_2	h_2	0	0	2.50	0	1	-0.50	0.50
R_3	y_1	0	1	0.50	0	0	0.50	0.50

La tabla después de la segunda iteración es:

	Variables básicas	Z	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	0	0	0	0.40	1.80	2.20
R_1	h_1	0	0	0	1	-0.80	-0.60	2.60
R_2	y_2	0	0	1	0	0.40	-0.20	0.20
R_3	y_1	0	1	0	0	0.20	0.60	0.40

Ésta ya es la tabla óptima, la cual tiene como solución del problema dual la siguiente:

$$\begin{aligned}y_1 &= 0.40 \\y_2 &= 0.20 \\Z_{\text{máx}} &= 2.20\end{aligned}$$

Sin embargo, nuestro interés está en la solución del problema primal de minimización, la cual obtenemos del renglón R_0 , al tomar los coeficientes de las variables de holgura, es decir:

$$\begin{aligned}x_1 = h_1 &= 0 \\x_2 = h_2 &= 0.40 \\x_3 = h_3 &= 1.80\end{aligned}$$

Al sustituir en la función objetivo, tenemos:

$$\begin{aligned}Z_{\text{mín}} &= 4x_1 + x_2 + x_3 \\Z_{\text{mín}} &= 4(0) + 0.40 + 1.80 \\Z_{\text{mín}} &= 2.20\end{aligned}$$

Se comprueba que efectivamente la función objetivo del problema dual tiene el mismo valor que la función objetivo del primal.

Ejemplo 5

Obtener la solución óptima del siguiente modelo de P. L.

$$\begin{aligned}Z_{\text{mín}} &= x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ \text{s. a.: } x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 8 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 &\geq 10 \\ 3x_2 + 4x_3 - x_4 &\geq 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Lo primero es formar la tabla primal-dual, asociada con el modelo:

Mín Máx	x_1	x_2	x_3	x_4	$\geq$
y_1	1	2	4	0	8
y_2	1	0	3	1	10
y_3	0	3	4	-1	7
$\leq$	1	1	3	2	

Unidad 5

De esta tabla obtenemos el modelo dual, el cual es:

$$Z_{\text{máx}} = 8y_1 + 10y_2 + 7y_3$$

$$\text{s. a.: } y_1 + y_2 \leq 1$$

$$2y_1 + 3y_3 \leq 1$$

$$4y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 3$$

$$y_2 - y_3 \leq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Resolvemos este modelo por el método símplex (ya no escribimos detalles). La tabla inicial es:

	Variables básicas	Z	y_1	y_2	y_3	h_1	h_2	h_3	h_4	Solución	
R_0	Z	1	-8	-10	-7	0	0	0	0	0	Función objetivo
R_1	h_1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	Primera restricción
R_2	h_2	0	2	0	3	0	1	0	0	1	Segunda restricción
R_3	h_3	0	4	3	4	0	0	1	0	3	Tercera restricción
R_4	h_4	0	0	1	-1	0	0	0	1	2	Cuarta restricción

La tabla óptima es:

	Variables básicas	Z	y_1	y_2	y_3	h_1	h_2	h_3	h_4	Solución
	Z	1	3.75	0	0	4.75	0	1.75	0	10
	y_2	0	1	1	0	1	0	0	0	1
	h_2	0	1.25	0	0	2.25	1	-0.75	0	1
	y_3	0	0.25	0	1	-0.75	0	0.25	0	0
	h_4	0	-0.75	0	0	-1.75	0	0.25	1	1

La solución del primal es:

$$x_1 = h_1 = 4.75$$

$$x_2 = h_2 = 0$$

$$x_3 = h_3 = 1.75$$

$$x_4 = h_4 = 0$$

$$Z_{\text{mín}} = 10$$

5.5. Maximización y Minimización (cambios en la función objetivo)

Es posible transformar un problema de maximizar a uno de minimizar y viceversa. Para ello analicemos lo siguiente:

Supongamos que queremos encontrar el máximo del siguiente conjunto de números:

$$\text{máx}\{1, 3, 5, 7\}$$

Sabemos que el máximo es 7. Ahora multipliquemos los elementos del conjunto por -1 , nos queda entonces el conjunto:

$$\{-1, -3, -5, -7\}$$

Si buscamos el mínimo de este nuevo conjunto obtenemos que es -7 . Esto quiere decir que el $\text{máx}\{1, 3, 5, 7\} = -(\text{mín}\{-1, -3, -5, -7\})$, por lo tanto si queremos cambiar el objetivo de un modelo de P. L. se hace lo siguiente:

1. Se multiplica la función objetivo por -1 .
2. Se cambia el objetivo de la función.
3. Se resuelve el modelo.
4. Se multiplica el valor de Z óptimo por -1 y éste es el valor del modelo original.

Ejemplo 7

Hallar la solución óptima del siguiente modelo de P. L.

$$\begin{aligned} Z_{\min} &= 5x_1 - 10x_2 \\ \text{s. a.: } 4x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 16 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Unidad 5

Este modelo tiene todas las desigualdades de la forma *menor igual que*, por lo tanto, parece que lo podemos resolver por método simplex, sin embargo, el objetivo de la función es minimizar. Para transformar el problema multiplicamos la función objetivo por -1 .

$$\begin{aligned} -1(Z_{\min} &= 5x_1 - 10x_2) \\ -Z_{\max} &= -5x_1 + 10x_2 \end{aligned}$$

Con este cambio nos queda el modelo:

$$\begin{aligned} -Z_{\max} &= -5x_1 + 10x_2 \\ \text{s. a.: } 4x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 16 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este modelo ya lo podemos resolver por el método simplex. La tabla inicial es:

Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
Z	-1	5	-10	0	0	0	0
h_1	0	4	2	1	0	0	10
h_2	0	3	8	0	1	0	16
h_3	0	0	1	0	0	1	5

La tabla final es:

Variables básicas	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
Z	-1	8.75	0	0	1.25	0	20
h_1	0	3.25	0	1	-0.25	0	6
x_2	0	0.38	1	0	0.12	0	2
h_3	0	-0.38	0	0	-0.12	1	3

Donde obtenemos la solución:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \\ -Z_{\max} &= 20 \end{aligned}$$

Para obtener el valor de Z multiplicamos por -1 de manera que la solución óptima es

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= 2 \\ \text{con } Z_{\min} &= -20\end{aligned}$$

Ejercicio 5

Resolver los siguientes modelos utilizando la técnica vista en esta sección.

1.
$$\begin{aligned}Z_{\min} &= -3x_1 + 8x_2 - x_3 \\ \text{s. a.: } x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 10 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 &\leq 15 \\ x_2 - x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}Z_{\max} &= -5x_1 - 7x_2 - x_3 \\ \text{s. a.: } 2x_1 - 4x_2 &\geq 8 \\ x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Resumen

En esta unidad aprendimos el método símplex y algunas de sus variantes, en la siguiente tabla describimos las características que puede tener un modelo y el método más recomendado para su solución: